1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, верно ли выполнено задание.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

413. Запишите в виде выражения:
а) квадрат суммы чисел x и 1;
б) сумму квадратов чисел a и b;
в) разность квадратов чисел m и n;
г) квадрат разности чисел m и n;
д) удвоенное произведение квадратов чисел x и y;
е) удвоенное произведение куба a и квадрата b.

414. Прочитайте выражение:
а) $(x+y)^2$; в) $(x-y)^2$; д) $(x-y)^3$; ж) $2(a-b)^2$;
б) x^2+y^2; г) x^2-y^2; е) x^3+y^3; з) $3(a^2+b^2)$.

П

415. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y=1{,}2x-30$ с осью x и осью y.

416. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:
а) $y=-4x+1{,}3$ и $y=x-2{,}7$;
б) $y=-x+8{,}1$ и $y=-3x+7{,}9$.

417. Каково взаимное расположение графиков функций:
а) $y=-\frac{1}{2}x+3$ и $y=-\frac{1}{2}x-3$; б) $y=\frac{2}{3}x+4$ и $y=-\frac{2}{3}x+4$?
Постройте схематически графики данных функций.

19. Умножение и деление степеней

Выражение a^2a^3 представляет собой произведение двух степеней с одинаковыми основаниями. Это произведение можно записать в виде степени с тем же основанием:

$$a^2a^3=(aa)\cdot(aaa)=aaaaa=a^5.$$

Значит,

$$a^2a^3=a^{2+3}.$$

Мы видим, что произведение a^2a^3 равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей перемножаемых степеней. Аналогичным свойством обладает произведение любых степеней с одинаковыми основаниями.

Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$a^ma^n=a^{m+n}.$$

Для доказательства используем определение степени и свойства умножения. Представим выражение $a^m a^n$ сначала в виде произведения множителей, каждый из которых равен a, а затем в виде степени

$$a^m a^n = (\underbrace{aa\ldots a}_{m\ \text{раз}}) \cdot (\underbrace{aa\ldots a}_{n\ \text{раз}}) = \underbrace{aa\ldots a}_{m+n\ \text{раз}} = a^{m+n}.$$

Таким образом,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доказанное равенство выражает *основное свойство степени*. Оно распространяется на произведение трёх и более степеней. Например:

$$a^m a^n a^k = a^{m+n} a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}.$$

Из основного свойства степени следует правило умножения степеней:

> при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

Приведём примеры:

$$x^8 x^7 = x^{8+7} = x^{15}, \quad yy^5 = y^1 y^5 = y^{1+5} = y^6, \quad b^2 b^4 b^3 = b^{2+4+3} = b^9.$$

Выражение $a^7 : a^3$ является частным двух степеней с одинаковыми основаниями. Оно имеет смысл при $a \neq 0$. Если $a \neq 0$, то это частное можно представить в виде степени с тем же основанием.

Действительно, так как $a^3 \cdot a^4 = a^7$, то по определению частного

$$a^7 : a^3 = a^4, \text{ т. е. } a^7 : a^3 = a^{7-3}.$$

Мы видим, что частное $a^7 : a^3$ при $a \neq 0$ равно степени с тем же основанием и показателем, равным разности показателей делимого и делителя.

Аналогичным свойством обладает любое частное степеней с одинаковыми основаниями, отличными от нуля, в котором показатель степени делимого больше показателя степени делителя.

> Для любого числа $a \neq 0$ и произвольных натуральных чисел m и n таких, что $m > n$,
>
> $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет доказано, если мы установим, что произведение a^{m-n} и a^n равно a^m.

Применив к произведению $a^{m-n} a^n$ основное свойство степени, получим

$$a^{m-n} a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m.$$

Значит, по определению частного $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Из доказанного свойства следует правило деления степеней:

при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Приведём примеры:

$$c^{10} : c^{2} = c^{10-2} = c^{8}, \quad p^{7} : p = p^{7} : p^{1} = p^{7-1} = p^{6}.$$

Мы вывели правило деления a^m на a^n для случая, когда $m > n$. Если это правило применить к частному $a^n : a^n$, то получится

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Степень с нулевым показателем не была определена. Так как при всяком $a \neq 0$ и любом натуральном n

$$a^n : a^n = 1,$$

то считают, что при $a \neq 0$

$$a^0 = 1.$$

Определение. Степень числа a, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице.

Например, $2^0 = 1$, $(-3{,}5)^0 = 1$. Выражение 0^0 не имеет смысла.

Теперь после введения нулевой степени мы можем применять формулу $a^m a^n = a^{m+n}$ (при $a \neq 0$) и в том случае, когда $m = 0$ или $n = 0$. Формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$ при $a \neq 0$ можно применять при любых целых неотрицательных числах m и n, удовлетворяющих условию $m \geqslant n$.

Упражнения

418. Представьте произведение в виде степени:

а) x^5x^8; в) y^4y^9; д) x^9x; ж) $2^6 \cdot 2^4$;
б) a^6a^3; г) b^8b^{15}; е) yy^{12}; з) $7^5 \cdot 7$.

419. Запишите в виде степени произведение:

а) m^3m^8; в) c^7c^{12}; д) aa^3; ж) $5^9 \cdot 5^8$;
б) x^4x^4; г) p^3p^{11}; е) b^2b; з) $3^3 \cdot 3^3$.

420. Представьте выражение a^{15} в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна:

а) a^6; б) a^9; в) a^2; г) a^{14}.

421. Представьте степень в виде произведения двух степеней с тем же основанием каким-нибудь способом:

а) x^{10}; б) y^{15}; в) 2^{12}; г) 5^{17}.

422. Представьте выражение x^6 в виде произведения двух степеней с основанием x всеми возможными способами.

423. Представьте в виде степени произведение:

а) $x^2x^5x^4$; в) $mm^3m^2m^5$; д) $10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^5$;
б) y^3y^2y; г) p^4p^3pp; е) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3$.

424. Запишите в виде степени выражение:

а) $m^3m^2m^8$; в) xx^4x^4x; д) $7^8 \cdot 7 \cdot 7^4$;
б) $a^4a^3a^2$; г) $n^5nn^3n^6$; е) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^5$.

425. Представьте в виде степени:

а) $5^8 \cdot 25$; в) $6^{15} \cdot 36$; д) $0{,}4^5 \cdot 0{,}16$;
б) $3^{12} \cdot 27$; г) $2^9 \cdot 32$; е) $0{,}001 \cdot 0{,}1^4$.

426. Представив в виде степени выражение, найдите его значение по таблице степеней числа 2:

а) $2^4 \cdot 2$; б) $2^6 \cdot 4$; в) $8 \cdot 2^7$; г) $16 \cdot 32$.

427. По таблице степеней числа 3 найдите значение выражения, представив его в виде степени с основанием 3:

а) $3^2 \cdot 3^5$; б) $81 \cdot 3^6$; в) $9 \cdot 2187$; г) $27 \cdot 243$.

428. Представьте выражение в виде степени с основанием c:

а) $(c^4)^2$; б) $(c^2)^4$.

429. Представьте в виде степени частное:

а) $x^5 : x^3$; в) $a^{21} : a$; д) $c^{12} : c^3$; ж) $3^8 : 3^5$;
б) $y^{10} : y^7$; г) $b^{19} : b^{18}$; е) $p^{20} : p^{10}$; з) $0{,}7^9 : 0{,}7^4$.

430. Выполните деление:

а) $p^{10} : p^6$; в) $x^{15} : x^4$; д) $10^{16} : 10^{12}$;
б) $a^8 : a^4$; г) $y^9 : y$; е) $2{,}3^{16} : 2{,}3^7$.

431. Найдите значение выражения:

а) $5^6 : 5^4$; в) $0{,}5^{10} : 0{,}5^7$; д) $2{,}73^{13} : 2{,}73^{12}$;
б) $10^{15} : 10^{12}$; г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 : \left(1\frac{1}{3}\right)^6$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^7 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

432. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{8^6}{8^4}$; б) $\dfrac{0{,}8^7}{0{,}8^4}$; в) $\dfrac{(-0{,}3)^5}{(-0{,}3)^3}$; г) $\dfrac{\left(1\frac{1}{2}\right)^4}{\left(1\frac{1}{2}\right)^2}$; д) $\dfrac{\left(-2\frac{1}{3}\right)^6}{\left(-2\frac{1}{3}\right)^3}$.

433. Вычислите:

а) $\dfrac{7^9 \cdot 7^5}{7^{12}}$; б) $\dfrac{3^{15}}{3^5 \cdot 3^6}$; в) $\dfrac{5^{16} \cdot 5^4}{5^{18}}$; г) $\dfrac{0{,}6^{12}}{0{,}6^4 \cdot 0{,}6^5}$.

434. Упростите выражение:

а) $x^n \cdot x^3$; в) $x \cdot x^n$; д) $c^9 : c^m$;
б) $a^2 \cdot a^m$; г) $y^n : y^4$; е) $k^n : k$.

435. Найдите значение выражения:

а) $3x^0$ при $x = 2{,}6$; в) $10a^2b^0$ при $a = -3$, $b = -8$;
б) $-2{,}5y^0$ при $y = -1\frac{2}{3}$; г) $27a^0c^3$ при $a = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$.

436. Выполните действия:

а) b^4b^0; б) $c^5 : c^0$; в) a^4a^0; г) $x^3 : x^0$.

П

437. Представьте в виде квадрата или куба число:

а) 9; б) −27; в) 6,25; г) 0,064; д) $-3\frac{3}{8}$; е) $5\frac{4}{9}$.

438. Постройте график функции, заданной формулой $y = x - 3$. Найдите по графику значения функции при $x = 4$ и $x = 6$.

439. Двигаясь со скоростью 70 км/ч, автомобиль за t ч прошёл расстояние s км. Задайте формулой зависимость s от t. Пользуясь этой формулой, найдите путь, который автомобиль прошёл за время от 3 ч 30 мин до 5 ч.

440. Пусть a — произвольное число. Сравните с нулём значение выражения:

а) $6a^2$; б) $-a^2$; в) $a^2 + 4$; г) $(a + 4)^2$; д) $-a^2 - 5$.

441. Принадлежит ли графику функции, заданной формулой $y = x^3 - 3x^2$, точка $A(7; 196)$; точка $B(-5; -200)$?

442. Кусок гранита объёмом 40 см^3 имеет массу 108 г. Какова масса куска гранита, объём которого на 35 см^3 больше?

20. Возведение в степень произведения и степени

Выражение $(ab)^4$ является степенью произведения множителей a и b. Это выражение можно представить в виде произведения степеней a и b:

$$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = (aaaa) \cdot (bbbb) = a^4b^4.$$

Значит,

$$(ab)^4 = a^4b^4.$$

Аналогичным свойством обладает любая натуральная степень произведения двух множителей.

Для любых a и b и произвольного натурального числа n

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

По определению степени

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ раз}}.$$

Сгруппировав отдельно множители a и множители b, получим

$$\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ раз}} = (\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}})\cdot(\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ раз}}).$$

Воспользовавшись определением степени, находим

$$(\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}})\cdot(\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ раз}}) = a^n b^n.$$

Следовательно,

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Доказанное *свойство степени произведения распространяется на степень произведения трёх и более множителей*.

Например:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n; \quad (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n.$$

Отсюда получается правило:

чтобы возвести в степень произведение, достаточно возвести в эту степень каждый множитель и результаты перемножить.

Пример 1. Возведём произведение $2yz$ в пятую степень.

Имеем $(2yz)^5 = 2^5 y^5 z^5 = 32y^5 z^5$.

Выражение $(a^5)^3$ есть степень, основание которой само является степенью. Это выражение можно представить в виде степени с основанием a:

$$(a^5)^3 = a^5 a^5 a^5 = a^{5+5+5} = a^{5\cdot 3}.$$

Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

По определению степени

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ раз}}.$$

Согласно основному свойству степени

$$\underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}}.$$

Заменим сумму $\underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ раз}}$ произведением mn.

Тогда получим

$$a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}.$$

Следовательно,

$$(a^m)^n = a^{mn}. \bigcirc$$

Из доказанного свойства степени следует правило:

при возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели перемножают.

Пример 2. Представим выражение $(a^4)^3$ в виде степени с основанием a.

▶ Имеем:

$$(a^4)^3 = a^{4 \cdot 3} = a^{12}. \triangleleft$$

Свойства степеней, выраженные формулами $(ab)^n = a^n b^n$ и $(a^m)^n = a^{mn}$, имеют место и для степеней с нулевым показателем (если основания отличны от нуля).

Упражнения

443. Выполните возведение в степень:

а) $(xy)^4$; в) $(2x)^3$; д) $(-5x)^3$; ж) $(-0{,}2xy)^4$;
б) $(abc)^5$; г) $(3a)^2$; е) $(-10ab)^2$; з) $(-0{,}5bd)^3$.

444. Возведите в степень:

а) $(mn)^5$; в) $(-3y)^4$; д) $(10xy)^2$; ж) $(-am)^3$;
б) $(xyz)^2$; г) $(-2ax)^3$; е) $(-2abx)^4$; з) $(-xn)^4$.

445. Найдите значение выражения:

а) $(2 \cdot 10)^3$; б) $(2 \cdot 5)^4$; в) $(3 \cdot 100)^4$; г) $(5 \cdot 7 \cdot 20)^2$.

446. Докажите, что:

а) квадраты противоположных чисел равны;
б) кубы противоположных чисел противоположны.

447. Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза; в 3 раза; в 10 раз; в n раз?

448. Как изменится объём куба, если его ребро увеличить в 2 раза; в 3 раза; в 10 раз; в n раз?

449. *(Для работы в парах.)* На покраску куба затратили 40 г краски. Хватит ли 1 кг краски, чтобы покрасить куб, ребро которого в 3 раза больше?

1) Выскажите друг другу предположение об ожидаемом ответе.
2) Выполните самостоятельно вычисления.
3) Обсудите, подтвердились ли ваши предположения.

450. *(Для работы в парах.)* Бассейн, имеющий форму куба, наполняется водой через трубу за 40 мин. Успеют ли за 5 ч наполнить водой через ту же трубу бассейн, имеющий форму куба, ребро которого вдвое больше?

1) Выскажите друг другу предположение об ожидаемом ответе.
2) Выполните самостоятельно вычисления.
3) Обсудите, подтвердились ли ваши предположения.

451. Представьте в виде степени произведение:
а) b^3x^3; в) $x^2y^2z^2$; д) $32a^5$;
б) a^7y^7; г) $(-a)^3b^3$; е) $0{,}027m^3$.

452. Найдите значение выражения:
а) $2^4\cdot 5^4$; в) $0{,}25^{15}\cdot 4^{15}$; д) $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\cdot 1{,}4^9$;
б) $4^3\cdot 25^3$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot 1{,}5^7$; е) $0{,}2^6\cdot 50^7$.

453. Выполните возведение в степень:
а) $(x^3)^2$; в) $(a^5)^4$; д) $(y^2)^5$; ж) $(b^3)^3$;
б) $(x^2)^3$; г) $(a^6)^3$; е) $(y^7)^2$; з) $(b^5)^2$.

454. Запишите в виде степени с основанием x выражение:
а) $(x^6)^4$; в) x^2x^2; д) $x^2x^3x^4$;
б) x^6x^4; г) $(x^2)^2$; е) $((x^2)^3)^4$.

455. Представьте в виде степени с основанием a выражение:
а) $(a^5)^2$; б) a^5a^2; в) $(a^4)^3$; г) a^3a^4; д) a^5a^5; е) $(a^5)^5$.

456. Представьте в виде степени с основанием a:
а) a^na^3; б) aa^m; в) a^2a^m; г) $(a^2)^m$; д) $(a^n)^3$; е) $(a^3)^n$.

457. Представьте в виде степени с основанием 5 число:
а) 25^4; б) 125^3; в) 625^2.

458. Представьте число 2^{20} в виде степени с основанием:
а) 2^2; б) 2^4; в) 2^5; г) 2^{10}.

459. Запишите число 2^{60} в виде степени с основанием:
а) 4; б) 8; в) 16; г) 32.

460. Выражение a^{12} представьте в виде степени несколькими способами.

461. Известно, что $a^2 = m$. Найдите a^6.

462. Упростите выражение:

а) $x^3 \cdot (x^2)^5$; в) $(a^2)^3 \cdot (a^4)^2$; д) $(m^2 m^3)^4$;
б) $(a^3)^2 \cdot a^5$; г) $(x^2)^5 \cdot (x^5)^2$; е) $(x^4 x)^2$.

463. Запишите в виде степени с основанием a выражение:

а) $(a^2)^4$; в) $(a^5)^2 \cdot (a^2)^2$; д) $(a^3 a^3)^2$;
б) $a^3 \cdot (a^3)^2$; г) $(a^3)^3 \cdot (a^3)^3$; е) $(aa^6)^3$.

464. Упростите выражение:

а) $x^5 \cdot (x^2)^3$; в) $(x^4)^2 \cdot (x^5)^3$; д) $(x^3)^2 \cdot (x^4)^5$;
б) $(x^3)^4 \cdot x^8$; г) $(x^2)^3 \cdot (x^3)^5$; е) $(x^7)^3 \cdot (x^3)^4$.

465. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^5 \cdot (2^3)^4}{2^{13}}$; в) $\frac{(2^5)^2}{2^6 \cdot 4}$; д) $\frac{(5^2)^4 \cdot 25}{5^9}$; ж) $\frac{3^{11} \cdot 27}{(3^4)^3 \cdot 9}$;

б) $\frac{(5^8)^2 \cdot 5^7}{5^{22}}$; г) $\frac{3^7 \cdot 27}{(3^4)^3}$; е) $\frac{(7^3)^3 \cdot 7^2}{(7^5)^2}$; з) $\frac{(11^2)^3}{11^2 \cdot 11^3}$.

П

466. Известно, что $a < 0$ и $b > 0$. Сравните с нулём значение выражения:

а) ab^2; в) a^2b; д) $-ab^3$; ж) $(a + b)^2$;
б) a^3b; г) ab^3; е) $a^2 + b^2$; з) $(a - b)^2$.

467. Какой цифрой может оканчиваться:

а) квадрат натурального числа;
б) четвёртая степень натурального числа?

468. Известно, что график функции $y = kx + 5{,}4$ проходит через точку $A(3{,}7; -2)$. Найдите значение коэффициента k.

469. На рисунке 74 построен график некоторой функции. Используя график, найдите:

а) значение y при x, равном -2; -1; 2;
б) значения x, при которых y равен $-0{,}5$; 2.

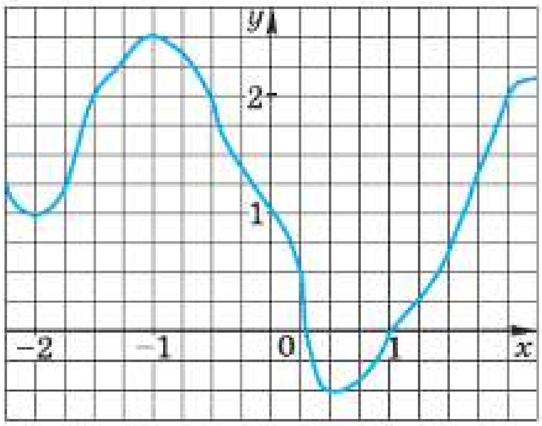


Рис. 74

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение степени числа с натуральным показателем. Приведите примеры и назовите в каждом из них основание и показатель степени.
2. Сформулируйте и докажите основное свойство степени.
3. Сформулируйте правило умножения степеней с одинаковыми основаниями. Представьте в виде степени произведение $12 \cdot 12^3 \cdot 12^6$.
4. Сформулируйте правило деления степеней с одинаковыми основаниями. Представьте в виде степени частное $5{,}7^6 : 5{,}7^3$.
5. Дайте определение степени числа с нулевым показателем.
6. Сформулируйте правило возведения в степень произведения, правило возведения в степень степени. Представьте в виде степени выражение: $(5ab)^4$; $(a^3)^6$; $y^4 \cdot (y^2)^6$.

§ 7 ОДНОЧЛЕНЫ

21. Одночлен и его стандартный вид

Выражения $5a^2x$, $2b^3(-3)bc^2$, $-3a^7$, xy^2 являются произведениями чисел, переменных и их степеней. Такие выражения называют *одночленами*. Одночленами считают также числа, переменные и их степени. Например, выражения -7, 2^3, x, x^4 — одночлены.

Упростим одночлен $2b^3(-3)bc^2$, воспользовавшись переместительным и сочетательным свойствами умножения:

$$2b^3(-3)bc^2 = 2(-3)b^3bc^2 = -6b^4c^2.$$

Мы представили одночлен $2b^3(-3)bc^2$ в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных. Такой вид одночлена называют *стандартным видом*. К одночленам стандартного вида относят и такие одночлены, как -5, a, $-a$, a^3. К стандартному виду можно привести любой одночлен.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена*. Например, коэффициент одночлена $-6b^4c^2$ равен -6. Коэффициенты одночленов a^2 и $-ab$ равны соответственно 1 и -1, так как $a^2 = 1 \cdot a^2$ и $-ab = -1 \cdot ab$.

В одночлене $7ax^2y^3$ сумма показателей степеней всех переменных равна 6. Эту сумму называют *степенью одночлена* $7ax^2y^3$. Степень одночлена $-9b^4c^3$ равна 7, степень одночлена $\frac{3}{8}x^5$ равна 5.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Если одночлен не содержит переменных и является числом, отличным от нуля, то степень этого одночлена считают равной нулю.

Число 0 является одночленом, степень которого не определена.

Упражнения

470. Является ли одночленом выражение:

а) $3{,}4x^2y$; г) x^2+x; ж) $a-b$; к) c^{10};
б) $-0{,}7xy^2$; д) x^2x; з) $2(x+y)^2$; л) $-m$;
в) $a(-0{,}8)$; е) $-\frac{3}{4}m^3nm^2$; и) $-0{,}3xy^2$; м) 0,6?

471. Записан ли в стандартном виде одночлен:

а) $6xy$; в) $0{,}5m\cdot 2n$; д) $-x^2y^3$;
б) $-2aba$; г) $-bca$; е) $5p^3p^2$?

472. Представьте одночлен в стандартном виде и назовите его коэффициент:

а) $8x^2x$; в) $3xy(-1{,}7)y$; д) $\frac{2}{3}m^2n\cdot 4{,}5n^3$;
б) $1{,}2abc\cdot 5a$; г) $6c^2(-0{,}8)c$; е) $2\frac{1}{3}a^2x\left(-\frac{3}{7}\right)a^3x^2$.

473. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $9yy^2y$; в) $-8ab(-2{,}5)b^2$; д) $2m^3n\cdot 0{,}4mn$;
б) $0{,}15pq\cdot 4pq^2$; г) $10a^2b^2(-1{,}2a^3)$; е) $-2x^3\cdot 0{,}5xy^2$.

474. Найдите значение одночлена:

а) $-0{,}125y^4$ при $y=-2$; б) $12x^2y$ при $x=-0{,}3$, $y=\frac{1}{6}$.

475. Вычислите значение выражения:

а) $3{,}7m^2$ при $m=0{,}4$; б) $-3a^3b$ при $a=-0{,}1$, $b=4$.

476. Ширина прямоугольника равна m см, а длина в 5 раз больше ширины. Найдите площадь прямоугольника.

477. Чему равен объём прямоугольного параллелепипеда, ширина которого a см, длина в 2 раза больше ширины, а высота в 2 раза больше длины?

478. Какова степень одночлена:

а) $-7x^5y^6$; в) $0{,}8mn^3k^2$; д) $-6m^7$;
б) $-abc$; г) ab^2c^3; е) 23?

479. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(-7; 15)$ относительно: а) оси x; б) оси y; в) начала координат.

480. Функция задана формулой $y = -\frac{2}{3}x$. Найдите значение функции при $x = -3$; 3; $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 2,4. При каком x значение y равно 1; -6; $-10{,}2$?

481. Найдите значение выражения: а) $\frac{4^3 \cdot 3^{10}}{6^{10}}$; б) $\frac{2^6 \cdot 6^{18}}{2^{25} \cdot 9^9}$.

22. Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень

При умножении одночленов и возведении одночлена в степень используются правило умножения степеней с одинаковыми основаниями и правило возведения степени в степень. При этом получается одночлен, который обычно представляют в стандартном виде.

Пример 1. Перемножим одночлены $-5a^2bc$ и $4a^2b^4$.

▶Составим произведение этих одночленов. Перемножим их числовые множители и степени с одинаковыми основаниями. Получим

$$-5a^2bc \cdot 4a^2b^4 = (-5 \cdot 4)(a^2a^2)(bb^4)c = -20a^4b^5c. \triangleleft$$

Пример 2. Найдём произведение одночленов $-x^2y$, $4x^3y^2$ и $-5xy$.

▶Имеем $-x^2y \cdot 4x^3y^2 \cdot (-5xy) = -1 \cdot 4 \cdot (-5)(x^2x^3x)(yy^2y) = 20x^6y^4. \triangleleft$

Пример 3. Возведём в третью степень одночлен $-2a^2b$.

▶Воспользуемся правилами возведения в степень произведения и степени:

$$(-2a^2b)^3 = (-2)^3(a^2)^3b^3 = -8a^6b^3. \triangleleft$$

Пример 4. Возведём одночлен $-x^3y^2$ в четвёртую степень.

▶Имеем $(-x^3y^2)^4 = (-1)^4 \cdot (x^3)^4 \cdot (y^2)^4 = x^{12}y^8. \triangleleft$

Упражнения

482. Выполните умножение:

а) $4x \cdot 7y$; в) $\frac{4}{9}ab^3 \cdot \frac{3}{2}ab$; д) $-0{,}6a^2b \cdot (-10ab^2)$;

б) $-8x \cdot 5x^3$; г) $x^2y^5 \cdot (-6xy^2)$; е) $-\frac{1}{5}m^3n^4 \cdot 5m^2n^3$.

483. Перемножьте одночлены:

а) $-11x^2y$ и $0{,}3x^2y^2$; в) $4xy$, $-x^2$ и $-y^3$;

б) a^5b и $-ab^3c$; г) a^2x^5b, $-0{,}6axb^2$ и $0{,}6a^2b^3$.

484. Выполните умножение:

а) $3{,}5 \cdot 3m$; г) $ab \cdot (-7ab^2) \cdot 4a^2b$;

б) $-6ax^3 \cdot 9bx^2$; д) $10x^2y \cdot (-xy^2) \cdot 0{,}6x^3$;

в) $-8a^2b^2 \cdot (-8a^3b^5)$; е) $-9ab^2 \cdot 3a^3 \cdot (-4b)$.

485. Представьте несколькими способами одночлен $6a^2b^3$ в виде произведения двух одночленов стандартного вида.

486. Представьте одночлен $-12x^4y^3$ двумя способами в виде произведения:

а) двух одночленов стандартного вида;

б) трёх одночленов стандартного вида.

487. Выполните возведение в степень:

а) $(3x^2)^3$; в) $(-2a^4b^2)^3$; д) $(-a^2bc^3)^5$;

б) $(4m)^2$; г) $(-3x^2y)^4$; е) $(-a^3b^2c)^2$.

488. Представьте в виде одночлена стандартного вида:

а) $(2m^3)^4$; в) $(-0{,}6m^3n^2)^3$; д) $(-xy^4b^2)^4$;

б) $(3a)^2$; г) $(-2xy^3)^2$; е) $(-x^2y^3m)^5$.

489. Возведите одночлен:

а) $5x^2y^3$ в квадрат; в) $-2m^3n^2$ в четвёртую степень;

б) $-4ax^3$ в куб; г) $-a^2bc^3$ в пятую степень.

490. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

а) $81x^4$; б) $121a^6$; в) $0{,}09y^{12}$; г) $\frac{4}{9}b^6$.

491. Представьте выражение в виде куба одночлена:

а) $64x^9$; б) $0{,}001y^{12}$; в) $-0{,}008b^6$; г) $-\frac{8}{27}a^{15}$.

492. Представьте каждый из одночленов:

а) $9b^2c^2$, $100m^2n^6$ в виде квадрата одночлена;

б) $-a^3b^6$, $-27x^6b^9$ в виде куба одночлена.

493. Запишите каждый из одночленов:

а) $16x^6$, $49m^2n^4$ и m^8 в виде квадрата одночлена;

б) a^9, $-8m^3$ и $1000x^3y^6$ в виде куба одночлена.

494. Какой одночлен надо возвести в квадрат (в куб), чтобы получить одночлен: а) x^6y^{12}; б) $1\,000\,000m^{18}$?

495. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида:

а) $25a^4\cdot(3a^3)^2$; д) $(-10c^2)^4\cdot 0{,}0001c^{11}$;

б) $(-3b^6)^4\cdot b$; е) $(-3b^5)^2\cdot\frac{2}{9}b^3$;

в) $8p^{15}\cdot(-p)^4$; ж) $(-2x^3)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}x^4\right)$;

г) $(-c^2)^3\cdot 0{,}15c^4$; з) $\left(-\frac{1}{2}y^4\right)^3\cdot(-16y^2)$.

496. На одном складе было 185 т угля, а на другом — 237 т. Первый склад стал отпускать ежедневно по 15 т угля, а второй — по 18 т. Через сколько дней на втором складе угля будет в полтора раза больше, чем на первом?

497. Прямая, являющаяся графиком функции, заданной формулой $y = kx + b$, пересекает оси координат в точках $A(0; 6)$ и $B(-4; 0)$. Найдите k и b.

498. Точка $A(a; -3)$ симметрична точке $B(4; b)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат. Найдите значения a и b.

23. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики

Зависимость площади квадрата от его стороны и зависимость объёма куба от его ребра являются примерами функций, которые задаются формулами $y = x^2$ и $y = x^3$.

Построим график функции $y = x^2$. Составим таблицу соответственных значений x и y:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Построим точки (рис. 75), координаты которых указаны в таблице. Чтобы точнее построить график вблизи начала координат, вычислим ещё несколько значений функции:

x	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,16	0,09	0,04	0,01	0,01	0,04	0,09	0,16

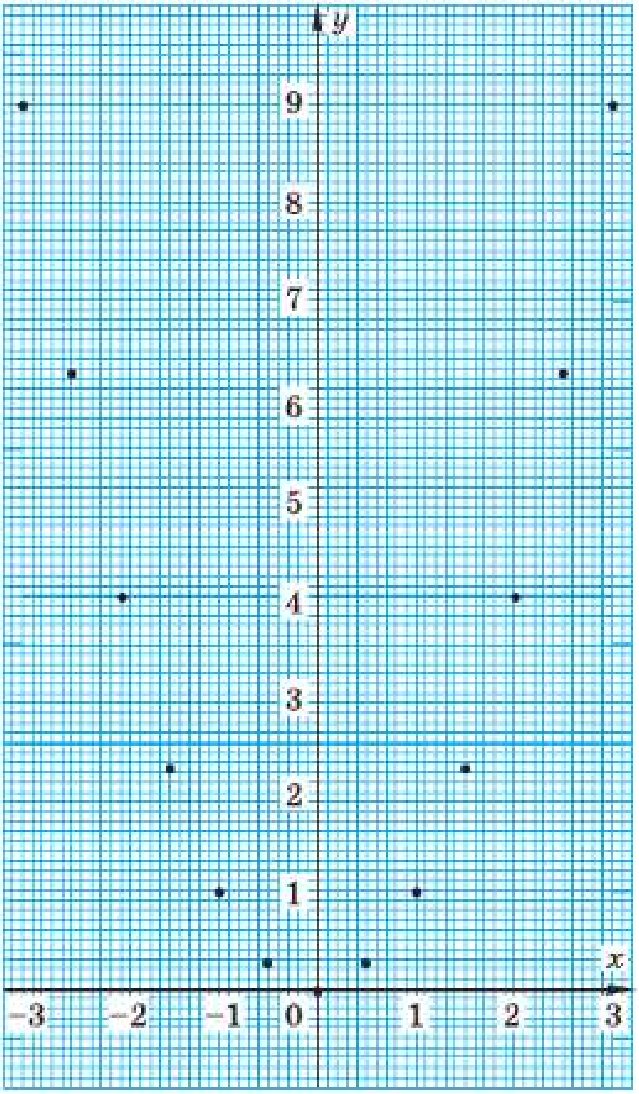


Рис. 75

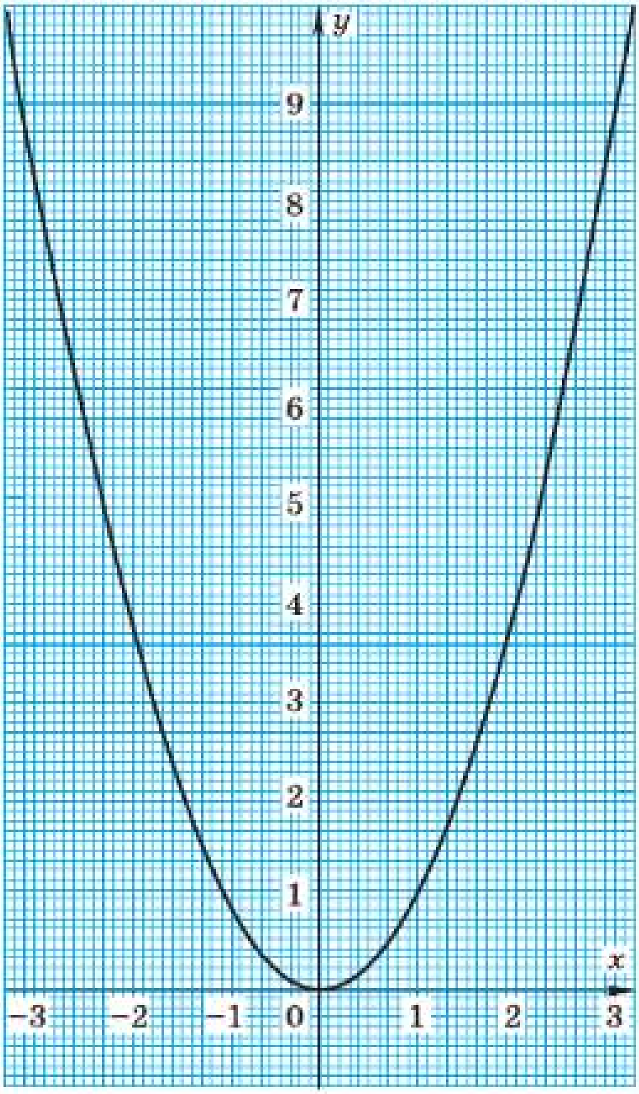


Рис. 76

Из таблицы видно, что при значениях x, близких к нулю, значения функции мало отличаются от нуля. Значит, график функции вблизи начала координат почти сливается с осью x.

Через отмеченные точки проведём плавную линию (рис. 76). Получим график функции $y = x^2$. Ясно, что график функции $y = x^2$ неограниченно поднимается вверх справа и слева от оси y.

График функции $y = x^2$ называют *параболой*.

Перечислим некоторые *свойства* функции $y = x^2$ и выясним, как они отражаются на её графике.

1. Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.
2. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** Поэтому график функции проходит через начало координат.
3. **Если $x \neq 0$, то $y > 0$.** Действительно, квадрат любого числа, отличного от нуля, положителен. Значит, все точки графика функции, кроме точки (0; 0), расположены выше оси x.
4. **Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y.** Это следует из того, что $(-x)^2 = x^2$ при любом x. Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, симметричны относительно оси y.

Построим теперь график функции $y = x^3$. Составим таблицу соответственных значений x и y, округляя значение y до сотых:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	−8	−3,38	−1	−0,13	0	0,13	1	3,38	8

Построим точки (рис. 77), координаты которых указаны в таблице.

Через отмеченные точки проведём плавную линию (рис. 78). Получим график функции $y = x^3$. Этот график неограниченно продолжается справа от оси y вверх и слева от оси y вниз. Заметим, что вблизи начала координат график функции почти сливается с осью x (если $x = 0,2$, то $y = 0,008$; если $x = 0,3$, то $y = 0,027$).

Перечислим некоторые *свойства* функции $y = x^3$ и выясним, как они отражаются на её графике.

1. Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.
2. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** Поэтому график функции проходит через начало координат.
3. **Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.** Действительно, куб положительного числа есть число положительное, а куб отрицательного числа есть число отрицательное. Значит, график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.
4. **Противоположным значениям x соответствуют противоположные значения y.** Это следует из того, что при любом значении x верно равенство $(-x)^3 = -x^3$. Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат.

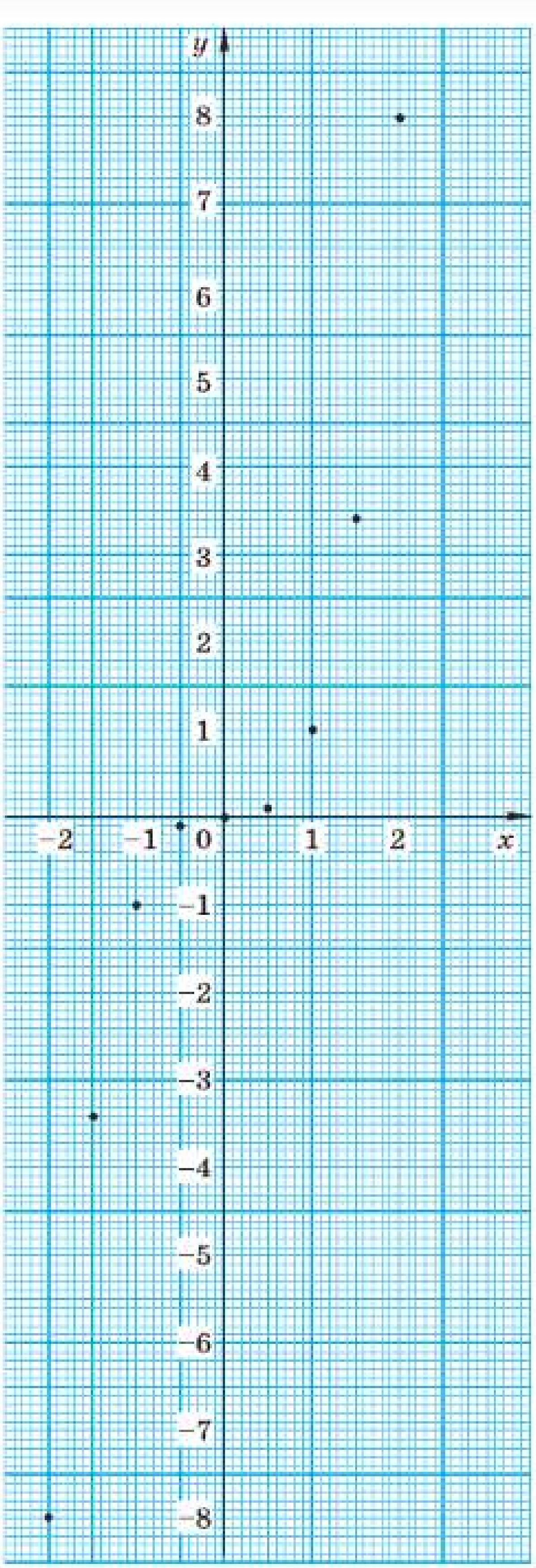


Рис. 77

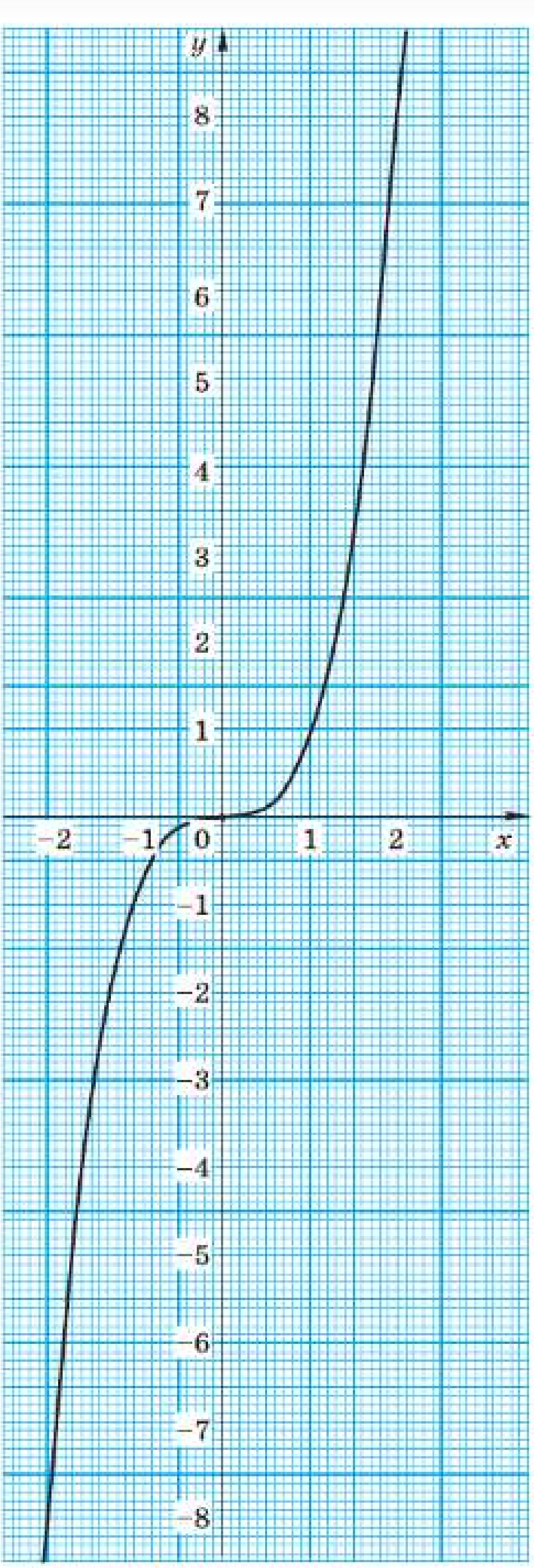


Рис. 78

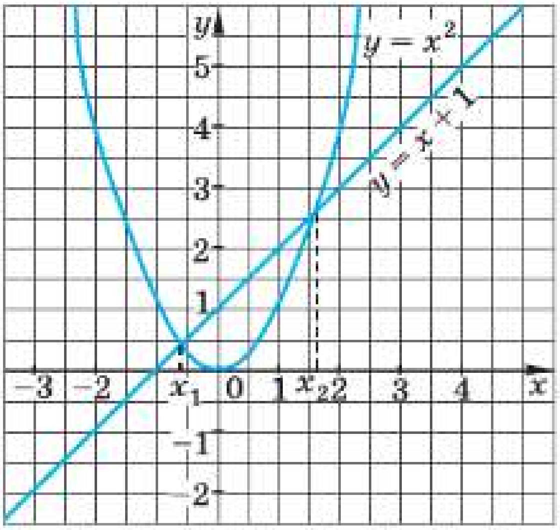


Рис. 79

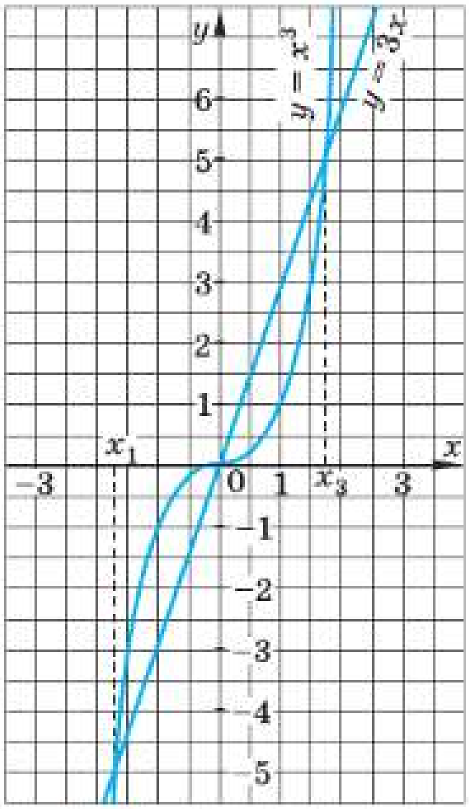


Рис. 80

С помощью графиков функций $y = x^2$ и $y = x^3$ можно найти приближённые значения корней некоторых уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $x^2 = x + 1$.

▶ Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x + 1$ (рис. 79). Эти графики пересекаются в двух точках. Абсциссы точек пересечения графиков являются теми значениями переменной x, при которых выражения x^2 и $x + 1$ принимают равные значения. Значит, абсциссы точек пересечения являются корнями уравнения $x^2 = x + 1$. Из рисунка видно, что это уравнение имеет корни

$$x_1 \approx -0{,}6, \quad x_2 \approx 1{,}6. \triangleleft$$

Пример 2. Решим уравнение $x^3 = 3x$.

▶ Построим в одной координатной плоскости графики функций $y = x^3$ и $y = 3x$ (рис. 80). Графики этих функций пересекаются в трёх точках. Уравнение $x^3 = 3x$ имеет три корня: $-1{,}7$, 0 и $1{,}7$. Заметим, что число 0 является точным значением корня, а числа $-1{,}7$ и $1{,}7$ — приближёнными.

Итак, мы нашли, что

$$x_1 \approx -1{,}7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 \approx 1{,}7. \triangleleft$$

Применённый нами способ решения уравнений называется *графическим*.

Упражнения

499. Используя график функции $y = x^2$, изображённый на рисунке 76 (см. с. 115), найдите:

а) значения y, соответствующие $x = 0{,}75$; $-1{,}25$; $1{,}25$; $-2{,}2$; $2{,}2$;

б) значения x, которым соответствует $y = 3$; 5.

500. Пользуясь графиком функции $y = x^2$ на рис. 76 на с. 115, найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 1,4; −2,6; 3,1;

б) значения аргумента, при которых значение функции равно 4; 6;

в) несколько значений x, при которых значения функции меньше 4; больше 4.

501. Воспользовавшись графиком функции $y = x^2$, найдите:

а) значение y, соответствующее $x = -2{,}4$; $-0{,}7$; $0{,}7$; $2{,}4$;

б) значения x, которым соответствует $y = 2$; $0{,}9$;

в) несколько значений x, при которых значение функции больше 2; меньше 2.

502. Принадлежит ли графику функции $y = x^2$ точка:

а) $A(6; 36)$; б) $B(-1{,}5; 2{,}25)$; в) $C(4; -2)$; г) $D(1{,}2; 1{,}44)$?

503. Используя график функции $y = x^3$ на рис. 78 на с. 117, найдите:

а) значение y, соответствующее $x = 1{,}4$; $-1{,}4$; $-1{,}8$; $1{,}8$;

б) значение x, которому соответствует $y = -4$; 4.

504. Пользуясь графиком функции $y = x^3$, найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному −0,7; 1,2;

б) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное 3; −3;

в) несколько значений аргумента, при которых значение функции больше −3, но меньше 3.

505. Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка:

а) $A(-0{,}2; -0{,}008)$; б) $B\left(1\frac{1}{2}; 3\frac{3}{8}\right)$; в) $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{27}\right)$?

506. В одной и той же системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Пользуясь построенными графиками, сравните: а) $0{,}6^2$ и $0{,}6^3$; б) $1{,}5^2$ и $1{,}5^3$; в) $2{,}7^2$ и $2{,}7^3$.

507. При каких значениях a точка $P(a; 64)$ принадлежит графику функции: а) $y = x^2$; б) $y = x^3$?

508. *(Для работы в парах.)* Используя график функции $y = x^2$, изображённый на рисунке 76, решите уравнение:

а) $x^2 = 4$; б) $x^2 = -1$; в) $x^2 = 5$; г) $x^2 = 0$.

1) Распределите, кто выполняет задания а), б), а кто — задания в), г), и выполните их.

2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.

3) Сделайте вывод о числе корней уравнения $x^2 = a$ при различных значениях a.

509. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = x + 6$; б) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

510. *(Для работы в парах.)* Используя график функции $y = x^3$, изображённый на рисунке 78 (с. 117), решите уравнение:

а) $x^3 = 8$; в) $x^3 = 5$;
б) $x^3 = -1$; г) $x^3 = 0$.

1) Распределите, кто выполняет задания а), г), а кто — задания б), в), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание.
3) Сделайте вывод о числе корней уравнения $x^3 = a$ при различных значениях a.

511. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 4x$; б) $x^3 = -x + 3$.

П

512. Сравните значения выражений:

а) $0{,}3^{16}$ и $(-0{,}3)^{16}$; г) $(-1{,}4)^6$ и $-1{,}4^6$;
б) $(-1{,}9)^{21}$ и $1{,}9^{21}$; д) -64 и -2^6;
в) $-5{,}6^4$ и $(-5{,}6)^4$; е) $-0{,}8^{11}$ и $(-0{,}8)^{11}$.

513. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 8{,}5x$ и $y = 0{,}5x - 19{,}2$.

514. Упростите выражение:

а) $-0{,}6a^3b(-2a^2b^3)^3$; г) $(7x^2y)^2 \cdot (-7y^{11})$;
б) $0{,}8xy^4(-6xy^4)^2$; д) $(-ac)^6 \cdot (-2a^2c)^5$;
в) $-a^4b^7(-3ab)^2$; е) $3p^2q \cdot \left(-\frac{1}{3}p^3q\right)^2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример одночлена стандартного вида.
2. Представьте в стандартном виде одночлен $5ab^2 \cdot (-3a^4b)$ и укажите его коэффициент.
3. Сформулируйте определение степени одночлена. Приведите пример одночлена пятой степени.
4. Сформулируйте свойства функции $y = x^2$. Как отражаются эти свойства на графике функции $y = x^2$?
5. Сформулируйте свойства функции $y = x^3$. Как отражаются эти свойства на графике функции $y = x^3$?

Для тех, кто хочет знать больше

24. О простых и составных числах

Напомним известные вам определения простого и составного числа. Натуральное число называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число. Натуральное число называется составным, если оно имеет более двух натуральных делителей. Число 1 не является ни простым, ни составным числом.

Выпишем в порядке возрастания простые числа, входящие в первую сотню натуральных чисел. Получим

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,$$
$$43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97.$$

В настоящее время составлены таблицы, содержащие миллионы простых чисел. Естественно, встаёт вопрос, существует ли наибольшее простое число. Ответ на этот вопрос ещё в III в. до н. э. дал великий греческий математик Евклид, который доказал, что «простых чисел больше, чем любое их число», т. е. бесконечно много.

Проведём соответствующее доказательство методом от противного. Допустим, что существует наибольшее простое число p. Составим произведение всех простых чисел от 2 до p включительно и обозначим его через a:

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p.$$

Рассмотрим число $a + 1$:

$$a + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Число $a + 1$ не является простым, так как оно больше p, а по предположению, p — наибольшее простое число. Оно не является также составным, так как по свойству делимости суммы не делится ни на одно из простых чисел, входящих в произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p$, а других простых чисел, по предположению, нет. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно и наибольшего простого числа не существует.

Математики много раз делали попытки найти какое-либо выражение, значениями которого являются только простые числа. Рас-

ЕВКЛИД — древнегреческий математик, живший на рубеже IV—III вв. до н. э. Главный его труд «Начала» в 15 книгах содержит основы античной математики, элементарной геометрии, теории чисел, общей теории отношений и метода определения площадей и объёмов. Евклид оказал огромное влияние на развитие математики. На протяжении двух тысяч лет его трактат «Начала» являлся основным учебником математики.

смотрим, например, выражение $F(n) = 2n^2 + 29$. Вычисляя его значения при $n = 1, 2, 3, \ldots$, найдём, что $F(1) = 3$, $F(2) = 37$, $F(3) = 47$, $F(4) = 61$, $F(5) = 79$, $F(6) = 101$, $F(7) = 127$. Мы видим, что каждый раз получается простое число. Можно предположить, что значение выражения $F(n)$ при любом натуральном n является простым числом. Однако это не так. Например, число $F(29) = 2 \cdot 29^2 + 29$ не является простым, так как из свойства делимости суммы следует, что оно делится на 29.

Математик Пьер Ферма в XVII в. предполагал, что все числа, заданные формулой $2^{2^n} + 1$, — простые, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Действительно, для n, равных 0, 1, 2, 3, 4, получается: $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65\,537$. Это простые числа. Однако Леонард Эйлер в XVIII в. показал, что число $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ делится на 641, т. е. не является простым.

Всякое составное число, как известно, можно представить в виде произведения простых чисел, или, как говорят, разложить на простые множители, и притом единственным способом, если не учитывать порядок множителей. Разложим, например, на простые множители число 360:

$$360 = 2 \cdot 180 = 2 \cdot 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45 = \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

При разложении числа на простые множители произведение одинаковых множителей обычно представляют в виде степени:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Разложением чисел на простые множители удобно пользоваться при нахождении их наибольшего общего делителя или наименьшего общего кратного.

Найдём, например, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 504 и 2352. Разложив каждое из этих чисел на простые множители, получаем, что

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \text{ и } 2352 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2.$$

Чтобы найти наибольший общий делитель этих чисел, надо каждый из множителей взять в степени с наименьшим показателем, с каким он входит в эти числа, а чтобы найти их наименьшее общее кратное — с наибольшим показателем.

Обозначив через d наибольший общий делитель этих чисел, а через k их наименьшее общее кратное, получаем, что

$$d = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168, \quad k = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 7056.$$

Пример. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 96. Одно из этих чисел — число 6. Каким может быть другое число?

▶ Разложив числа 96 и 6 на простые множители, получаем, что

$$96 = 2^5 \cdot 3, \quad 6 = 2 \cdot 3.$$

Очевидно, что в разложение искомого числа на простые множители должны входить пять двоек и не более одной тройки. Значит, второе число либо равно 2^5, т. е. 32, либо равно $2^5 \cdot 3$, т. е. 96. ◁

Упражнения

515. Приведите контрпример для утверждения:
а) значение выражения $a^2 + a + 17$ при любом значении a является простым числом;
б) не существует такого натурального числа, которое является делителем любого натурального числа.

516. Докажите, что значение выражения является составным числом:
а) $15^9 + 31^3$; б) $16^7 + 25^5 - 41^4$.

517. Найдите наибольшее двузначное число, равное произведению двух простых чисел.

518. Пусть p — простое число. Укажите наименьшее значение p, при котором значение выражения $2^p - 1$ не является простым числом.

519. Найдите все простые числа, на которые делится сумма:
а) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$; б) $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4$.

520. Разложите на простые множители число: а) 5082; б) 7605.

521. Разложите на простые множители число a, если

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

522. Найдите наибольший общий делитель чисел:
а) 765 и 315; б) 792 и 1936.

523. Найдите наименьшее общее кратное чисел:
а) 294 и 756; б) 693 и 1617.

524. В последовательностях записаны в порядке возрастания все натуральные числа, которые не превосходят 200, причём в первой последовательности записаны числа, кратные 6, а во второй — кратные 8:

$$6,\ 12,\ 18,\ \ldots;$$
$$8,\ 16,\ 24,\ \ldots.$$

Сколько в этих последовательностях одинаковых чисел?

525. Какой цифрой оканчивается значение выражения:
а) $45^5 - 31^4$; б) $37^2 + 21^6 + 45^4$?

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 6

526. Верно ли равенство:
а) $3^2+4^2+5^2=6^2$; б) $(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$?

527. Докажите, что $26^7+15^5-11^9$ кратно 10.

528. Разложив число на простые множители, представьте его в виде произведения степеней простых чисел:
а) 54; б) 144; в) 225; г) 500.

529. Представьте число в виде степени с основанием 2 или 3:
а) 64; б) 81; в) 512; г) 729; д) 1024.

530. Представьте число в виде суммы степеней числа 2:
а) 6; б) 18; в) 42.

531. Представьте число в виде степени с показателем, отличным от 1:
а) 121; б) −32; в) 0,125; г) 625; д) −0,216; е) 0,343.

532. Найдите значение выражения:
а) $0{,}001x^2$ при $x=-2$; в) x^2y^4 при $x=5$, $y=2$;
б) $1000y^3$ при $y=0{,}1$; г) $3x^3y^3$ при $x=-2$, $y=-5$.

533. Найдите значение выражения $(-1)^n$ при n, равном:
а) 6; б) 11; в) 23; г) 70.

534. Вычислите:
а) сумму кубов чисел 5 и −3;
б) куб суммы чисел 9 и −11;
в) разность квадратов чисел 12 и 8;
г) квадрат разности чисел 96 и −4;
д) удвоенное произведение квадратов чисел 7 и −5;
е) утроенное произведение числа 15 и квадрата числа 4.

535. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:
а) $(-0{,}03)^8$ и 0; в) $(-1{,}75)^3$ и $(-0{,}29)^2$;
б) 0 и $(-1{,}25)^7$; г) $0{,}98^6$ и $1{,}02^6$.

536. Что больше и на сколько:
а) 2^3 или 3^2; в) $2\cdot3^2$ или $3\cdot2^3$;
б) 5^2 или 2^5; г) $(11+19)^2$ или 11^2+19^2?

537. Сравните значения выражений a^2 и a^3 при a, равном:
а) −12; б) 0; в) 5.

538. Найдите при $x=1{,}5$ и $x=-2$ значения выражений:
а) x^2, $-x^2$, $(-x)^2$; б) x^3, $-x^3$, $(-x)^3$.

539. Докажите, что при любом натуральном n значение дроби является натуральным числом:

а) $\frac{10^n - 1}{9}$; б) $\frac{10^n + 8}{9}$; в) $\frac{10^n - 4}{3}$.

540. Какие из чисел −3, −2, −1, 1, 2, 3 являются корнями уравнения:

а) $x^4 = 81$; в) $x^2 - x = 2$; д) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$;
б) $x^6 = 64$; г) $x^4 + x^3 = 6x^2$; е) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$?

541. Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $x^2 + 1 = 0$; б) $2x^6 + 3x^4 + x^2 + 1 = 0$.

542. При каком значении x значение выражения $(2x + 3)^2$ равно нулю?

543. Докажите, что уравнение $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0$ не имеет положительных корней.

544. Имеет ли уравнение $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ отрицательные корни?

545. Упростите выражение:

а) $a^{10}a^{12}(-a^5)$; б) $x(-x)(-x^6)$; в) $y^k y^8 y^2$; г) $b^n b^n b^3$.

546. Представьте выражение в виде степени:

а) $2^5 \cdot 8$; б) $16 \cdot 64$; в) $7^n \cdot 343$; г) $81 \cdot 3^k$.

547. Представьте выражение в виде произведения двух множителей, один из которых равен a^5: а) a^{10}; б) a^6; в) $-a^{40}$.

548. Замените x степенью с основанием c так, чтобы полученное равенство было тождеством:

а) $c^2x = c^5$; б) $xc^5 = c^9$; в) $c^6x = c^{11}$; г) $c^4x = c^{15}$.

549. Замените частное степенью:

а) $b^{15} : b^{12}$; б) $7^{39} : 7^{13}$; в) $a^{11} : a$; г) $12^{100} : 12^{99}$.

550. Найдите значение выражения:

а) $13^{100} : 13^{98}$; в) $2^{14} : 8^4$; д) $5^{10} : 25^4$; ж) $\frac{24^6}{2^8 \cdot 3^5}$;

б) $\frac{3^8 \cdot 2^7}{3^6 \cdot 2^5}$; г) $\frac{9^5 \cdot 5^9}{3^9 \cdot 5^{10}}$; е) $\frac{3^8 \cdot 5^8}{3^{10} \cdot 5^7}$; з) $\frac{27^3 \cdot 6^5}{12^3}$.

551. Упростите выражение:

а) $6^{n+3} : 6^n$; б) $10^{n+1} : 10^{n-1}$.

552. Упростите выражение: а) $\frac{18^n}{2^{n+1} \cdot 3^{2n-1}}$; б) $\frac{14^{n-1} \cdot 21^{n+1}}{49^n \cdot 6^n}$.

553. Вычислите:

а) $(217 - 43{,}07 \cdot 5)^0 + 5 \cdot \frac{1}{3}$; б) $17{,}83^0 \cdot 6{,}4 + \frac{1}{7} \cdot 2{,}8$.

554. Упростите:

а) $(-1)^n \cdot (-1)^n$; б) $(-1)^{2n} : (-1)^3$.

555. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга. Как изменится площадь круга, если его радиус увеличить в 3 раза; в 7 раз?

556. Объём шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус шара. Как изменится объём шара, если радиус увеличить в 2 раза; в 4 раза?

557. Верно ли при любом значении x равенство:

а) $|x|^2 = x^2$; б) $|x|^3 = x^3$?

558. Найдите значение выражения:

а) $4^5 \cdot 2{,}5^5$; в) $0{,}2^9 \cdot 5^7$; д) $0{,}2^6 \cdot 25^3$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot 3^{13}$; г) $0{,}4^{10} \cdot 2{,}5^{12}$; е) $\left(\frac{1}{9}\right)^6 \cdot 81^4$.

559. Сравните значения выражений:

а) 10^7 и $2^8 \cdot 5^7$; в) 25^{25} и $2^{50} \cdot 3^{50}$;

б) 6^{12} и $2^{13} \cdot 3^{11}$; г) 63^{30} и $3^{60} \cdot 5^{30}$.

560. Представьте выражение в виде 3^n или -3^n:

а) $(-3^3)^2$; б) $(-3^2)^3$; в) $-(3^4)^2$; г) $-(-3^2)^3$.

561. Упростите выражение:

а) $(x^3)^2 \cdot (-x^3)^4$; в) $(x^7)^5 \cdot (-x^2)^6$;

б) $(-y^3)^7 \cdot (-y^4)^5$; г) $(-c^9)^4 \cdot (c^5)^2$.

562. Замените букву p выражением так, чтобы полученное равенство было тождеством:

а) $p^5 = x^{20}$; б) $p^7 = x^{21}$; в) $p^3 c^8 = c^{20}$; г) $y^7 \cdot (y^2)^4 = p^5$.

563. Представьте в виде степени:

а) $4^5 \cdot 2^{21}$; б) $25^{13} : 5^{11}$; в) $8^5 \cdot 16^{13}$; г) $27^{10} : 9^{15}$.

564. Представьте выражение в виде x^n или $-x^n$:

а) $(-x^3)^7$; б) $(-x^2)^5$; в) $(-x)^4 x^8$; г) $(-x^5)^7 \cdot (x^2)^3$.

565. Сколькими способами можно представить в виде степени с показателем, отличным от 1, число:

а) 2^{15}; б) 2^6?

566. При каком условии:
а) сумма квадратов двух чисел равна нулю;
б) квадрат суммы двух чисел равен нулю?

567. Натуральное число a оканчивается единицей. Какой цифрой оканчивается степень числа a с натуральным показателем? Для каких ещё цифр выполняется аналогичное свойство?

568. Докажите, что при любом натуральном k:
а) число 3^{4k} оканчивается единицей;
б) число $10^k - 1$ кратно 3.

К параграфу 7

569. Какова степень одночлена:
а) $3x^3y^7$; в) a^9b^9; д) $-8x^0$;
б) $-10ab^2c^3$; г) $-xyz$; е) 2,4?

570. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида и укажите его степень:
а) $5ab \cdot 0{,}7bc \cdot 40ac$; в) $-a^3b \cdot 3a^2b^4$;
б) $-0{,}45bd \cdot \left(-1\frac{1}{9}ad\right) \cdot 9ab$; г) $0{,}6x^3y \cdot (-0{,}5xy^3)$.

571. Составьте все возможные одночлены стандартного вида с коэффициентом 5, содержащие переменные x и y, такие, что степень каждого одночлена равна:
а) трём; б) четырём.

572. Представьте выражение в виде произведения двух одночленов стандартного вида, один из которых равен $20x^4y$:
а) $100x^5y^3$; в) $-4x^{16}y$; д) $5x^8y$;
б) $-30x^4y^5$; г) $x^{10}y^2$; е) $-x^4y^2$.

573. Представьте данный одночлен в виде произведения каких-нибудь двух одночленов стандартного вида:
а) $-8a^5c^3$; б) $-b^6y^9$; в) $60x^{10}y^{15}$.

574. Преобразуйте выражение в тождественно равный одночлен стандартного вида:
а) $(-10ab^{12})^2$; в) $(-3xy^2a^3)^3$;
б) $(-0{,}2x^4y)^4$; г) $(-0{,}5ab^2c^3)^4$.

575. Представьте произведение одночленов в виде степени некоторого одночлена:
а) $27a^2b^5 \cdot 3a^{10}b^3$; в) $0{,}01b^5c^3 \cdot (-0{,}1bc^6)$;
б) $-64a^8x^{11} \cdot (-0{,}25a^2x^9)$; г) $-\frac{9}{16}p^9q^{14} \cdot \frac{3}{4}p^3q^4$.

576. Упростите выражение:

а) $(-x^2y^2)^4\cdot(-xy)^2$;

б) $-\left(\frac{1}{3}xy^3\right)^2\cdot(-3x)^3$;

в) $(-2x^3y^2)^3\cdot(-2y^2)^3$;

г) $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^3\cdot(9ab^2)^2$;

д) $(-5a^3b)^2\cdot\left(\frac{1}{5}ab^3\right)^3$;

е) $\left(-\frac{2}{7}ab^4\right)^2\cdot\left(-3\frac{1}{2}a^3b\right)^2$;

ж) $(x^3y)^2\cdot(-5xy)^3$;

з) $\left(\frac{1}{6}x^2y^2\right)^2\cdot(-12x^3y^5)^2$.

577. Представьте выражение в виде произведения числа 3 и квадрата некоторого выражения:

а) $3m^4n^2$; б) $12x^6y^4z^2$; в) $\frac{3}{4}m^8n^4$.

578. На рисунке 81 построены графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Пользуясь графиком, сравните:

а) 0,23 и $0{,}23^2$; 0,23 и $0{,}23^3$; $0{,}23^2$ и $0{,}23^3$;

б) 1,47 и $1{,}47^2$; 1,47 и $1{,}47^3$; $1{,}47^2$ и $1{,}47^3$.

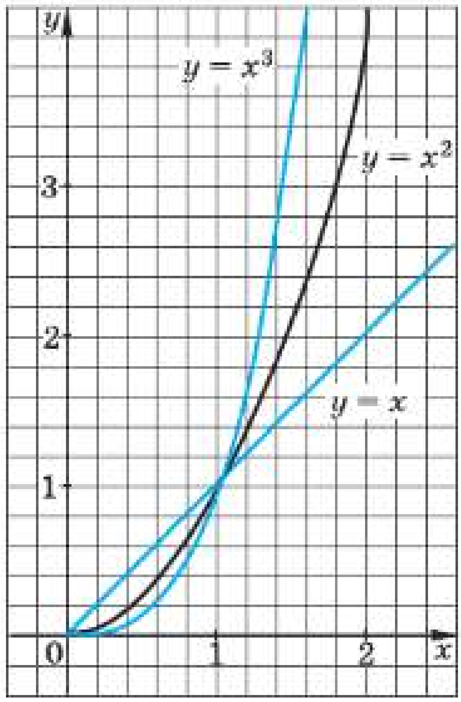


Рис. 81

579. а) Известно, что точка $P(-4; b)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = x^2$. Найдите значение b. Принадлежит ли графику этой функции точка $Q(4; b)$?

б) Известно, что точка $A(-4; a)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = x^3$. Найдите значение a. Принадлежит ли графику этой функции точка $B(-4; -a)$?

580. Точка $A(a; b)$ принадлежит графику функции:
а) $y = x^2$; б) $y = x^3$.
Принадлежат ли этому графику точки $B(-a; b)$, $C(a; -b)$, $D(-a; -b)$?

581. Расположите в порядке возрастания числа a, a^2 и a^3, если:
а) $0 < a < 1$; в) $-1 < a < 0$;
б) $a > 1$; г) $a < -1$.

582. Решите графически уравнение:
а) $x^2 = 2 - x$; в) $x^3 = 6$;
б) $x^2 = 8$; г) $x^3 = -x + 4$.

576. Упростите выражение:

а) $(-x^2y^2)^4\cdot(-xy)^2$;

б) $-\left(\frac{1}{3}xy^3\right)^2\cdot(-3x)^3$;

в) $(-2x^3y^2)^3\cdot(-2y^2)^3$;

г) $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^3\cdot(9ab^2)^2$;

д) $(-5a^3b)^2\cdot\left(\frac{1}{5}ab^3\right)^3$;

е) $\left(-\frac{2}{7}ab^4\right)^2\cdot\left(-3\frac{1}{2}a^3b\right)^2$;

ж) $(x^3y)^2\cdot(-5xy)^3$;

з) $\left(\frac{1}{6}x^2y^2\right)^2\cdot(-12x^3y^5)^2$.

577. Представьте выражение в виде произведения числа 3 и квадрата некоторого выражения:

а) $3m^4n^2$; б) $12x^6y^4z^2$; в) $\frac{3}{4}m^8n^4$.

578. На рисунке 81 построены графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Пользуясь графиком, сравните:

а) 0,23 и $0{,}23^2$; 0,23 и $0{,}23^3$; $0{,}23^2$ и $0{,}23^3$;

б) 1,47 и $1{,}47^2$; 1,47 и $1{,}47^3$; $1{,}47^2$ и $1{,}47^3$.

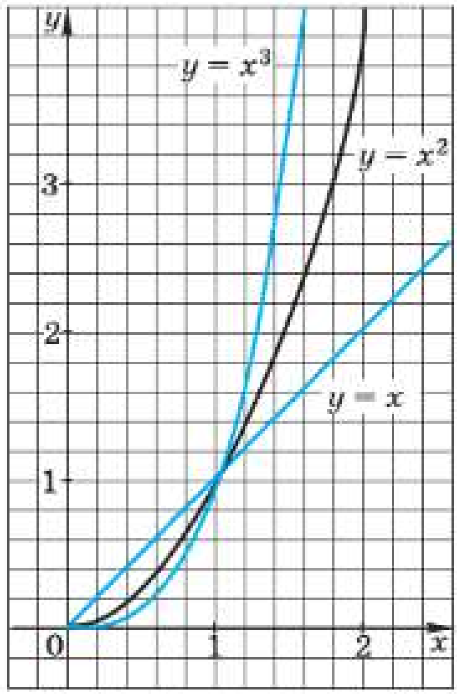


Рис. 81

579. а) Известно, что точка $P(-4; b)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = x^2$. Найдите значение b. Принадлежит ли графику этой функции точка $Q(4; b)$?

б) Известно, что точка $A(-4; a)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = x^3$. Найдите значение a. Принадлежит ли графику этой функции точка $B(-4; -a)$?

580. Точка $A(a; b)$ принадлежит графику функции:

а) $y = x^2$; б) $y = x^3$.

Принадлежат ли этому графику точки $B(-a; b)$, $C(a; -b)$, $D(-a; -b)$?

581. Расположите в порядке возрастания числа a, a^2 и a^3, если:

а) $0 < a < 1$; в) $-1 < a < 0$;
б) $a > 1$; г) $a < -1$.

582. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = 2 - x$; в) $x^3 = 6$;
б) $x^2 = 8$; г) $x^3 = -x + 4$.

Глава IV МНОГОЧЛЕНЫ

В этой главе вы познакомитесь с многочленами — одним из важнейших видов выражений с переменными. Вы научитесь выполнять сложение, вычитание и умножение многочленов, использовать эти преобразования для упрощения выражений. Вы узнаете о таких приёмах разложения многочленов на множители, как вынесение множителя за скобки и способ группировки. Изученные преобразования вы сможете широко применять при решении уравнений, доказательстве тождеств, в задачах на делимость. В этой главе значительно расширяется круг текстовых задач, решаемых с помощью уравнений. Надеемся, что вас заинтересуют задачи на смеси и сплавы, с которыми вы также будете встречаться в курсах физики и химии.

§ 8 СУММА И РАЗНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ

25. Многочлен и его стандартный вид

Выражение $4x^2y-5xy+3x-1$ представляет собой сумму одночленов $4x^2y$, $-5xy$, $3x$ и -1. Такие выражения называют *многочленами*.

Определение. Многочленом называется сумма одночленов.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами многочлена*. Так, членами многочлена $4x^2y-5xy+3x-1$ являются одночлены $4x^2y$, $-5xy$, $3x$ и -1.

Если многочлен состоит из двух членов, его называют двучленом; если из трёх членов — трёхчленом. Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.

В многочлене $5a^2b+2+4ab^2-3a^2b-7$ члены $5a^2b$ и $-3a^2b$ являются подобными слагаемыми, так как они имеют одну и ту же буквенную часть. Подобными слагаемыми являются и члены 2 и -7, не имеющие буквенной части. Подобные слагаемые в многочлене называют *подобными членами многочлена*, а приведение подобных слагаемых в многочлене — *приведением подобных членов многочлена*.

Пример 1. Приведём подобные члены в многочлене

$$5a^2b+2+4ab^2-3a^2b-7.$$

▶ Имеем

$$5a^2b+2+4ab^2-3a^2b-7=(5a^2b-3a^2b)+4ab^2+(2-7)=$$
$$=2a^2b+4ab^2-5. \triangleleft$$

Каждый член многочлена $2a^2b+4ab^2-5$ является одночленом стандартного вида, и этот многочлен не содержит подобных членов. Такие многочлены называют *многочленами стандартного вида*.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду. Для этого нужно каждый его член представить в стандартном виде и привести подобные члены.

Членами многочлена стандартного вида $8xy+6x^2y^3-9$ служат одночлены второй, пятой и нулевой степеней. Наибольшую из этих степеней называют *степенью многочлена*. Таким образом, многочлен $8xy+6x^2y^3-9$ является многочленом пятой степени.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.
Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

Пример 2. Определим степень многочлена $3a^4+8ab-2a^4-a^4+5b$.

▶ Для этого приведём его к стандартному виду:

$$3a^4+8ab-2a^4-a^4+5b=8ab+5b.$$

Степень многочлена $8ab+5b$ равна двум, поэтому степень многочлена $3a^4+8ab-2a^4-a^4+5b$ также равна двум. $\triangleleft$

Упражнения

583. Назовите каждый член многочлена:
а) $-6x^4+y^3-5y+11$; б) $25ab+ab^2-a^2b+8a-7b$.

584. Приведите подобные члены многочлена:
а) $10x-8xy-3xy$; в) $3x^4-5x+7x^2-8x^4+5x$;
б) $2ab-7ab+7a^2$; г) $2a^3+a^2-17-3a^2+a^3-a-80$.

585. Из данных многочленов выберите многочлен, тождественно равный выражению $3a^2 + b$.

1. $4a^2 - 4b - a^2 + 17b - b$ 2. $12a^2 - 9b - 9a^2 + 6b + b$
3. $-0,7a^2 - 7b - 2,3a^2 + 8b$ 4. $1,8a^2 - 4,2b + 1,2a^2 + 5b + 0,2b$

586. Представьте в стандартном виде многочлен:
а) $-8p^4 + 12p^3 + 4p^4 - 8p^2 + 3p^2$;
б) $2aa^2 + a^2 - 3a^2 + a^3 - a$;
в) $3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x$;
г) $3a \cdot 4b^2 - 0,8b \cdot 4b^2 - 2ab \cdot 3b + b \cdot 3b^2 - 1$.

587. Запишите в стандартном виде многочлен:
а) $2a^2x^3 - ax^3 - a^4 - a^2x^3 + ax^3 + 2a^4$;
б) $5x \cdot 2y^2 - 5x \cdot 3xy - x^2y + 6xy^2$.

588. Найдите значение многочлена:
а) $5x^6 - 3x^2 + 7 - 2x^6 - 3x^6 + 4x^2$ при $x = -10$;
б) $4a^2b - ab^2 - 3a^2b + ab^2 - ab + 6$ при $a = -3$, $b = 2$.

589. Найдите значение многочлена:
а) $6a^3 - a^{10} + 4a^3 + a^{10} - 8a^3 + a$ при $a = -3$;
б) $4x^6y^3 - 3x^6y^3 + 2x^2y^2 - x^6y^3 - x^2y^2 + y$ при $x = -2$, $y = -1$.

590. Найдите значение многочлена $2x^2 + 1$ при $x = 0$; -2; 3; -4. Существует ли такое значение x, при котором значение многочлена равно нулю; отрицательно?

591. Докажите, что многочлен $x^2 + y^2 + 1$ при любых значениях x и y принимает положительные значения.

592. Запишите в виде многочлена число, состоящее из:
а) a десятков и b единиц;
б) a сотен, b десятков и c единиц.

593. Расположите члены многочлена по убывающим степеням переменной:
а) $17a^4 - 8a^5 + 3a - a^3 - 1$; б) $35 - c^6 + 5c^2 - c^4$.

594. Расположите члены многочлена по возрастающим степеням переменной:
а) $x^4 - 5 - x^2 + 12x$; б) $2y + y^3 - y^2 + 1$.

595. Какова степень многочлена:
а) $4a^6 - 2a^7 + a - 1$; г) $4xy + xy^2 - 5x^2 + y$;
б) $5p^3 - p - 2$; д) $8x^4y + 5x^2y^3 - 11$;
в) $1 - 3x$; е) $xy + yz + xz - 1$?

596. Используя калькулятор, найдите значение многочлена:
а) $x^2 + 4,23$ при $x = 1,97$; б) $a^4 + 2a$ при $a = 2,3$.

597. *(Задача-исследование.)* Докажите, что всякая разность вида $\overline{abbb} - a$ делится на 37.

1) Проверьте верность этого утверждения для разности:
а) $2555 - 2$; б) $7111 - 7$; в) $8999 - 8$; г) $9666 - 9$.

2) Проведите доказательство высказанного утверждения.

П

598. Решите уравнение:

а) $0{,}3y = 70$; б) $\frac{5}{8}x = -1$; в) $\frac{1}{9}a = -\frac{3}{7}$.

599. Вычислите:

а) $\frac{5^3 \cdot 25^2}{5^8}$; б) $\frac{2^5 \cdot 8}{4^4}$; в) $\frac{4^5 \cdot 3^8}{6^9}$.

600. При каком значении аргумента функция $y = 0{,}01x$ принимает значение, равное:

а) 240; б) -100?

26. Сложение и вычитание многочленов

Сложим многочлены $5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6$ и $-3x^2 - 6xy + 8$.

Для этого составим их сумму, затем раскроем скобки и приведём в полученном многочлене подобные члены:

$$(5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6) + (-3x^2 - 6xy + 8) =$$
$$= 5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6 - 3x^2 - 6xy + 8 = 2x^2 + xy - 9y^2 + 2.$$

Вычтем из многочлена $x^3 + 5x^2 - x + 8$ многочлен $x^3 - 7x - 1$.

Для этого составим их разность, раскроем скобки и приведём в полученном многочлене подобные члены:

$$(x^3 + 5x^2 - x + 8) - (x^3 - 7x - 1) =$$
$$= x^3 + 5x^2 - x + 8 - x^3 + 7x + 1 = 5x^2 + 6x + 9.$$

Мы представили сумму многочленов $5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6$ и $-3x^2 - 6xy + 8$ в виде многочлена

$$2x^2 + xy - 9y^2 + 2,$$

а разность многочленов $x^3 + 5x^2 - x + 8$ и $x^3 - 7x - 1$ в виде многочлена

$$5x^2 + 6x + 9.$$

Вообще сумму и разность многочленов всегда можно представить в виде многочлена.

Иногда требуется решить обратную задачу — представить многочлен в виде суммы или разности многочленов. При этом пользуются правилом:

• если перед скобками ставится знак «плюс», то члены, которые заключают в скобки, записывают с теми же знаками;
• если перед скобками ставится знак «минус», то знаки членов, заключаемых в скобки, меняют на противоположные.

Например:

$$3x - 2y + b = 3x + (-2y + b),$$
$$3x - 2y + b = 3x - (2y - b).$$

Упражнения

601. а) Составьте сумму многочленов $4x^3 - 5x - 7$ и $x^3 - 8x$ и преобразуйте её в многочлен стандартного вида.
б) Составьте разность многочленов $5y^2 - 9$ и $7y^2 - y + 5$ и преобразуйте её в многочлен стандартного вида.

602. Даны два многочлена: $2a^3 - 5a + 5$ и $a^3 - 4a - 2$. Упростите:
а) сумму этих многочленов;
б) разность первого и второго многочленов;
в) разность второго и первого многочленов.

603. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:
а) $(1 + 3a) + (a^2 - 2a)$;
б) $(2x^2 + 3x) + (-x + 4)$;
в) $(y^2 - 5y) + (5y - 2y^2)$;
г) $(b^2 - b + 7) - (b^2 + b + 8)$;
д) $(8n^3 - 3n^2) - (7 + 8n^3 - 2n^2)$;
е) $(a^2 + 5a + 4) - (a^2 + 5a - 4)$.

604. Упростите выражение:
а) $5{,}2a - (4{,}5a + 4{,}8a^2)$;
б) $8x^2 + (4{,}5 - x^2) - (5{,}4x^2 - 1)$;
в) $-0{,}8b^2 + 7{,}4b + (5{,}6b - 0{,}2b^2)$;
г) $(7{,}3y - y^2 + 4) + 0{,}5y^2 - (8{,}7y - 2{,}4y^2)$.

605. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:
а) $18x^2 - (10x - 5 + 18x^2)$;
б) $-12c^2 + 5c + (c + 11c^2)$;
в) $(b^2 + b - 1) - (b^2 - b + 1)$;
г) $(15 - 7y^2) - (y^3 - y^2 - 15)$.

606. Найдите сумму и разность многочленов:
а) $a + b$ и $a - b$;
б) $a - b$ и $a + b$;
в) $-a - b$ и $a - b$;
г) $a - b$ и $b - a$.

607. Докажите, что:
а) сумма двух последовательных нечётных чисел кратна 4;
б) сумма четырёх последовательных нечётных чисел кратна 8.

608. Докажите, что выражение:
а) $(x - y) + (y - z) + (z - x)$ тождественно равно 0;
б) $(a^2 - 5ab) - (7 - 3ab) + (2ab - a^2)$ тождественно равно -7.

609. Найдите многочлен, после подстановки которого вместо M следующее равенство окажется тождеством:

а) $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$;
б) $M - (4ab - 3b^2) = a^2 - 7ab + 8b^2$;
в) $(4c^4 - 7c^2 + 6) - M = 0$.

610. Какой многочлен в сумме с многочленом $5x^2 - 3x - 9$ тождественно равен:

а) 0; б) 18; в) $2x - 3$; г) $x^2 - 5x + 6$?

611. Упростите выражение:

а) $(a^2 - 0{,}45a + 1{,}2) + (0{,}8a^2 - 1{,}2a) - (1{,}6a^2 - 2a)$;
б) $(y^2 - 1{,}75y - 3{,}2) - (0{,}3y^2 + 4) - (2y - 7{,}2)$;
в) $6xy - 2x^2 - (3xy + 4x^2 + 1) - (-xy - 2x^2 - 1)$;
г) $-(2ab^2 - ab + b) + 3ab^2 - 4b - (5ab - ab^2)$.

612. Упростите выражение:

а) $8a^2b + (-5a^2b + 4b^2) + (a^2b - 5b^2 + 2)$;
б) $(xy + x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - 2xy) - xy$.

613. Найдите значение выражения

$$(5{,}7a^2b - 3{,}1ab + 8b^3) - (6{,}9ab - 2{,}3a^2b + 8b^3),$$

если: а) $a = 2$ и $b = 5$; б) $a = -2$ и $b = 3$.

614. Вычислите значение выражения $5x^2 - (3xy - 7x^2) + (5xy - 12x^2)$, если:

а) $x = -0{,}25$ и $y = 4$; б) $x = -5$ и $y = 0{,}1$.

615. Докажите, что при любом значении x разность многочленов $0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5$ и $-0{,}3x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 8$ принимает положительное значение.

616. *(Для работы в парах.)* Учащимся была предложена задача: «Найдите значение выражения

$$(7a^3 - 6a^2b + 5ab^2) + (5a^3 + 7a^2b + 3ab^2) - (10a^3 + a^2b + 8ab^2)$$

при $a = -0{,}25$».

Один из учеников сказал, что в задаче не хватает данных. Прав ли он?

1) Обсудите друг с другом, в каком случае ученик окажется прав.
2) Выполните преобразования.
3) Сделайте вывод.

617. Какой двучлен нужно сложить с многочленом $x^2 + y^2 - 2xy + 1$, чтобы в результате получился многочлен:

а) не содержащий переменную x;
б) не содержащий переменную y?

618. Докажите, что не зависит от x значение выражения

$$\left(\frac{3}{5}x^2 - 0,4xy - 1,5y + 1\right) - \left(y^2 - \frac{2}{5}xy + 0,6x^2\right).$$

619. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
а) $1,7 - 10b^2 - (1 - 3b^2) + (2,3 + 7b^2)$;
б) $1 - b^2 - (3b - 2b^2) + (1 + 3b - b^2)$.

620. Пусть $x = 5a^2 + 6ab - b^2$, $y = -4a^2 + 2ab + 3b^2$, $z = 9a^2 + 4ab$. Подставьте эти многочлены вместо x, y и z в данное выражение и упростите его: а) $x + y + z$; б) $x - y - z$.

621. Решите уравнение:
а) $(23 + 3x) + (8x - 41) = 15$;
б) $(19 + 2x) - (5x - 11) = 25$;
в) $(3,2y - 1,8) - (5,2y + 3,4) = -5,8$;
г) $1 - (0,5x - 15,8) = 12,8 - 0,7x$;
д) $3,8 - 1,5y + (4,5y - 0,8) = 2,4y + 3$;
е) $4,2y + 0,8 = 6,2y - (1,1y + 0,8) + 1,2$.

622. Решите уравнение:
а) $8y - 3 - (5 - 2y) = 4,3$;
б) $0,5y - 1 - (2y + 4) = y$;
в) $-8x + (4 + 3x) = 10 - x$;
г) $1,3x - 2 - (3,3x + 5) = 2x + 1$.

623. Представьте выражение в виде суммы каких-нибудь двучленов:
а) $3x^3 - 2x^2 - x + 4$; б) $-5y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y$.

624. Представьте выражение каким-либо способом в виде разности одночлена и трёхчлена:
а) $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$; б) $3a^4 + 2a^3 + 5a^2 - 4$.

625. Известно, что при некоторых натуральных значениях n значение выражения $n^3 + n$ кратно 30. Будет ли кратно 30 при тех же значениях n значение выражения:
а) $n^3 + 31n$; б) $n^3 - 29n$?

626. *(Для работы в парах.)* Докажите, что сумма:
а) трёх последовательных натуральных чисел кратна 3;
б) четырёх последовательных натуральных чисел не кратна 4.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения преобразований.
3) Выскажите аналогичное предположение о сумме пяти последовательных натуральных чисел и проверьте, верно ли оно.

627. *(Задача-исследование.)* В «Арифметике» Л. Ф. Магницкого, написанной в начале XVIII в., предлагается такой способ угадывания задуманного двузначного числа:

«Если кто задумал двузначное число, то скажи ему, чтобы он увеличил число десятков в 2 раза и к произведению прибавил 5 единиц; затем полученную сумму увеличил в 5 раз и к новому произведению прибавил 10 единиц и число единиц задуманного числа, а результат произведённых действий сообщил бы тебе. Если ты из указанного результата вычтешь 35, то узнаешь задуманное число».

1) Выберите двузначное число и проверьте предложенный способ угадывания задуманного числа.
2) Предложите соседу по парте задумать двузначное число, выполнить указанные в условии задачи действия и сообщить результат.
3) Найдите число, задуманное соседом.
4) Докажите справедливость способа отгадывания задуманного двузначного числа, предложенного в учебнике Л. Ф. Магницкого.

П

628. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $(2x^2)^3\cdot\frac{1}{4}x^2$;
б) $-0{,}2a^2b^3\cdot(-5a^3b^2)^2$;
в) $(-3y^4)^3\cdot\frac{1}{9}y^5$;
г) $(-0{,}5c^4d)^3\cdot(-4c^2d^2)^2$;
д) $(-pq)^6\cdot(6p^2q)^3$;
е) $(3mn)^4\cdot(-3mn^2)^6$.

629. С помощью калькулятора найдите значение выражения x^2-y, если $x=1{,}4$, $y=0{,}157$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение многочлена.
2. На примере многочлена $5a^2x+ax^2-4ax\cdot\frac{1}{2}x$ объясните, как привести многочлен к стандартному виду.
3. Что называется степенью многочлена? Приведите пример многочлена третьей степени.
4. Составьте сумму и разность многочленов x^2-3y+6 и $-x^2+3y+1$ и преобразуйте каждое выражение в многочлен стандартного вида.
5. В многочлене $5x^2-x+4$ заключите в скобки два последних члена, поставив перед скобками:
а) знак «плюс»; б) знак «минус».

§ 9 ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И МНОГОЧЛЕНА

27. Умножение одночлена на многочлен

Умножим одночлен $9n^3$ на многочлен $7n^2 - 3n + 4$.

Для этого составим их произведение и преобразуем его, используя распределительное свойство умножения. Умножая одночлен на каждый член многочлена и складывая результаты, получим

$$9n^3(7n^2 - 3n + 4) =$$
$$= 9n^3 \cdot 7n^2 - 9n^3 \cdot 3n + 9n^3 \cdot 4 = 63n^5 - 27n^4 + 36n^3.$$

Произведение одночлена $9n^3$ и многочлена $7n^2 - 3n + 4$ мы представили в виде многочлена $63n^5 - 27n^4 + 36n^3$.

Вообще произведение одночлена и многочлена всегда можно представить в виде многочлена. При умножении одночлена на многочлен пользуются правилом:

> чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 1. Умножим одночлен $-3a^2$ на многочлен $4a^3 - a + 1$.

▶ Воспользуемся правилом умножения одночлена на многочлен:

$$-3a^2(4a^3 - a + 1) = -3a^2 \cdot 4a^3 - 3a^2 \cdot (-a) - 3a^2 \cdot 1 =$$
$$= -12a^5 + 3a^3 - 3a^2. \triangleleft$$

Заметим, что запись можно вести короче, не выписывая промежуточные результаты:

$$-3a^2(4a^3 - a + 1) = -12a^5 + 3a^3 - 3a^2.$$

Пример 2. Упростим выражение $3x^2 - 2x(x + 8)$.

$$\blacktriangleright\ 3x^2 - 2x(x + 8) = 3x^2 - 2x^2 - 16x = x^2 - 16x. \triangleleft$$

Умножение одночлена на многочлен часто применяется при решении уравнений.

Пример 3. Решим уравнение $8 - 5x(x - 7) = 1 - 5x^2$.

▶ Имеем

$$8 - 5x(x - 7) = 1 - 5x^2;$$
$$8 - 5x^2 + 35x = 1 - 5x^2;$$
$$-5x^2 + 35x + 5x^2 = 1 - 8;$$
$$35x = -7;$$
$$x = -0{,}2. \triangleleft$$

П р и м е р 4. Решим уравнение $\frac{2x-1}{9} - \frac{x+5}{6} = 2.$

▶ Умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, т. е. на число 18:

$$\left(\frac{2x-1}{9} - \frac{x+5}{6}\right) \cdot 18 = 2 \cdot 18;$$

$$\frac{2x-1}{9} \cdot 18 - \frac{x+5}{6} \cdot 18 = 36;$$

$$2(2x-1) - 3(x+5) = 36;$$

$$4x - 2 - 3x - 15 = 36;$$

$$x = 53. \triangleleft$$

Упражнения

630. Выполните умножение:

а) $2x(x^2 - 7x - 3)$;
б) $-4b^2(5b^2 - 3b - 2)$;
в) $(3a^3 - a^2 + a)(-5a^3)$;
г) $(y^2 - 2{,}4y + 6) \cdot 1{,}5y$;
д) $-0{,}5x^2(-2x^2 - 3x + 4)$;
е) $(-3y^2 + 0{,}6y)(-1{,}5y^3)$.

631. Преобразуйте произведение в многочлен:

а) $3ab(a^2 - 2ab + b^2)$;
б) $-x^2y(x^2y^2 - x^2 - y^2)$;
в) $2{,}5a^2b(4a^2 - 2ab + 0{,}2b^2)$;
г) $(-2ax^2 + 3ax - a^2)(-a^2x^2)$;
д) $(6{,}3x^3y - 3y^2 - 0{,}7x) \cdot 10x^2y^2$;
е) $-1{,}4p^2q^6(5p^3q - 1{,}5pq^2 - 2q^3)$.

632. Представьте в виде многочлена:

а) $\frac{2}{7}x(1{,}4x^2 - 3{,}5y)$;
б) $-\frac{1}{3}c^2(1{,}2d^2 - 6c)$;
в) $\frac{1}{2}ab\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{4}{5}b^2\right)$;
г) $-\frac{2}{5}a^2y^5\left(5ay^2 - \frac{1}{2}a^2y - \frac{5}{6}a^3\right)$.

633. Выполните умножение:

а) $-3x^2(-x^3 + x - 5)$;
б) $(1 + 2a - a^2) \cdot 5a$;
в) $\frac{2}{3}x^2y(15x - 0{,}9y + 6)$;
г) $3a^4x(a^2 - 2ax + x^3 - 1)$;
д) $(x^2y - xy + xy^2 + y^3) \cdot 3xy^2$;
е) $-\frac{3}{7}a^4(2{,}1b^2 - 0{,}7a + 35)$.

634. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $3(2x - 1) + 5(3 - x)$ при $x = -1{,}5$;
б) $25a - 4(3a - 1) + 7(5 - 2a)$ при $a = 11$;
в) $4y - 2(10y - 1) + (8y - 2)$ при $y = -0{,}1$;
г) $12(2 - 3p) + 35p - 9(p + 1)$ при $p = 2$.

635. Представьте в виде многочлена:

а) $14b + 1 - 6(2 - 11b)$;
б) $25(2 - 3c) + 16(5c - 1)$;
в) $14(7x - 1) - 7(14x + 1)$;
г) $36(2 - y) - 6(5 - 2y)$.

636. Упростите выражение:

а) $14y + 2y(6 - y)$;
б) $3y^2 - 2y(5 + 2y)$;
в) $4x(x - 1) - 2(2x^2 - 1)$;
г) $5a(a^2 - 3a) - 3a(a^2 - 5a)$;
д) $7b(4c - b) + 4c(c - 7b)$;
е) $-2y(x^3 - 2y) - (x^3y + 4y^2)$;
ж) $3m^2(m + 5n) - 2n(8m^2 - n)$;
з) $6m^2n^3 - n^2(6m^2n + n - 1)$.

637. Представьте в виде многочлена:

а) $6x(x - 3) - x(2 - x)$;
б) $-a^2(3a - 5) + 4a(a^2 - a)$;
в) $ax(2x - 3a) - x(ax + 5a^2)$;
г) $-4m^2(n^2 - m^2) + 3n^2(m^2 - n^2)$.

638. Найдите значение выражения:

а) $-2x(x^2 - x + 3) + x(2x^2 + x - 5)$ при $x = 3$; -3;
б) $x(x - y) - y(y^2 - x)$ при $x = 4$ и $y = 2$.

639. Вычислите значение выражения:

а) $5x(2x - 6) - 2{,}5x(4x - 2)$ при $x = -8$; 10;
б) $5a(a - 4b) - 4b(b - 5a)$ при $a = -0{,}6$ и $b = -0{,}5$.

640. Упростите выражение:

а) $(3a^2)^2 - a^3(1 - 5a)$;
б) $\left(-\frac{1}{2}b\right)^3 - b\left(1 - 2b - \frac{1}{8}b^2\right)$;
в) $x(16x - 2x^3) - (2x^2)^2$;
г) $(0{,}2c^3)^2 - 0{,}01c^4(4c^2 - 100)$.

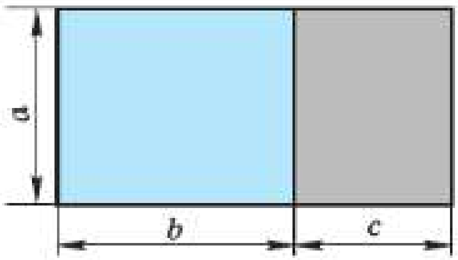


Рис. 82

641. С помощью рисунка 82 разъясните геометрический смысл формулы $a(b + c) = ab + ac$ для положительных значений a, b и c.

642. Приведите контрпример для утверждения: выражение

$$x(2x - 1) - x^2(x - 2) + (x^3 - x + 3) + 2(x - 1{,}5)$$

при любом значении x принимает положительное значение.

643. Докажите, что значение выражения

$$y(3y^2 - y + 5) - (2y^3 + 3y - 16) - y(y^2 - y + 2)$$

не зависит от y.

644. Докажите, что выражение тождественно равно нулю:

а) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$;
б) $a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a)$.

645. Докажите, что выражение $2x(x - 6) - 3(x^2 - 4x + 1)$ при любых значениях x принимает отрицательные значения.

646. Решите уравнение:

а) $5x + 3(x - 1) = 6x + 11$;
б) $3x - 5(2 - x) = 54$;
в) $8(y - 7) - 3(2y + 9) = 15$;
г) $0{,}6 - 0{,}5(y - 1) = y + 0{,}5$;
д) $6 + (2 - 4x) + 5 = 3(1 - 3x)$;
е) $0{,}5(2y - 1) - (0{,}5 - 0{,}2y) + 1 = 0$;
ж) $0{,}15(x - 4) = 9{,}9 - 0{,}3(x - 1)$;
з) $3(3x - 1) + 2 = 5(1 - 2x) - 1$.

647. Найдите корень уравнения:

а) $3x(2x-1)-6x(7+x)=90$;
б) $1{,}5x(3+2x)=3x(x+1)-30$;
в) $5x(12x-7)-4x(15x-11)=30+29x$;
г) $24x-6x(13x-9)=-13-13x(6x-1)$.

648. Решите уравнение:

а) $3(-2x+1)-2(x+13)=7x-4(1-x)$;
б) $-4(5-2a)+3(a-4)=6(2-a)-5a$;
в) $3y(4y-1)-2y(6y-5)=9y-8(3+y)$;
г) $15x+6x(2-3x)=9x(5-2x)-36$.

649. При каком значении переменной:

а) значение выражения $2(3-5c)$ на 1 меньше значения выражения $4(1-c)$;
б) значение выражения $-3(2x+1)$ на 20 больше значения выражения $8x+5$;
в) значение выражения $5x+7$ в 3 раза меньше значения выражения $61-10x$;
г) значение выражения $8-y$ в 2 раза больше значения выражения $7+y$?

650. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=14$; г) $2z+3=\frac{2z}{5}$; ж) $\frac{4a}{9}+1=\frac{5a}{12}$;

б) $\frac{a}{2}-\frac{a}{8}=5$; д) $\frac{2c}{3}-\frac{4c}{5}=7$; з) $\frac{5m}{12}-\frac{m}{8}=\frac{1}{3}$;

в) $\frac{y}{4}=y-1$; е) $\frac{5x}{9}+\frac{x}{3}+4=0$; и) $\frac{3n}{14}+\frac{n}{2}=\frac{2}{7}$.

651. Найдите корень уравнения:

а) $\frac{6x-5}{7}=\frac{2x-1}{3}+2$; г) $\frac{4y-11}{15}+\frac{13-7y}{20}=2$;

б) $\frac{5-x}{2}+\frac{3x-1}{5}=4$; д) $\frac{5-6y}{3}+\frac{y}{8}=0$;

в) $\frac{5x-7}{12}-\frac{x-5}{8}=5$; е) $\frac{y}{4}-\frac{3-2y}{5}=0$.

652. Решите уравнение:

а) $\frac{3x+5}{5}-\frac{x+1}{3}=1$; в) $\frac{6y-1}{15}-\frac{y}{5}=\frac{2y}{3}$;

б) $\frac{2p-1}{6}-\frac{p+1}{3}=p$; г) $\frac{12-x}{4}-\frac{2-x}{3}=\frac{x}{6}$.

653. Найдите корень уравнения:

а) $1-\frac{x-3}{2}=\frac{2-x}{3}+4$; в) $\frac{2m+1}{4}+3=\frac{m}{6}-\frac{6-m}{12}$;

б) $\frac{a+13}{10}-\frac{2a}{5}=\frac{3-a}{15}+\frac{a}{2}$; г) $\frac{x+1}{9}-\frac{x-1}{6}=2-\frac{x+3}{2}$.

654. Решите уравнение:

а) $\frac{6y+7}{4}+\frac{8-5y}{3}=5$;   г) $\frac{2c-1}{9}+\frac{c}{4}=\frac{c+3}{6}$;

б) $\frac{5a-1}{3}=\frac{2a-3}{5}-1$;   д) $\frac{3p-1}{24}-\frac{2p+6}{36}-1=0$;

в) $\frac{11x-4}{7}-\frac{x-9}{2}=5$;   е) $5-\frac{1-2x}{4}=\frac{3x+20}{6}+\frac{x}{3}$.

655. Периметр треугольника 44 см. Одна из его сторон на 4 см меньше другой и в 2 раза больше третьей стороны. Найдите стороны треугольника.

656. Фирма арендует три помещения общей площадью 166 м^2. Площадь одного из них в полтора раза больше площади другого и на 6 м^2 меньше площади третьего. Найдите площадь каждого помещения.

657. *Старинная задача.* Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась $\frac{1}{4}$ этой суммы, на долю второго — $\frac{1}{7}$, а на долю третьего — 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

658. В первом сарае было сложено сена в 3 раза больше, чем во втором. После того как из первого сарая взяли 2 т, а во второй добавили 2 т сена, во втором сарае оказалось $\frac{5}{7}$ того, что осталось в первом сарае. Сколько тонн сена было в каждом сарае?

659. Скашивая ежедневно по 60 га вместо 50 га, бригада сумела скосить луг на один день быстрее, чем планировалось. Какова площадь луга?

660. Увеличив среднюю скорость с 250 до 300 м/мин, спортсменка стала пробегать дистанцию на 1 мин быстрее. Какова длина дистанции?

661. От турбазы до привала туристы шли со скоростью 4,5 км/ч, а возвращались на турбазу со скоростью 4 км/ч, затратив на обратный путь на 15 мин больше. На каком расстоянии от турбазы был сделан привал?

662. Из пункта A выехал велосипедист. Одновременно вслед за ним из пункта B, отстоящего от пункта A на расстояние 60 км, выехал мотоциклист. Велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а мотоциклист — со скоростью 30 км/ч. На каком расстоянии от пункта A мотоциклист догонит велосипедиста?

663. Из пункта A вышла грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч вслед за ней из пункта A вышла легковая машина со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от пункта A легковая машина догонит грузовую?

664. В 190 г водного раствора соли добавили 10 г соли. В результате концентрация раствора повысилась на 4,5%. Сколько соли было в растворе первоначально?

665. В сплав олова и меди массой 16 кг добавили 2 кг олова. После этого содержание олова в сплаве повысилось на 5%. Сколько олова было в сплаве первоначально?

П

666. Найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = 5x + 29$ и $y = -3x - 11$; б) $y = 1{,}2x$ и $y = 1{,}8x + 9{,}3$.

667. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = -28x$; в) $y = 0{,}05x$;
б) $y = -28x + 4$; г) $y = 0{,}05x - 2{,}5$?

668. Решите графически уравнение $x^2 = 6 - x$.

669. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{3}a^5y^3\right)^2 \cdot (-ay)^3$; б) $-0{,}1a^4b^7 \cdot (-30a^2b)^2$.

28. Вынесение общего множителя за скобки

При решении уравнений, в вычислениях и ряде других задач бывает полезно заменить многочлен произведением нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены). Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов называют *разложением многочлена на множители*.

Рассмотрим многочлен $6a^2b + 15b^2$. Каждый его член можно записать в виде произведения двух множителей, один из которых равен $3b$:

$$6a^2b + 15b^2 = 3b \cdot 2a^2 + 3b \cdot 5b.$$

Полученное выражение на основе распределительного свойства умножения можно представить в виде произведения двух множителей. Один из них — общий множитель $3b$, а другой — сумма $2a^2$ и $5b$:

$$3b \cdot 2a^2 + 3b \cdot 5b = 3b(2a^2 + 5b).$$

Итак,

$$6a^2b + 15b^2 = 3b(2a^2 + 5b).$$

Мы разложили многочлен на множители, представив его в виде произведения одночлена $3b$ и многочлена $2a^2 + 5b$. Применённый способ разложения многочлена на множители называют *вынесением общего множителя за скобки*.

Рассмотрим примеры разложения многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$-15x^2y^3-30x^3y^2+45x^4y.$$

▶ Члены этого многочлена имеют различные общие множители: x, y, $3xy$, $-5x^2$ и др. Обычно в многочлене с целыми коэффициентами множитель, выносимый за скобки, выбирают так, чтобы члены многочлена, оставшегося в скобках, не содержали общего буквенного множителя, а модули их коэффициентов не имели общих натуральных делителей, кроме 1.

В многочлене $-15x^2y^3-30x^3y^2+45x^4y$ модули коэффициентов — числа 15, 30 и 45. Их наибольший общий делитель равен 15. Поэтому в качестве коэффициента общего множителя можно взять число 15 или −15. Все члены многочлена содержат переменные x и y. Переменная x входит в них во второй, третьей и четвёртой степенях, поэтому за скобки можно вынести x^2. Переменная y содержится в членах многочлена в третьей, второй и первой степенях, поэтому за скобки можно вынести y. Итак, за скобки целесообразно вынести одночлен $15x^2y$ или $-15x^2y$. Вынесем, например, за скобки $-15x^2y$. Получим

$$-15x^2y^3-30x^3y^2+45x^4y=-15x^2y(y^2+2xy-3x^2).$$ ◁

Пример 2. Разложим на множители выражение

$$3a^2(b-2c)+7(b-2c).$$

▶ В этой сумме каждое слагаемое содержит множитель $b-2c$. Вынесем этот множитель за скобки:

$$3a^2(b-2c)+7(b-2c)=(b-2c)(3a^2+7).$$ ◁

Пример 3. Представим в виде произведения сумму

$$a(x-y)+b(y-x).$$

▶ Множители $x-y$ и $y-x$ отличаются друг от друга лишь знаком. Вынесем в выражении $y-x$ за скобки −1, получим

$$a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)+b(-1)(x-y)=$$
$$=a(x-y)-b(x-y)=(x-y)(a-b).$$

Запись можно вести короче:

$$a(x-y)+b(y-x)=$$
$$=a(x-y)-b(x-y)=(x-y)(a-b).$$ ◁

Заметим, что преобразование $b(y-x)=-b(x-y)$ можно объяснить иначе: если изменить знак у второго множителя и перед произведением, то значение выражения не изменится.

Пример 4. Решим уравнение $2x^2 + 3x = 0$.

▶ В выражении $2x^2 + 3x$ вынесем за скобки множитель x. Получим

$$x(2x + 3) = 0.$$

Поскольку оба множителя в левой части полученного уравнения имеют смысл при любых значениях x, то произведение $x(2x + 3)$ равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из этих множителей, т. е. когда

$$x = 0 \text{ или } 2x + 3 = 0.$$

Решая уравнение $2x + 3 = 0$, находим $2x = -3$, $x = -1{,}5$. Следовательно, произведение $x(2x + 3)$ обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = -1{,}5$, т. е. уравнение $2x^2 + 3x = 0$ имеет два корня: 0 и $-1{,}5$.

Запись можно вести короче:

$$2x^2 + 3x = 0,$$
$$x(2x + 3) = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } 2x + 3 = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } x = -1{,}5.$$

Ответ: 0 и $-1{,}5$. ◁

Пример 5. Докажем, что сумма $3^9 + 3^7 + 3^6$ делится на 31.

▶ Вынесем в выражении $3^9 + 3^7 + 3^6$ за скобки 3^6:

$$3^9 + 3^7 + 3^6 = 3^6(3^3 + 3 + 1) = 3^6(27 + 3 + 1) = 3^6 \cdot 31.$$

Мы представили сумму $3^9 + 3^7 + 3^6$ в виде произведения двух целых чисел, одно из которых равно 31. Значит, данная сумма делится на 31. ◁

Упражнения

670. Разложите на множители и сделайте проверку:

а) $mx + my$; б) $kx - px$; в) $-ab + ac$; г) $-ma - na$.

671. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $5x + 5y$; б) $4a - 4b$; в) $3c + 15d$; г) $-6m - 9n$; д) $ax + ay$; е) $bc - bd$; ж) $ab + a$; з) $cy - c$; и) $-ma - a$.

672. Представьте в виде произведения:

а) $7a + 7y$; б) $-8b + 8c$; в) $12x + 48y$; г) $-9m - 27n$; д) $12a + 12$; е) $-10 - 10c$.

673. Разложите на множители:

а) $7ax + 7bx$; б) $3by - 6b$; в) $-5mn + 5n$; г) $3a + 9ab$; д) $5y^2 - 15y$; е) $3x + 6x^2$; ж) $a^2 - ab$; з) $8mn - 4m^2$; и) $-6ab + 9b^2$; к) $x^2y - xy^2$; л) $ab - a^2b$; м) $-p^2q^2 - pq$.

674. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $a^2 + a$; г) $a^3 - a^7$; ж) $4c^2 - 12c^4$;
б) $x^3 - x^2$; д) $3m^2 + 9m^3$; з) $5x^5 - 15x^3$;
в) $c^5 + c^7$; е) $9p^3 - 8p$; и) $-12y^4 - 16y$.

675. Представьте в виде произведения:

а) $14x + 21y$; г) $9xa + 9xb$; ж) $m^4 - m^2$;
б) $15a + 10b$; д) $6ab - 3a$; з) $c^3 + c^4$;
в) $8ab - 6ac$; е) $4x - 12x^2$; и) $7x - 14x^3$.

676. Найдите значение выражения:

а) $3{,}28x - x^2$ при $x = 2{,}28$;
б) $a^2y + a^3$ при $a = -1{,}5$ и $y = -8{,}5$;
в) $ay^2 - y^3$ при $a = 8{,}8$ и $y = -1{,}2$;
г) $-mb - m^2$ при $m = 3{,}48$ и $b = 96{,}52$.

677. Решите уравнение:

а) $x^2 + 8x = 0$; г) $3x^2 - 1{,}2x = 0$; ж) $x - 10x^2 = 0$;
б) $5x^2 - x = 0$; д) $6x^2 - 0{,}5x = 0$; з) $6x - 0{,}2x^2 = 0$;
в) $6y^2 - 30y = 0$; е) $\frac{1}{4}y^2 + y = 0$; и) $y^2 + \frac{2}{3}y = 0$.

678. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 + 3x = 0$; в) $6x^2 - 3{,}6x = 0$; д) $5x^2 - 0{,}8x = 0$;
б) $x^2 - 11x = 0$; г) $0{,}3x^2 - 3x = 0$; е) $7x^2 - 0{,}28x = 0$.

679. *(Для работы в парах.)* Докажите, что значение выражения:

а) $16^5 + 16^4$ кратно 17; в) $36^5 - 6^9$ кратно 30;
б) $38^9 - 38^8$ кратно 37; г) $5^{18} - 25^8$ кратно 120.

1) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.
3) Предложите друг другу составить задание, аналогичное заданию б).

680. Разложите на множители:

а) $x^5 + x^4 - x^3$; в) $a^4 + a^5 - a^8$;
б) $y^7 - y^5 - y^2$; г) $-b^{10} - b^{15} - b^{20}$.

681. *(Для работы в парах.)* Докажите, что:

а) $7^8 - 7^7 + 7^6$ делится на 43;
б) $2^{13} - 2^{10} - 2^9$ делится на 13;
в) $27^4 - 9^5 + 3^9$ делится на 25;
г) $16^4 - 2^{13} - 4^5$ делится на 110.

1) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.
3) Обсудите, какие свойства делимости использованы при выполнении задания.

682. Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 - 3x^2 + x$; в) $4a^5 - 2a^3 + a$; д) $15a^3 - 9a^2 + 6a$;
б) $m^2 - 2m^3 - m^4$; г) $6x^2 - 4x^3 + 10x^4$; е) $-3m^2 - 6m^3 + 12m^5$.

683. Представьте в виде произведения:

а) $c^3 - c^4 + 2c^5$; в) $4x^4 + 8x^3 - 2x^2$;
б) $5m^4 - m^3 + 2m^2$; г) $5a - 5a^2 - 10a^4$.

684. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $3a^3 - 15a^2b + 5ab^2$; г) $12a^2b - 18ab^2 - 30ab^3$;
б) $20x^4 - 25x^2y^2 - 10x^3$; д) $4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x$;
в) $-6am^2 + 9m^3 - 12m^4$; е) $-3x^4y^2 - 6x^2y^2 + 9x^2y^4$.

685. Разложите на множители многочлен:

а) $4c^4 - 6x^2c^2 + 8c$; в) $3ax - 6ax^2 - 9a^2x$;
б) $10a^2x - 15a^3 - 20a^4x$; г) $8a^4b^3 - 12a^2b^4 + 16a^3b^2$.

686. Укажите общий множитель для всех слагаемых суммы и вынесите его за скобки:

а) $2a(x + y) + b(x + y)$; г) $9(p - 1) + (p - 1)^2$;
б) $y(a - b) - (a - b)$; д) $(a + 3)^2 - a(a + 3)$;
в) $(c + 3) - x(c + 3)$; е) $-3b(b - 2) + 7(b - 2)^2$.

687. Представьте выражение в виде произведения двух многочленов:

а) $a(b - c) + d(c - b)$; г) $(x - y)^2 - a(y - x)$;
б) $x(y - 5) - y(5 - y)$; д) $3(a - 2)^2 - (2 - a)$;
в) $3a(2x - 7) + 5b(7 - 2x)$; е) $2(3 - b) + 5(b - 3)^2$.

688. Разложите на множители:

а) $8m(a - 3) + n(a - 3)$; г) $7(c + 2) + (c + 2)^2$;
б) $(p^2 - 5) - q(p^2 - 5)$; д) $(a - b)^2 - 3(b - a)$;
в) $x(y - 9) + y(9 - y)$; е) $-(x + 2y) - 4(x + 2y)^2$.

П

689. Велосипедист проехал путь AB со скоростью 12 км/ч. Возвращаясь из B в A, он развил скорость 18 км/ч и затратил на обратный путь на 15 мин меньше, чем на путь из A в B. Сколько километров между A и B?

690. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x - 5}{2} + \dfrac{8x - 12}{7} = 9$; б) $\dfrac{21 - 4x}{9} - \dfrac{8x + 15}{3} = 2$.

691. Известно, что значение выражения $a - b$ при некоторых значениях a и b равно 0,5. Чему равно при тех же a и b значение выражения:

а) $b - a$; б) $\dfrac{1}{b - a}$; в) $(a - b)^2$; г) $(b - a)^2$; д) $(a - b)^3$; е) $(b - a)^3$?

692. Запишите в виде выражения:

а) произведение разности a и b и их суммы;
б) сумму квадратов a и b;
в) квадрат суммы a и b;
г) разность квадратов b и c;
д) куб разности b и c;
е) сумму кубов b и c.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило умножения одночлена на многочлен.
2. Преобразуйте в многочлен произведение: ab и $a + 4b$; xy и $x^2 + xy + y^2$.
3. Какое преобразование называют разложением многочлена на множители?
4. Объясните, как выполняется разложение многочлена $2xy - 6x^2$ на множители вынесением общего множителя за скобки.

§ 10 ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

29. Умножение многочлена на многочлен

Умножим многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$. Составим произведение этих многочленов:

$$(a + b)(c + d).$$

Обозначим двучлен $a + b$ буквой x и преобразуем полученное произведение по правилу умножения одночлена на многочлен:

$$(a + b)(c + d) = x(c + d) = xc + xd.$$

В выражение $xc + xd$ подставим вместо x многочлен $a + b$ и снова воспользуемся правилом умножения одночлена на многочлен:

$$xc + xd = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Итак,

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Произведение многочленов $a + b$ и $c + d$ мы представили в виде многочлена $ac + bc + ad + bd$. Этот многочлен является суммой всех одночленов, получающихся при умножении каждого члена многочлена $a + b$ на каждый член многочлена $c + d$.

Произведение любых двух многочленов можно представить в виде многочлена.

При умножении многочлена на многочлен пользуются правилом:

чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

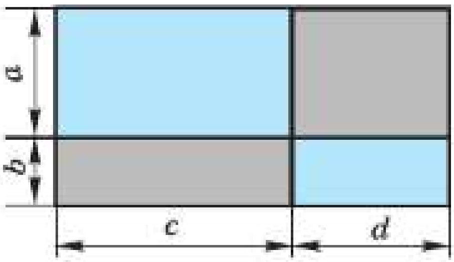


Рис. 83

Заметим, что при умножении многочлена, содержащего m членов, на многочлен, содержащий n членов, в произведении (до приведения подобных членов) должно получиться mn членов. Этим можно пользоваться для контроля.

В древности справедливость некоторых равенств при положительных значениях переменных математики доказывали геометрически. Так, древнегреческий математик Евклид в своём трактате «Начала» (III в. до н. э.) справедливость равенства $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$ доказывал с помощью чертежа, изображённого на рисунке 83.

П р и м е р 1. Умножим многочлен $4x^2 + 2xy - y^2$ на многочлен $2x - y$.

▶ Имеем

$$(4x^2 + 2xy - y^2)(2x - y) =$$
$$= 8x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - 4x^2y - 2xy^2 + y^3 = 8x^3 - 4xy^2 + y^3. \triangleleft$$

П р и м е р 2. Упростим выражение $(2a - 3)(5 - a) - 3a(4 - a)$.

▶ Имеем

$$(2a - 3)(5 - a) - 3a(4 - a) = 10a - 15 - 2a^2 + 3a - (12a - 3a^2) =$$
$$= 13a - 15 - 2a^2 - 12a + 3a^2 = a^2 + a - 15. \triangleleft$$

П р и м е р 3. Докажем, что при любом натуральном n значение выражения $n(n - 5) - (n - 14)(n + 2)$ кратно 7.

▶ Выполним преобразование:

$$n(n - 5) - (n - 14)(n + 2) = n^2 - 5n - (n^2 - 14n + 2n - 28) =$$
$$= n^2 - 5n - n^2 + 14n - 2n + 28 = 7n + 28 = 7(n + 4).$$

При любом натуральном n произведение $7(n + 4)$ делится на 7, а значит, и значение выражения $n(n - 5) - (n - 14)(n + 2)$ делится на 7. ◁

П р и м е р 4. Докажем, что равенство

$$(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

является тождеством, или, как говорят иначе, докажем тождество.

▶ Преобразуем обе части равенства:

$$(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=$$
$$=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4=a^4-b^4;$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=$$
$$=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3-a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4=a^4-b^4.$$

Так как левая и правая части равенства тождественно равны одному и тому же выражению, то они тождественно равны между собой. Значит, исходное равенство — тождество. ◁

Иногда, для того чтобы доказать тождество, преобразуют левую часть равенства в правую или правую в левую.

Упражнения

693. Выполните умножение:
а) $(x+m)(y+n)$; в) $(a-x)(b-y)$; д) $(b-3)(a-2)$;
б) $(a-b)(x+y)$; г) $(x+8)(y-1)$; е) $(-a+y)(-1-y)$.

694. Упростите выражение:
а) $(x+6)(x+5)$; в) $(2-y)(y-8)$; д) $(2y-1)(3y+2)$;
б) $(a-4)(a+1)$; г) $(a-4)(2a+1)$; е) $(5x-3)(4-3x)$.

695. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(m-n)(x+c)$; в) $(a+3)(a-2)$; д) $(1-2a)(3a+1)$;
б) $(k-p)(k-n)$; г) $(5-x)(4-x)$; е) $(6m-3)(2-5m)$.

696. Запишите в виде многочлена выражение:
а) $(x^2+y)(x+y^2)$; г) $(5x^2-4x)(x+1)$;
б) $(m^2-n)(m^2+2n^2)$; д) $(a-2)(4a^3-3a^2)$;
в) $(4a^2+b^2)(3a^2-b^2)$; е) $(7p^2-2p)(8p-5)$.

697. Выполните умножение:
а) $(2x^2-y)(x^2+y)$; в) $(11y^2-9)(3y-2)$;
б) $(7x^2+a^2)(x^2-3a^2)$; г) $(5a-3a^3)(4a-1)$.

698. Замените степень произведением, а затем произведение преобразуйте в многочлен:
а) $(x+10)^2$; б) $(1-y)^2$; в) $(3a-1)^2$; г) $(5-6b)^2$.

699. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(x^2+xy-y^2)(x+y)$; д) $(a^2-2a+3)(a-4)$;
б) $(n^2-np+p^2)(n-p)$; е) $(5x-2)(x^2-x-1)$;
в) $(a+x)(a^2-ax-x^2)$; ж) $(2-2x+x^2)(x+5)$;
г) $(b-c)(b^2-bc-c^2)$; з) $(3y-4)(y^2-y+1)$.

700. Запишите в виде многочлена:

а) $(c^2 - cd - d^2)(c + d)$; в) $(4a^2 + a + 3)(a - 1)$;
б) $(x - y)(x^2 - xy - y^2)$; г) $(3 - x)(3x^2 + x - 4)$.

701. Представьте в виде многочлена:

а) $y^2(y + 5)(y - 3)$; в) $-3b^3(b + 2)(1 - b)$;
б) $2a^2(a - 1)(3 - a)$; г) $-0{,}5c^2(2c - 3)(4 - c^2)$.

702. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$; б) $(a - 1)(a - 4)(a + 5)$.

703. Упростите выражение:

а) $(3b - 2)(5 - 2b) + 6b^2$; г) $5b^3 + (a^2 + 5b)(ab - b^2)$;
б) $(7y - 4)(2y + 3) - 13y$; д) $(a - b)(a + 2) - (a + b)(a - 2)$;
в) $x^3 - (x^2 - 3x)(x + 3)$; е) $(x + y)(x - y) - (x - 1)(x - 2)$.

704. Верно ли утверждение:

а) чтобы найти значение выражения $(3a - 2b)(2a - 3b) - 6a(a - b) + 7ab$, надо знать только значение переменной a;
б) чтобы найти значение выражения $(3a - 2b)(2a - 3b) - 6a(a - b) + 7ab$, надо знать только значение переменной b;
в) значение выражения $(3a - 2b)(2a - 3b) - 6a(a - b) + 7ab$ не зависит от значений переменных?

705. Зная, что $a = 3x - 1$, $b = x + 1$, $c = 2x + 4$, $d = 6x - 5$, представьте в виде многочлена с переменной x выражение $ac - bd$.

706. Докажите, что при любом значении x:

а) значение выражения $(x - 3)(x + 7) - (x + 5)(x - 1)$ равно -16;
б) значение выражения $x^4 - (x^2 - 7)(x^2 + 7)$ равно 49.

707. Докажите тождество:

а) $(c - 8)(c + 3) = c^2 - 5c - 24$;
б) $m^2 + 3m - 28 = (m - 4)(m + 7)$.

708. Докажите тождество:

а) $(x - 3)(x + 7) - 13 = (x + 8)(x - 4) - 2$;
б) $16 - (a + 3)(a + 2) = 4 - (6 + a)(a - 1)$.

709. Докажите, что значение выражения не зависит от переменной x:

а) $(x - 5)(x + 8) - (x + 4)(x - 1)$; б) $x^4 - (x^2 - 1)(x^2 + 1)$.

710. Докажите, что выражение $(y - 6)(y + 8) - 2(y - 25)$ при любом значении y принимает положительное значение.

711. Докажите, что при всех целых n значение выражения:

а) $n(n - 1) - (n + 3)(n + 2)$ делится на 6;
б) $n(n + 2) - (n - 7)(n - 5)$ делится на 7.

712. Пусть a, b, c и d — четыре последовательных нечётных числа. Докажите, что разность $cd - ab$ кратна 16.

713. Решите уравнение:
а) $(3x - 1)(5x + 4) - 15x^2 = 17$;
б) $(1 - 2x)(1 - 3x) = (6x - 1)x - 1$;
в) $12 - x(x - 3) = (6 - x)(x + 2)$;
г) $(x + 4)(x + 1) = x - (x - 2)(2 - x)$.

714. Найдите корень уравнения:
а) $5 + x^2 = (x + 1)(x + 6)$;
б) $2x(x - 8) = (x + 1)(2x - 3)$;
в) $(3x - 2)(x + 4) - 3(x + 5)(x - 1) = 0$;
г) $x^2 + x(6 - 2x) = (x - 1)(2 - x) - 2$.

715. Докажите, что:
а) при любом натуральном значении n значение выражения $n(n + 5) - (n - 3)(n + 2)$ кратно 6;
б) при любом натуральном значении n, большем 2, значение выражения $(n - 1)(n + 1) - (n - 7)(n - 5)$ кратно 12.

716. Найдите три последовательных натуральных числа, если известно, что квадрат меньшего из них на 65 меньше произведения двух остальных.

717. Три последовательных нечётных числа таковы, что если из произведения двух бо́льших чисел вычесть произведение двух меньших, то получится 76. Найдите эти числа.

718. Периметр прямоугольника равен 70 см. Если его длину уменьшить на 5 см, а ширину увеличить на 5 см, то площадь увеличится на 50 см^2. Найдите длину и ширину первоначального прямоугольника.

719. Сторона квадрата на 3 см меньше одной из сторон прямоугольника и на 2 см больше другой его стороны. Найдите сторону квадрата, если известно, что площадь квадрата на 30 см^2 меньше площади прямоугольника.

П

720. Для выполнения планового задания к определённому сроку бригада рабочих должна была изготовлять ежедневно 54 детали. Перевыполняя план на 6 деталей в день, бригада уже за один день до срока не только выполнила плановое задание, но и изготовила 18 деталей сверх плана. Сколько дней работала бригада?

721. Тракторная бригада должна была по плану вспахивать ежедневно 112 га. Перевыполняя план на 8 га в день, бригада уже за день до срока закончила пахоту. Сколько гектаров нужно было вспахать бригаде?

722. Решите уравнение:

а) $\frac{x-2}{5}=\frac{2}{3}-\frac{3x-2}{6}$; б) $\frac{2x-5}{4}-1=\frac{x+1}{3}$.

723. Прочитайте выражение:

а) a^2+b^2; б) $(a+b)^2$; в) a^3-b^3; г) $(a-b)^3$.

30. Разложение многочлена на множители способом группировки

Мы познакомились с разложением многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки. Иногда удаётся разложить многочлен на множители, используя другой способ — группировку его членов.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $ab-2b+3a-6$.

▶ Сгруппируем его члены так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель:

$$ab-2b+3a-6=(ab-2b)+(3a-6).$$

В первой группе вынесем за скобки множитель b, а во второй — множитель 3:

$$(ab-2b)+(3a-6)=b(a-2)+3(a-2).$$

Каждое слагаемое получившегося выражения имеет множитель $a-2$. Вынесем этот общий множитель за скобки:

$$b(a-2)+3(a-2)=(a-2)(b+3).$$

Итак, $ab-2b+3a-6=(a-2)(b+3)$.

Разложение многочлена $ab-2b+3a-6$ на множители можно выполнить, группируя его члены иначе:

$$ab-2b+3a-6=(ab+3a)+(-2b-6)=$$
$$=a(b+3)-2(b+3)=(b+3)(a-2). \triangleleft$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен $ac+bd-bc-ad$.

▶ Сгруппируем первый член многочлена с третьим и второй с четвёртым. В первой группе вынесем за скобки множитель c, а во второй — множитель $-d$. Получим

$$ac+bd-bc-ad=(ac-bc)+(bd-ad)=$$
$$=c(a-b)-d(a-b)=(a-b)(c-d). \triangleleft$$

П р и м е р 3. Разложим на множители трёхчлен $a^2 - 7a + 12$.

▶ Представим $-7a$ в виде $-3a - 4a$ и выполним группировку:

$$a^2 - 7a + 12 = a^2 - 3a - 4a + 12 = (a^2 - 3a) + (-4a + 12) =$$
$$= a(a - 3) - 4(a - 3) = (a - 3)(a - 4). \triangleleft$$

Способ, который мы применили в примерах 1—3 для разложения многочленов на множители, называют *способом группировки*.

Упражнения

724. Представьте в виде произведения многочленов выражение:
а) $x(b + c) + 3b + 3c$;
б) $y(a - c) + 5a - 5c$;
в) $p(c - d) + c - d$;
г) $a(p - q) + q - p$.

725. Разложите на множители многочлен:
а) $mx + my + 6x + 6y$;
б) $9x + ay + 9y + ax$;
в) $7a - 7b + an - bn$;
г) $ax + ay - x - y$;
д) $1 - bx - x + b$;
е) $xy + 2y - 2x - 4$.

726. Разложите на множители многочлен:
а) $ab - 8a - bx + 8x$;
б) $ax - b + bx - a$;
в) $ax - by + bx - ay$;
г) $ax - 3bx + ay - 3by$.

727. Разложите на множители многочлен:
а) $x^3 + x^2 + x + 1$;
б) $y^5 - y^3 - y^2 + 1$;
в) $a^4 + 2a^3 - a - 2$;
г) $b^6 - 3b^4 - 2b^2 + 6$;
д) $a^2 - ab - 8a + 8b$;
е) $ab - 3b + b^2 - 3a$;
ж) $11x - xy + 11y - x^2$;
з) $kn - mn - n^2 + mk$.

728. Представьте в виде произведения многочлен:
а) $mn - mk + xk - xn$;
б) $x^2 + 7x - ax - 7a$;
в) $3m - mk + 3k - k^2$;
г) $xk - xy - x^2 + yk$.

729. Найдите значение выражения:
а) $p^2q^2 + pq - q^3 - p^3$ при $p = 0{,}5$ и $q = -0{,}5$;
б) $3x^3 - 2y^3 - 6x^2y^2 + xy$ при $x = \frac{2}{3}$ и $y = \frac{1}{2}$.

730. Чему равно значение выражения:
а) $2a + ac^2 - a^2c - 2c$ при $a = 1\frac{1}{3}$ и $c = -1\frac{2}{3}$;
б) $x^2y - y + xy^2 - x$ при $x = 4$ и $y = 0{,}25$?

731. Докажите тождество:
а) $ax - y + x - ay = (x - y)(a + 1)$;
б) $ax - 2by + ay - 2bx = (a - 2b)(x + y)$.

732. Представьте в виде произведения:

а) $ac^2 - ad + c^3 - cd - bc^2 + bd$;
б) $ax^2 + ay^2 - bx^2 - by^2 + b - a$;
в) $an^2 + cn^2 - ap + ap^2 - cp + cp^2$;
г) $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$.

733. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2y + x + xy^2 + y + 2xy + 2$; б) $x^2 - xy + x - xy^2 + y^3 - y^2$.

734. Разложите на множители трёхчлен:

а) $x^2 + 6x + 5$; б) $x^2 - x - 6$; в) $a^2 - 5a + 4$; г) $a^2 - 6a - 16$.

П

735. Число коров в стаде возросло на 60 голов, а в связи с улучшением кормовой базы удой молока от одной коровы возрос в среднем с 12,8 л в день до 15 л. Сколько коров стало в стаде, если ежедневно стали получать на 1340 л молока больше, чем раньше?

736. Решите уравнение:

а) $4 - x(x + 8) = 11 - x^2$; б) $4x(3x - 1) - 2x(6x + 8) = 5$.

737. Запишите в виде выражения:

а) квадрат разности x и y;
б) сумму числа 3 и произведения a и b;
в) разность числа 7 и удвоенного произведения a и b.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен.
2. Представьте в виде многочлена произведение многочленов $x - 2y$ и $xy + 4$.
3. На примере многочлена $ab - 2b + 5a - 10$ объясните, как выполняется разложение многочлена на множители способом группировки.

Для тех, кто хочет знать больше

31. Деление с остатком

Вам неоднократно приходилось встречаться со случаями, когда при делении одного натурального числа на другое получается остаток, причём этот остаток всегда меньше делителя. Например, при делении числа 143 на 7 в частном получается 20 и в остатке 3:

$$143 : 7 = 20 \text{ (ост. 3)},$$

где остаток 3 меньше делителя.

Также верно равенство $143 = 7 \cdot 20 + 3$.

Если из 143 вычесть 3, то полученная разность будет делиться на 7:

$$143 - 3 = 7 \cdot 20.$$

В том случае, когда одно натуральное число делится на другое без остатка, условились считать, что остаток равен нулю.

Вообще число r называется остатком от деления натурального числа a на натуральное число b, если выполняются два условия: $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

Определение остатка, принятое для натуральных чисел, переносится на случай, когда делимое является целым числом, а делитель — натуральным числом.

Целое число r называют остатком от деления целого числа a на натуральное число b, если разность $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

Обозначив частное от деления $a - r$ на b буквой q, получим, что

$$a - r = bq.$$

Отсюда

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < b.$$

Например:

$$-13 = 5 \cdot (-3) + 2, \text{ причём } 0 \leqslant 2 < 5.$$

Частное от деления числа -13 на 5 равно -3, а остаток равен 2.

При решении задач широкое применение находит следующее утверждение:

для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться, обратившись к координатной прямой. Пусть на координатной прямой отмечены числа, кратные b (рис. 84). Они разбивают координатную прямую на отрезки, концами которых являются точки с координатами bq и $b(q+1)$, где q — целое число. Длина каждого из этих отрезков равна b. Произвольное число a изображается точкой, которая либо совпадает с левым концом отрезка, ограниченного точками с координатами bq и $b(q+1)$, либо находится внутри этого отрезка. В первом случае $a = bq$, т. е. $a = bq + 0$, а во втором $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$. Таким образом, в любом случае найдётся единственная пара целых чисел q и r такая, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

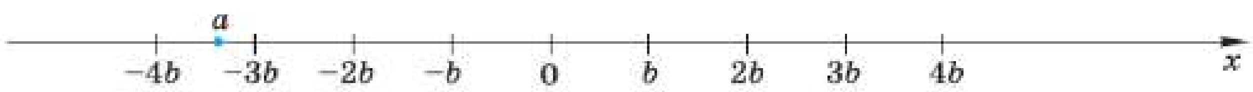


Рис. 84

На делении с остатком основаны различные разбиения множества целых чисел на классы, т. е. на подмножества, не имеющие общих элементов.

Например, при делении числа на 3 могут получиться остатки 0, 1 и 2. Соответственно множество целых чисел можно разбить на три класса:

множество чисел вида $3k$,
множество чисел вида $3k+1$,
множество чисел вида $3k+2$,

где k — целое число.

Аналогично, исходя из остатков от деления целого числа на 5, множество целых чисел можно разбить на пять классов:

множество чисел вида $5k$,
множество чисел вида $5k+1$,
множество чисел вида $5k+2$,
множество чисел вида $5k+3$,
множество чисел вида $5k+4$,

где k — целое число.

Пример. Докажем, что если целые числа a и b дают при делении на 3 одинаковые остатки, не равные нулю, то число $ab-1$ делится на 3.

▶ По условию числа a и b дают при делении на 3 одинаковые остатки, не равные нулю. Значит, либо $a=3k+1$ и $b=3p+1$, либо $a=3k+2$ и $b=3p+2$, где k и p — целые числа.

В первом из этих случаев имеем

$$ab-1=(3k+1)(3p+1)-1=9kp+3p+3k+1-1=$$
$$=9kp+3p+3k=3(3kp+p+k).$$

Во втором случае имеем

$$ab-1=(3k+2)(3p+2)-1=9kp+6p+6k+4-1=$$
$$=9kp+6p+6k+3=3(3kp+2p+2k+1).$$

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев число $ab-1$ делится на 3. ◁

Упражнения

738. Найдите частное и остаток от деления:
а) 138 на 7; б) -16 на 3; в) -4 на 5.

739. Найдите наибольшее целое отрицательное число, которое при делении на 11 даёт остаток 1.

740. Укажите все целые числа a, которые при делении на 7 дают остаток 3, если $-12<a<12$.

741. Укажите наибольшее число воскресений в году.

742. При делении целого числа m на 35 в остатке получили 15. Делится ли число m на 5; на 7?

743. При делении натурального числа a на натуральное число b в частном получили c и в остатке d. Могут ли все числа a, b, c и d быть нечётными?

744. Докажите, что если целые числа a и b при делении на 3 дают разные остатки (не равные нулю), то число $ab + 1$ делится на 3.

745. Верно ли, что при любых целых значениях a и b произведение $ab(a + b)(a - b)$ делится на 3?

746. При делении целого числа a на 12 получается остаток 5. Какой остаток получится при делении этого числа на 4?

747. Одно из двух целых чисел при делении на 9 даёт остаток 7, а другое даёт остаток 5. Какой остаток получится при делении на 9 их произведения?

748. Найдите целое число, которое как при делении на 5, так и при делении на 7 даёт остаток 1, причём первое частное на 4 больше второго.

749. Докажите, что произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 6 при любом натуральном n.

Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 8

750. Найдутся ли такие целые значения x, при которых значение многочлена:

а) $2x^2 + 6x + 3$ окажется чётным числом;
б) $x^2 + x + 2$ окажется нечётным числом?

751. Расположите члены многочлена $3ax^2 - 6a^3x + 8a^2 - x^3$:

а) по возрастающим степеням переменной x;
б) по убывающим степеням переменной a.

752. Представьте в виде многочлена:

а) $(-2x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 7) - (4x^2 + 2x + 8)$;
б) $(3a^2 - a + 2) + (-3a^2 + 3a - 1) - (a^2 - 1)$;
в) $2a - 3b + c - (4a + 7b + c + 3)$;
г) $2xy - y^2 + (y^2 - xy) - (x^2 + xy)$.

753. Упростите выражение:

а) $(1 - x + 4x^2 - 8x^3) + (2x^3 + x^2 - 6x - 3) - (5x^3 + 8x^2)$;
б) $(0{,}5a - 0{,}6b + 5{,}5) - (-0{,}5a + 0{,}4b) + (1{,}3b - 4{,}5)$.

754. Докажите, что выражение $A+B-C$ тождественно равно выражению $C-B-A$, если $A=2x-1$, $B=3x+1$ и $C=5x$.

755. Какой многочлен нужно вычесть из многочлена y^2-5y+1, чтобы разность была тождественно равна:

а) 0; б) 5; в) y^2; г) $4y^2-y+7$?

756. Докажите, что при любом значении x разность многочленов $1\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{8}x^3-1\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{5}{7}$ и $0{,}75x^4-0{,}125x^3-2{,}25x^2+0{,}4x-\frac{3}{7}$ принимает положительное значение.

757. Докажите, что при любом значении a сумма многочленов

$$1{,}6a^5-1\frac{1}{3}a^4-3{,}4a^3-a^2-1 \text{ и } -1\frac{3}{5}a^5-\frac{2}{3}a^4+3\frac{2}{5}a^3$$

принимает отрицательное значение.

758. Запись $\overline{abc}$ означает число, в котором a сотен, b десятков и c единиц. Это число можно представить в виде многочлена

$$\overline{abc}=100a+10b+c.$$

Например, $845=100\cdot 8+10\cdot 4+5$.
Представьте в виде многочлена число:

а) $\overline{xy}$; б) $\overline{yx}$; в) $\overline{a0b}$; г) $\overline{abcd}$.

759. Представьте в виде многочлена и упростите получившуюся сумму или разность:

а) $\overline{abc}+\overline{cba}$; б) $\overline{abc}+\overline{bc}$; в) $\overline{abc}-\overline{ba}$; г) $\overline{abc}-\overline{ac}$.

760. Докажите, что:

а) сумма чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ кратна сумме a и b;

б) разность чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ кратна 9.

761. Решите уравнение:

а) $(4-2x)+(5x-3)=(x-2)-(x+3)$;
б) $5-3y-(4-2y)=y-8-(y-1)$;

в) $7-1\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}a-5\frac{1}{2}\right)=2a+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)$;

г) $-3{,}6-(1{,}5x+1)=-4x-0{,}8-(0{,}4x-2)$.

762. Найдите четыре числа, пропорциональные числам 2, 4, 5 и 6, если разность между суммой двух последних и суммой двух первых чисел равна 4,8.

763. Если к задуманному числу приписать справа нуль и результат вычесть из числа 143, то получится утроенное задуманное число. Какое число было задумано?

764. Если к данному числу приписать справа цифру 9 и к полученному числу прибавить удвоенное данное число, то сумма будет равна 633. Найдите данное число.

765. К трёхзначному числу слева приписали цифру 5 и из полученного четырёхзначного числа вычли 3032. Получилась разность, которая больше трёхзначного числа в 9 раз. Найдите это трёхзначное число.

766. Трёхзначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру переставить на первое место, то число увеличится на 324. Найдите это трёхзначное число.

К параграфу 9

767. Преобразуйте произведение в многочлен:

а) $(x^4 + 7x^2y^2 - 5y^4)(-0,2xy^2)$;

б) $\left(b^7 - \frac{1}{2}b^5c + \frac{2}{3}b^3c^3 - \frac{2}{5}c^5\right)(-30bc^3)$;

в) $\left(\frac{1}{3}a^5b - ab + \frac{1}{7}\right)(-21a^2b^2)$;

г) $(0,5x^7y^{12} - 6xy - 1)\left(-\frac{1}{6}xy\right)$.

768. Упростите выражение:

а) $5(4x^2 - 2x + 1) - 2(10x^2 - 6x - 1)$;
б) $7(2y^2 - 5y - 3) - 4(3y^2 - 9y - 5)$;
в) $a(3b - 1) - b(a - 3) - 2(ab - a + b)$;
г) $x^2(4 - y^2) + y^2(x^2 - 7) - 4x(x - 3)$.

769. Докажите, что при любых значениях переменной значение выражения:

а) $3(x^2 - x + 1) - 0,5x(4x - 6)$ является положительным числом;

б) $y(2 + y - y^3) - \frac{2}{3}(6 + 3y + 1,5y^2)$ является отрицательным числом.

770. Решите уравнение:

а) $5\left(y + \frac{2}{3}\right) - 3 = 4\left(3y - \frac{1}{2}\right)$;

б) $7(2y - 2) - 2(3y - 3,5) = 9$;
в) $21,5(4x - 1) + 8(12,5 - 9x) = 82$;
г) $12,5(3x - 1) + 132,4 = (2,8 - 4x) \cdot 0,5$;

д) $\frac{3x + 6}{2} - \frac{7x - 14}{3} - \frac{x + 1}{9} = 0$;

е) $\frac{1 - 6x}{2} - \frac{2x + 19}{12} = \frac{23 - 2x}{3}$.

771. Два сосуда были наполнены растворами соли, причём во втором сосуде содержалось на 2 кг больше раствора, чем в первом. Концентрация соли в первом растворе составляла 10%, а во втором — 30%. После того как растворы слили в третий сосуд, получили новый раствор, концентрация соли в котором оказалась равной 25%. Сколько раствора было в первом сосуде первоначально?

772. В первую бригаду привезли раствора цемента на 50 кг меньше, чем во вторую. Каждый час работы первая бригада расходовала 150 кг раствора, а вторая — 200 кг. Через 3 ч работы в первой бригаде осталось раствора в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько раствора привезли в каждую бригаду?

773. Расстояние между пристанями M и N равно 162 км. От пристани M отошёл теплоход со скоростью 45 км/ч. Через 45 мин от пристани N навстречу ему отошёл другой теплоход, скорость которого 36 км/ч. Через сколько часов после отправления первого теплохода они встретятся?

774. От пристани A отошёл теплоход со скоростью 40 км/ч. Через $1\frac{1}{4}$ ч вслед за ним отошёл другой теплоход со скоростью 60 км/ч. Через сколько часов после своего отправления и на каком расстоянии от A второй теплоход догонит первый?

775. Из города A в город B одновременно отправляются два автобуса. Скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого. Через $3\frac{1}{2}$ ч один автобус пришёл в B, а другой находился от B на расстоянии, равном $\frac{1}{6}$ расстояния между A и B. Найдите скорости автобусов и расстояние от A до B.

776. Из A в B одновременно выехали два мотоциклиста. Скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого. Мотоциклист, который первым прибыл в B, сразу же отправился обратно. Другого мотоциклиста он встретил через 2 ч 24 мин после выезда из A. Расстояние между A и B равно 120 км. Найдите скорости мотоциклистов и расстояние от места встречи до B.

777. За 4 ч катер проходит по течению расстояние, в 2,4 раза большее, чем за 2 ч против течения. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 1,5 км/ч?

778. За 6 ч катер проходит по течению на 20 км меньше, чем за 10 ч против течения. Какова скорость течения, если скорость катера в стоячей воде 15 км/ч?

779. Кооператив наметил изготовить партию мужских сорочек за 8 дней. Выпуская в день на 10 сорочек больше, чем предполагалось, он выполнил план за один день до срока. Сколько сорочек в день должен был выпускать кооператив?

780. На элеватор поступило 1400 т пшеницы двух сортов. При обработке пшеницы одного сорта оказалось 2% отходов, а другого сорта — 3% отходов. Чистой пшеницы получилось 1364 т. Сколько пшеницы каждого сорта поступило на элеватор?

781. Бригада предполагала убирать 80 га пшеницы в день, чтобы закончить работу в намеченный ею срок. Фактически в день она убирала на 10 га больше, и поэтому за один день до срока ей осталось убрать 30 га. Сколько гектаров пшеницы должна была убрать бригада?

782. В водный раствор соли массой 480 г добавили 20 г соли. В результате концентрация раствора повысилась на 3,75%. Сколько соли было в растворе первоначально?

783. Разложите на множители:
а) $a^{20} - a^{10} + a^5$; в) $a^{10} - a^8 - a^6$;
б) $b^{60} + b^{40} - b^{20}$; г) $b^{40} + b^{20} + b^{10}$.

784. Докажите, что:
а) $7^{16} + 7^{14}$ делится на 50;
б) $5^{31} - 5^{29}$ делится на 100;
в) $25^9 + 5^{17}$ делится на 30;
г) $27^{10} - 9^{14}$ делится на 24;
д) $12^{13} - 12^{12} + 12^{11}$ делится на 7 и на 19;
е) $11^9 - 11^8 + 11^7$ делится на 3 и на 37.

785. Разложите на множители:
а) $(a - 3b)(a + 2b) + 5a(a + 2b)$;
б) $(x + 8y)(2x - 5b) - 8y(2x - 5b)$;
в) $7a^2(a - x) + (6a^2 - ax)(x - a)$;
г) $11b^2(3b - y) - (6y - 3b^2)(y - 3b)$.

786. Найдите значение выражения:
а) $5cx + c^2$ при $x = 0{,}17$, $c = 1{,}15$;
б) $4a^2 - ab$ при $a = 1{,}47$, $b = 5{,}78$.

787. Решите уравнение:
а) $1{,}2x^2 + x = 0$; в) $0{,}5x^2 - x = 0$; д) $1{,}6x^2 = 3x$;
б) $1{,}6x + x^2 = 0$; г) $5x^2 = x$; е) $x = x^2$.

788. Вынесите за скобки числовой множитель:
а) $(3a + 6)^2$; в) $(7x + 7y)^2$; д) $(5q - 30)^3$;
б) $(12b - 4)^2$; г) $(-3p + 6)^3$; е) $(2a - 8)^4$.

789. Докажите, что значение выражения $a^2 - a$ кратно 2 при любом целом a.

790. Докажите, что если к целому числу прибавить его квадрат, то полученная сумма будет чётным числом.

791. Докажите, что разность чисел $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$, где $a \neq 0$, $c \neq 0$, кратна 11.

792. Докажите, что:
а) сумма трёх последовательных степеней числа 2 с натуральными показателями делится на 14;
б) сумма двух последовательных степеней числа 5 с натуральными показателями делится на 30.

К параграфу 10

793. Докажите, что выражение тождественно равно некоторому двучлену:
а) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$; в) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$;
б) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$; г) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.

794. Упростите:
а) $(a^2-7)(a+2)-(2a-1)(a-14)$;
б) $(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^3-3b)$;
в) $2x^2-(x-2y)(2x+y)$;
г) $(m-3n)(m+2n)-m(m-n)$;
д) $(a-2b)(b+4a)-7b(a+b)$;
е) $(p-q)(p+3q)-(p^2+3q^2)$.

795. Докажите, что выражение $(y+8)(y-7)-4(0{,}25y-16)$ при любом значении y принимает положительные значения.

796. Докажите, что значение выражения:
а) $(3^5-3^4)(3^3+3^2)$ делится на 24;
б) $(2^{10}+2^8)(2^5-2^3)$ делится на 60;
в) $(16^3-8^3)(4^3+2^3)$ делится на 63;
г) $(125^2+25^2)(5^2-1)$ делится на 39.

797. Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменных:
а) $126y^3+(x-5y)(x^2+25y^2+5xy)$ при $x=-3$, $y=-2$;
б) $m^3+n^3-(m^2-2mn-n^2)(m-n)$ при $m=-3$, $n=4$.

798. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
а) $(a-3)(a^2-8a+5)-(a-8)(a^2-3a+5)$;
б) $(x^2-3x+2)(2x+5)-(2x^2+7x+17)(x-4)$;
в) $(b^2+4b-5)(b-2)+(3-b)(b^2+5b+2)$.

799. Докажите, что:
а) сумма пяти последовательных натуральных чисел кратна 5;
б) сумма четырёх последовательных нечётных чисел кратна 8.

800. Найдите четыре последовательных натуральных числа, если известно, что произведение первых двух из этих чисел на 38 меньше произведения двух следующих.

801. Докажите, что:

а) произведение двух средних из четырёх последовательных целых чисел на 2 больше произведения крайних чисел;
б) квадрат среднего из трёх последовательных нечётных чисел на 4 больше произведения двух крайних чисел.

802. Сторона квадрата на 2 см больше одной из сторон прямоугольника и на 5 см меньше другой. Найдите площадь квадрата, если известно, что она на 50 см^2 меньше площади прямоугольника.

803. Если длину прямоугольника уменьшить на 4 см, а ширину увеличить на 5 см, то получится квадрат, площадь которого больше площади прямоугольника на 40 см^2. Найдите площадь прямоугольника.

804. Периметр прямоугольника равен 36 м. Если его длину увеличить на 1 м, а ширину увеличить на 2 м, то его площадь увеличится на 30 м^2. Определите площадь первоначального прямоугольника.

805. Периметр прямоугольника равен 30 см. Если его длину уменьшить на 3 см, а ширину увеличить на 5 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 8 см^2. Найдите площадь первоначального прямоугольника.

806. Найдите значение выражения:

а) $a^2 + ab - 7a - 7b$ при $a = 6{,}6,\ b = 0{,}4$;
б) $x^2 - xy - 4x + 4y$ при $x = 0{,}5,\ y = 2{,}5$;
в) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$ при $a = 4,\ x = -3$;
г) $xb - xc + 3c - 3b$ при $x = 2,\ b = 12{,}5,\ c = 8{,}3$;
д) $ay - ax - 2x + 2y$ при $a = -2,\ x = 9{,}1,\ y = -6{,}4$;
е) $3ax - 4by - 4ay + 3bx$ при $a = 3,\ b = -13,\ x = -1,\ y = -2$.

807. Разложите на множители многочлен:

а) $a^3 - 2a^2 + 2a - 4$;
б) $x^3 - 12 + 6x^2 - 2x$;
в) $c^4 - 2c^2 + c^3 - 2c$;
г) $-y^6 - y^5 + y^4 + y^3$;
д) $a^2b - b^2c + a^2c - bc^2$;
е) $2x^3 + xy^2 - 2x^2y - y^3$;
ж) $16ab^2 - 10c^3 + 32ac^2 - 5b^2c$;
з) $6a^3 - 21a^2b + 2ab^2 - 7b^3$.

808. Представьте в виде произведения:

а) $ma - mb + na - nb + pa - pb$;
б) $ax - bx - cx + ay - by - cy$;
в) $x^2 + ax^2 - y - ay + cx^2 - cy$;
г) $ax^2 + 2y - bx^2 + ay + 2x^2 - by$.

809. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - 10x + 24$;
б) $x^2 - 13x + 40$;
в) $x^2 + 8x + 7$;
г) $x^2 + 15x + 54$;
д) $x^2 + x - 12$;
е) $x^2 - 2x - 35$.

810. Докажите, что:
а) $a(x + 6) + x(x - 3a) = 9$ при $x = 2a - 3$;
б) $x(x - 3a) + a(a + x) + 4 = 13$ при $x = a + 3$.

811. Докажите тождество:
а) $(y^4 + y^3)(y^2 - y) = y^4(y + 1)(y - 1)$;
б) $(a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) = a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$;
в) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$;
г) $(c^4 - c^2 + 1)(c^4 + c^2 + 1) = c^8 + c^4 + 1$.

812. При каком значении a произведение

$$(x^3 + 4x^2 - 17x + 41)(x + a)$$

тождественно равно многочлену, не содержащему x^3?

813. Докажите, что если $b + c = 10$, то

$$(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc.$$

Воспользовавшись этой формулой, вычислите:
а) $23 \cdot 27$; б) $42 \cdot 48$; в) $59 \cdot 51$; г) $84 \cdot 86$.

814. Докажите, что:
а) если $ab + c^2 = 0$, то $(a + c)(b + c) + (a - c)(b - c) = 0$;
б) если $a + b = 9$, то $(a + 1)(b + 1) - (a - 1)(b - 1) = 18$.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Глава V ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

В этой главе вы узнаете об интересных тождествах, с помощью которых проще выполнять преобразования различных выражений. Эти тождества получили специальное название — формулы сокращённого умножения. Они широко используются для представления целого выражения в виде многочлена и разложения многочленов на множители. В старших классах вы научитесь применять их в преобразованиях более сложных выражений. Завершает главу параграф, в котором находят применение все изученные правила преобразования выражений. Вы научитесь приводить многочлен с одной переменной к виду, удобному для нахождения его значения с помощью калькулятора.

§ 11 КВАДРАТ СУММЫ И КВАДРАТ РАЗНОСТИ

32. Возведение в квадрат и в куб суммы и разности двух выражений

При умножении многочлена на многочлен каждый член одного многочлена умножают на каждый член другого. Однако в некоторых случаях умножение многочленов можно выполнить короче, воспользовавшись *формулами сокращённого умножения*.

Возведём в квадрат сумму $a+b$. Для этого представим выражение $(a+b)^2$ в виде произведения $(a+b)(a+b)$ и выполним умножение:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2.$$

Значит,

$$\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.} \qquad (1)$$

Тождество (1) называют *формулой квадрата суммы*. Эта формула позволяет проще выполнять возведение в квадрат суммы любых двух выражений:

> квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

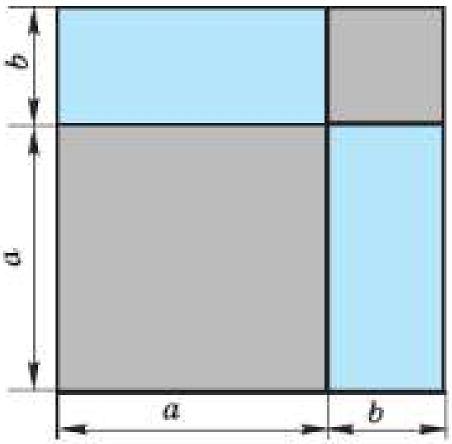


Рис. 85

В «Началах» Евклида справедливость равенства

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

при положительных значениях a и b доказана геометрически с помощью чертежа, приведённого на рисунке 85.

Возведём в квадрат разность $a - b$, получим

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \\ = a^2 - 2ab + b^2.$$

Значит,

$$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.} \qquad (2)$$

Тождество (2) называют *формулой квадрата разности*. Она позволяет проще возводить в квадрат разность любых двух выражений:

> квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Заметим, что тождество (2) можно получить из тождества (1), если представить разность $a - b$ в виде суммы $a + (-b)$:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приведём примеры применения формул квадрата суммы и квадрата разности.

Пример 1. Возведём в квадрат сумму $8x + 3$.

▶ По формуле квадрата суммы получим

$$(8x+3)^2 = (8x)^2 + 2 \cdot 8x \cdot 3 + 3^2 = 64x^2 + 48x + 9. \triangleleft$$

Пример 2. Возведём в квадрат разность $10x - y$.

▶ Воспользовавшись тождеством (2), получим

$$(10x-y)^2 = (10x)^2 - 2 \cdot 10x \cdot y + y^2 = 100x^2 - 20xy + y^2. \triangleleft$$

Пример 3. Представим в виде многочлена выражение $(-5a-4)^2$.

▶ Выражение $(-5a-4)^2$ тождественно равно выражению $(5a+4)^2$. Действительно, при любом a значениями выражений $-5a-4$ и $5a+4$ являются противоположные числа, а квадраты противоположных чисел равны. Получаем

$$(-5a-4)^2=(5a+4)^2=25a^2+40a+16. \triangleleft$$

Пример 4. Упростим выражение $2x(3+8x)-(4x-0{,}5)^2$.

▶ $2x(3+8x)-(4x-0{,}5)^2=6x+16x^2-(16x^2-4x+0{,}25)=$
$=6x+16x^2-16x^2+4x-0{,}25=10x-0{,}25. \triangleleft$

Зная формулы квадрата суммы и квадрата разности, нетрудно вывести формулы куба суммы и куба разности. Имеем

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.} \qquad (3)$$

Тождество (3) называют *формулой куба суммы*.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

Аналогично можно получить, что

$$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.} \qquad (4)$$

Тождество (4) называют *формулой куба разности*.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

Заметим, что тождество (4) можно получить из тождества (3), если разность $a-b$ представить в виде суммы $a+(-b)$.

Пример 5. Возведём в куб сумму $2x+3$.

▶ Имеем

$$(2x+3)^3=(2x)^3+3(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2+3^3=$$
$$=8x^3+36x^2+54x+27. \triangleleft$$

П р и м е р 6. Возведём в куб разность $3x - 5$.

▶ Имеем

$$(3x-5)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 3x \cdot 5^2 - 5^3 =$$
$$= 27x^3 - 135x^2 + 225x - 125. \triangleleft$$

Упражнения

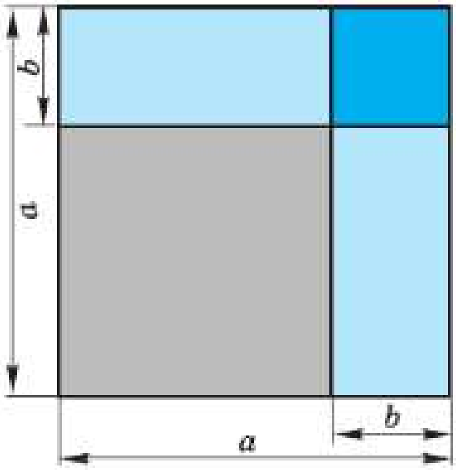


Рис. 86

815. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(x+y)^2$; е) $(9-y)^2$;
б) $(p-q)^2$; ж) $(a+12)^2$;
в) $(b+3)^2$; з) $(15-x)^2$;
г) $(10-c)^2$; и) $(b-0{,}5)^2$;
д) $(y-9)^2$; к) $(0{,}3-m)^2$.

816. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(m+n)^2$; д) $(a-25)^2$;
б) $(c-d)^2$; е) $(40+b)^2$;
в) $(x+9)^2$; ж) $(0{,}2-x)^2$;
г) $(8-a)^2$; з) $(k-0{,}5)^2$.

817. С помощью рисунка 86 разъясните геометрический смысл формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для положительных a и b, удовлетворяющих условию $a > b$.

818. Проверьте, что равенство

$$n^2 + (n+2)^2 + (n+9)^2 = (n-1)^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 + 10$$

верно при $n = 3$. Покажите, что это равенство верно при любом n.

819. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(2x+3)^2$; г) $(5y-4x)^2$; ж) $(0{,}3x-0{,}5a)^2$;
б) $(7y-6)^2$; д) $\left(5a+\frac{1}{5}b\right)^2$; з) $(10c+0{,}1y)^2$;
в) $(10+8k)^2$; е) $\left(\frac{1}{4}m-2n\right)^2$; и) $(0{,}1b-10a)^2$.

820. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(7-8b)^2$; в) $\left(\frac{1}{3}x-3y\right)^2$; д) $(0{,}1m+5n)^2$;
б) $(0{,}6+2x)^2$; г) $\left(4a+\frac{1}{8}b\right)^2$; е) $(12a-0{,}3c)^2$.

821. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(-x+5)^2$; б) $(-z-2)^2$; в) $(-n+4)^2$; г) $(-m-10)^2$.

822. Из выражений $(y-x)^2$, $(y+x)^2$, $(-y+x)^2$, $(-x+y)^2$, $(-x-y)^2$ выберите те, которые тождественно равны выражению:

а) $(x+y)^2$; б) $(x-y)^2$.

823. Докажите тождество:

а) $(a-b)^2=(b-a)^2$; б) $(-a-b)^2=(a+b)^2$.

824. Представьте в виде многочлена квадрат двучлена:

а) $(-9a+4b)^2$; в) $(-0{,}8x-0{,}5b)^2$; д) $(0{,}08a-50b)^2$;

б) $(-11x-7y)^2$; г) $\left(-1\frac{1}{3}p+6q\right)^2$; е) $(-0{,}5x-60y)^2$.

825. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(-3a+10b)^2$; в) $(8x-0{,}3y)^2$; д) $(-0{,}2p-10q)^2$;

б) $(-6m-n)^2$; г) $\left(5a+\frac{1}{15}b\right)^2$; е) $(0{,}8x-0{,}1y)^2$.

826. Используя формулу квадрата суммы или формулу квадрата разности, вычислите:

а) $(100+1)^2$; в) 61^2; д) 999^2; ж) $9{,}9^2$;

б) $(100-1)^2$; г) 199^2; е) 702^2; з) $10{,}2^2$.

827. Выполните возведение в квадрат:

а) $(x^2-5)^2$; б) $(7-y^3)^2$; в) $(2a+b^4)^2$; г) $(-3p+q^3)^2$.

828. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(a^2-3a)^2$; в) $(c^2-0{,}7c^3)^2$; д) $\left(1\frac{1}{2}a^5+8a^2\right)^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}x^3+6x\right)^2$; г) $(4y^3-0{,}5y^2)^2$; е) $(0{,}6b-60b^2)^2$.

829. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(a^2-2b)^2$; б) $(x^3+3y^4)^2$; в) $(7a^6+12a)^2$; г) $(15x-x^3)^2$.

830. Замените знак $*$ одночленом так, чтобы получившееся равенство было тождеством:

а) $(*+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$; г) $(*-9c)^2=36a^4-108a^2c+81c^2$;

б) $(3x+*)^2=9x^2+6ax+a^2$; д) $(5y+*)^2=25y^2+4x^3y+0{,}16x^6$;

в) $(*-2m)^2=100-40m+4m^2$; е) $(3a+2{,}5b)^2=9a^2+6{,}25b^2+*$.

831. Упростите выражение:

а) $(12a-1)^2-1$; в) $121-(11-9x)^2$; д) $b^2+49-(b-7)^2$;

б) $(2a+6b)^2-24ab$; г) $a^2b^2-(ab-7)^2$; е) $a^4-81-(a^2+9)^2$.

832. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $18a + (a - 9)^2$;
б) $(5x - 1)^2 - 25x^2$;
в) $4x^2 - (2x - 3)^2$;
г) $(a + 2b)^2 - 4b^2$.

833. Упростите выражение:

а) $(x - 3)^2 + x(x + 9)$;
б) $(2a + 5)^2 - 5(4a + 5)$;
в) $9b(b - 1) - (3b + 2)^2$;
г) $(b - 4)^2 + (b - 1)(2 - b)$;
д) $(a + 3)(5 - a) - (a - 1)^2$;
е) $(5 + 2y)(y - 3) - (5 - 2y)^2$.

834. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$ при $x = 0,97$;
б) $(2x + 9)^2 - x(4x + 31)$ при $x = -16,2$;
в) $(2x + 0,5)^2 - (2x - 0,5)^2$ при $x = -3,5$;
г) $(0,1x - 8)^2 + (0,1x + 8)^2$ при $x = -10$.

835. Решите уравнение:

а) $(x - 6)^2 - x(x + 8) = 2$;
б) $9x(x + 6) - (3x + 1)^2 = 1$;
в) $y(y - 1) - (y - 5)^2 = 2$;
г) $16y(2 - y) + (4y - 5)^2 = 0$.

836. Найдите корень уравнения:

а) $(x - 5)^2 - x^2 = 3$;
б) $(2y + 1)^2 - 4y^2 = 5$;
в) $9x^2 - 1 - (3x - 2)^2 = 0$;
г) $x + (5x + 2)^2 = 25(1 + x^2)$.

837. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $7(4a - 1)^2$;
б) $-3(5y - x)^2$;
в) $-10\left(\frac{1}{2}b + 2\right)^2$;
г) $3(a - 1)^2 + 8a$;
д) $9c^2 - 4 + 6(c - 2)^2$;
е) $10ab - 4(2a - b)^2 + 6b^2$.

838. Преобразуйте в многочлен выражение:

а) $5(3a + 7)^2$;
б) $-6(4 - b)^2$;
в) $-3(2 - x)^2 - 10x$;
г) $12a^2 - 4(1 - 2a)^2 + 8$.

839. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $a(a + 9b)^2$;
б) $6x(x^2 + 5x)^2$;
в) $(a + 2)(a - 1)^2$;
г) $(x - 4)(x + 2)^2$.

840. Докажите тождество:

а) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
б) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;
в) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$;
г) $(a + b)^2 - 2b(a + b) = a^2 - b^2$.

841. Докажите тождество Диофанта (III в.):

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

842. При каком значении x:

а) квадрат двучлена $x + 1$ на 120 больше квадрата двучлена $x - 3$;

б) квадрат двучлена $2x + 10$ в 4 раза больше квадрата двучлена $x - 5$?

843. Пользуясь формулой куба суммы, преобразуйте в многочлен выражение: а) $(a + 2)^3$; б) $(2x + y)^3$; в) $(a + 3b)^3$.

844. Пользуясь формулой куба разности, преобразуйте в многочлен выражение: а) $(b - 4)^3$; б) $(1 - 2c)^3$; в) $(2a - 3)^3$.

845. Упростите выражение:

а) $(x + 3)^3 - (x - 3)^3$; б) $(a - 2b)^3 + 6ab(a - 2b)$.

846. Запишите в виде выражения:

а) разность квадратов $2m$ и $7n$;

б) квадрат разности x и $8y$;

в) утроенное произведение $6a$ и b^2;

г) произведение суммы a и b и их разности.

847. Разложите на множители многочлен $a^3 + 2a + a^2 + 2$.

848. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 1020 км, отправились одновременно навстречу друг другу два поезда, причём скорость одного была на 10 км/ч больше скорости другого. Через 5 ч поезда, ещё не встретившись, находились на расстоянии 170 км друг от друга. Найдите скорости поездов.

33. Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

Формулы квадрата суммы и квадрата разности находят применение не только для возведения в квадрат суммы и разности, но и для разложения на множители выражений вида $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$.

Действительно, поменяв местами в этих формулах левую и правую части, получим

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Приведённые равенства показывают, что трёхчлен $a^2 + 2ab + b^2$ можно представить в виде произведения $(a + b)(a + b)$, а трёхчлен $a^2 - 2ab + b^2$ можно представить в виде произведения $(a - b)(a - b)$.

Пример 1. Представим трёхчлен $9x^2 + 30x + 25$ в виде квадрата двучлена.

▶ Первое слагаемое представляет собой квадрат выражения $3x$, третье — квадрат числа 5. Так как второе слагаемое равно удвоенному произведению $3x$ и 5, то этот трёхчлен можно представить в виде квадрата суммы $3x$ и 5:

$$9x^2 + 30x + 25 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = (3x + 5)^2. \triangleleft$$

Пример 2. Разложим на множители трёхчлен $a^2 - 20ab^2 + 100b^4$.

▶Здесь можно применить формулу квадрата разности:

$$a^2 - 20ab^2 + 100b^4 =$$
$$= a^2 - 2 \cdot a \cdot 10b^2 + (10b^2)^2 = (a - 10b^2)^2 = (a - 10b^2)(a - 10b^2). \triangleleft$$

Упражнения

849. Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:

а) $x^2 + 2xy + y^2$; в) $a^2 + 12a + 36$; д) $1 - 2z + z^2$;
б) $p^2 - 2pq + q^2$; г) $64 + 16b + b^2$; е) $n^2 + 4n + 4$.

850. Представьте трёхчлен в виде произведения двух одинаковых множителей:

а) $4x^2 + 12x + 9$; г) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 - 2mn$;
б) $25b^2 + 10b + 1$; д) $10xy + 0{,}25x^2 + 100y^2$;
в) $9x^2 - 24xy + 16y^2$; е) $9a^2 - ab + \frac{1}{36}b^2$.

851. Преобразуйте трёхчлен в квадрат двучлена:

а) $81a^2 - 18ab + b^2$; в) $8ab + b^2 + 16a^2$; д) $b^2 + 4a^2 - 4ab$;
б) $1 + y^2 - 2y$; г) $100x^2 + y^2 + 20xy$; е) $28xy + 49x^2 + 4y^2$.

852. Поставьте вместо знака * такой одночлен, чтобы трёхчлен можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $* + 56a + 49$; в) $25a^2 + * + \frac{1}{4}b^2$;
б) $36 - 12x + *$; г) $0{,}01b^2 + * + 100c^2$.

853. Впишите вместо знака * недостающие одночлены так, чтобы получилось тождество:

а) $(* + 2a)^2 = * + 12ab + *$; б) $(3x + *)^2 = * + * + 49y^2$.

854. Замените знак * таким одночленом, чтобы полученное выражение можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $b^2 + 20b + *$; в) $16x^2 + 24xy + *$;
б) $* + 14b + 49$; г) $* - 42pq + 49q^2$.

855. Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена:

а) $-1 + 4a - 4a^2$; г) $-44ax + 121a^2 + 4x^2$;
б) $-42a + 9a^2 + 49$; д) $4cd - 25c^2 - 0{,}16d^2$;
в) $24ab - 16a^2 - 9b^2$; е) $-0{,}49x^2 - 1{,}4xy - y^2$.

856. Найдите значение выражения:
а) $y^2 - 2y + 1$ при $y = 101; -11; 0{,}6$;
б) $4x^2 - 20x + 25$ при $x = 12{,}5; 0; -2$;
в) $25a^2 + 49 + 70a$ при $a = 0{,}4; -2; -1{,}6$.

857. Верно ли, что при любых значениях x:
а) $x^2 + 10 > 0$; б) $x^2 + 20x + 100 > 0$?

858. Сравните с нулём значение выражения:
а) $x^2 - 30x + 225$; б) $-x^2 + 2xy - y^2$.

859. Поставьте вместо многоточия какой-либо из знаков $\geqslant$ или $\leqslant$ так, чтобы получившееся неравенство было верно при любом значении x:
а) $x^2 - 16x + 64 \ldots 0$; в) $-x^2 - 4x - 4 \ldots 0$;
б) $16 + 8x + x^2 \ldots 0$; г) $-x^2 + 18x - 81 \ldots 0$.

860. Представьте выражение в виде квадрата двучлена, если это возможно:
а) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$; г) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2$;
б) $25a^2 - 30ab + 9b^2$; д) $100b^2 + 9c^2 - 60bc$;
в) $p^2 - 2p + 4$; е) $49x^2 + 12xy + 64y^2$.

861. Преобразуйте выражение в квадрат двучлена:
а) $x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$; в) $\frac{1}{4}a^2 + 2ab^2 + 4b^4$;
б) $\frac{1}{16}x^4 + 2x^2a + 16a^2$; г) $a^2x^2 - 2abx + b^2$.

862. Разложите на множители трёхчлен:
а) $4a^6 - 4a^3b^2 + b^4$; б) $b^8 - a^2b^4 + \frac{1}{4}a^4$.

863. Докажите, что при любом значении x многочлен $x^2 + 6x + 10$ принимает положительные значения.

864. Докажите, что выражение принимает лишь положительные значения:
а) $x^2 + 2x + 2$; в) $a^2 + b^2 - 2ab + 1$;
б) $4y^2 - 4y + 6$; г) $9x^2 + 4 - 6xy + 4y^2$.

П

865. Прочитайте выражение:
а) $(a - 10b)^2$; б) $a^2 - (10b)^2$; в) $(a + 10b)(a - 10b)$.

866. Запишите в виде выражения:
а) квадрат суммы $3a$ и $\frac{1}{3}b$;
б) сумму квадратов $0{,}5m$ и $5{,}3n$;
в) произведение $0{,}6x^2$ и $9y^2$.

867. Представьте в виде многочлена:

а) $(x^2 + 4xy - y^2)(2y - x)$;
б) $(3 - a)(a^3 - 4a^2 - 5a)$;
в) $(a^2 - 4ab + b^2)(2a - b)$;
г) $(x - p)(x^2 + px + p^2)$.

868. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

а) $4x^4$;
б) $0{,}25a^4$;
в) $36m^6$;
г) a^2b^4;
д) $9a^4b^2$;
е) $0{,}16x^6y^4$.

869. Преобразуйте в многочлен выражение: а) $(3 + a)^3$; б) $(x - 2)^3$.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите формулу квадрата суммы. Проведите доказательство.
2. Напишите формулу квадрата разности. Проведите доказательство.
3. Приведите пример трёхчлена, который можно представить в виде квадрата суммы.
4. Приведите пример трёхчлена, который можно представить в виде квадрата разности.
5. Напишите формулу куба суммы. Возведите в куб двучлен $a + 2b$.
6. Напишите формулу куба разности. Возведите в куб двучлен $3x - y$.

§ 12 РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КУБОВ

34. Умножение разности двух выражений на их сумму

Рассмотрим ещё одну формулу сокращённого умножения. Умножим разность $a - b$ на сумму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Значит,

$$\mathbf{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.} \qquad (1)$$

Тождество (1) позволяет сокращённо выполнять умножение разности любых двух выражений на их сумму:

> произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

Приведём примеры применения формулы (1).

Пример 1. Умножим разность $3x-7y$ на сумму $3x+7y$.

▶Воспользовавшись тождеством (1), получим

$$(3x-7y)(3x+7y)=(3x)^2-(7y)^2=9x^2-49y^2. \triangleleft$$

Пример 2. Представим в виде многочлена произведение

$$(5a^2-b^3)(5a^2+b^3).$$

▶Применив тождество (1), получим

$$(5a^2-b^3)(5a^2+b^3)=(5a^2)^2-(b^3)^2=25a^4-b^6. \triangleleft$$

Пример 3. Представим в виде многочлена произведение

$$(-2a-9c)(2a-9c).$$

▶Вынесем в выражении $-2a-9c$ за скобки -1, тогда

$$(-2a-9c)(2a-9c)=(-1)(2a+9c)(2a-9c)=$$
$$=-((2a)^2-(9c)^2)=-(4a^2-81c^2)=-4a^2+81c^2.$$

Преобразование можно выполнить иначе:

$$(-9c-2a)(-9c+2a)=(-9c)^2-(2a)^2=81c^2-4a^2. \triangleleft$$

Пример 4. Упростим выражение $6{,}5x^2-(2x+0{,}8)(2x-0{,}8)$.

▶Имеем

$$6{,}5x^2-(2x+0{,}8)(2x-0{,}8)=6{,}5x^2-(4x^2-0{,}64)=$$
$$=6{,}5x^2-4x^2+0{,}64=2{,}5x^2+0{,}64. \triangleleft$$

Упражнения

870. Выполните умножение многочленов:

а) $(x-y)(x+y)$;
б) $(p+q)(p-q)$;
в) $(p-5)(p+5)$;
г) $(x+3)(x-3)$;
д) $(2x-1)(2x+1)$;
е) $(7+3y)(3y-7)$;
ж) $(n-3m)(3m+n)$;
з) $(2a-3b)(3b+2a)$;
и) $(8c+9d)(9d-8c)$.

871. Выполните умножение:

а) $(y-4)(y+4)$;
б) $(p-7)(7+p)$;
в) $(4+5y)(5y-4)$;
г) $(7x-2)(7x+2)$;
д) $(8b+5a)(5a-8b)$;
е) $(10x-6c)(10x+6c)$.

872. С помощью рисунка 87 разъясните геометрический смысл формулы $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ для положительных a и b, удовлетворяющих условию $a>b$.

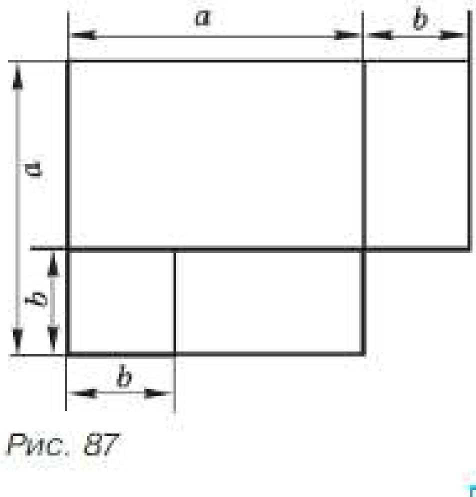


Рис. 87

873. Представьте в виде многочлена произведение:

а) $(x^2-5)(x^2+5)$;
б) $(4+y^2)(y^2-4)$;
в) $(9a-b^2)(b^2+9a)$;
г) $(0{,}7x+y^2)(0{,}7x-y^2)$;
д) $(10p^2-0{,}3q^2)(10p^2+0{,}3q^2)$;
е) $(a^3-b^2)(a^3+b^2)$;
ж) $(c^4+d^2)(d^2-c^4)$;
з) $(5x^2+2y^3)(5x^2-2y^3)$;
и) $(1{,}4c-0{,}7y^3)(0{,}7y^3+1{,}4c)$;
к) $(1{,}3a^5-0{,}1b^4)(1{,}3a^5+0{,}1b^4)$.

874. Впишите вместо знака * одночлен так, чтобы получилось тождество:

а) $(2a+*)(2a-*)=4a^2-b^2$;
б) $(*-3x)(*+3x)=16y^2-9x^2$;
в) $(*-b^4)(b^4+*)=121a^{10}-b^8$;
г) $m^4-225c^{10}=(m^2-*)(*+m^2)$.

875. Представьте в виде многочлена:

а) $(3x^2-1)(3x^2+1)$;
б) $(5a-b^3)(b^3+5a)$;
в) $\left(\frac{3}{7}m^3+\frac{1}{4}n^3\right)\left(\frac{3}{7}m^3-\frac{1}{4}n^3\right)$;
г) $\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{8}p^6\right)\left(\frac{1}{8}p^6+\frac{1}{15}\right)$;
д) $(0{,}4y^3+5a^2)(5a^2-0{,}4y^3)$;
е) $(1{,}2c^2-7a^2)(1{,}2c^2+7a^2)$;
ж) $\left(\frac{5}{8}x+y^5\right)\left(y^5-\frac{5}{8}x\right)$;
з) $\left(\frac{1}{7}p^5-0{,}01\right)\left(0{,}01+\frac{1}{7}p^5\right)$.

876. Найдите значение выражения:

а) $(100-1)(100+1)$;
б) $(80+3)(80-3)$;
в) $64\cdot56$;
г) $201\cdot199$;
д) $74\cdot66$;
е) $1002\cdot998$;
ж) $1{,}05\cdot0{,}95$;
з) $60{,}1\cdot59{,}9$.

877. Найдите значение произведения:

а) $52\cdot48$;
б) $37\cdot43$;
в) $6{,}01\cdot5{,}99$;
г) $2{,}03\cdot1{,}97$;
д) $17{,}3\cdot16{,}7$;
е) $29{,}8\cdot30{,}2$;
ж) $9{,}7\cdot10{,}3$;
з) $50{,}2\cdot49{,}8$;
и) $4{,}6\cdot5{,}4$.

878. Представьте выражение в виде многочлена, используя соответствующую формулу сокращённого умножения:

а) $(-y+x)(x+y)$;
б) $(-a+b)(b-a)$;
в) $(-b-c)(b-c)$;
г) $(x+y)(-x-y)$;
д) $(x-y)(y-x)$;
е) $(-a-b)(-a-b)$.

879. Представьте в виде многочлена:

а) $(-3xy+a)(3xy+a)$;
б) $(-1-2a^2b)(1-2a^2b)$;
в) $(12a^3-7x)(-12a^3-7x)$;
г) $(-10p^4+9)(9-10p^4)$;
д) $(0{,}2x+10y)(10y-0{,}2x)$;
е) $(1{,}1y-0{,}3)(0{,}3+1{,}1y)$.

880. Выполните умножение:

а) $(-m^2+8)(m^2+8)$;
б) $(5y-y^2)(y^2+5y)$;
в) $(6n^2+1)(-6n^2+1)$;
г) $(-7ab-0{,}2)(0{,}2-7ab)$.

881. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $(7-6x)(7+6x)$; в) $\left(\frac{1}{3}-2y\right)\left(\frac{1}{3}+2y\right)$;

б) $\left(4-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}b+4\right)$; г) $\left(4a+1\frac{1}{7}\right)\left(1\frac{1}{7}-4a\right)$.

882. Найдите наибольшее или наименьшее значение выражения, если такое значение существует:

а) $(5a-0{,}2)(0{,}2+5a)$; в) $(13a-0{,}3)(0{,}3+13a)$;
б) $(12-7y)(7y+12)$; г) $(10-9m)(9m+10)$.

883. Представьте в виде многочлена:

а) $2(x-3)(x+3)$; г) $-3a(a+5)(5-a)$;
б) $y(y+4)(y-4)$; д) $(0{,}5x-7)(7+0{,}5x)(-4x)$;
в) $5x(x+2)(x-2)$; е) $-5y(-3y-4)(3y-4)$.

884. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(b+a)(b-a)^2$; в) $(a-4)(a+4)^2$;
б) $(x+y)^2(y-x)$; г) $(3p+1)^2(1-3p)$.

885. Выполните умножение:

а) $(b-2)(b+2)(b^2+4)$; д) $(x-3)^2(x+3)^2$;
б) $(3-y)(3+y)(9+y^2)$; е) $(y+4)^2(y-4)^2$;
в) $(a^2+1)(a+1)(a-1)$; ж) $(a-5)^2(5+a)^2$;
г) $(c^4+1)(c^2+1)(c^2-1)$; з) $(c+4)^2(4-c)^2$.

886. Упростите выражение:

а) $(0{,}8x+15)(0{,}8x-15)+0{,}36x^2$; г) $(3a-1)(3a+1)-17a^2$;
б) $5b^2+(3-2b)(3+2b)$; д) $100x^2-(5x-4)(4+5x)$;
в) $2x^2-(x+1)(x-1)$; е) $22c^2+(-3c-7)(3c-7)$.

887. Упростите:

а) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$; г) $(3m-2)(3m+2)+4$;
б) $(2a+b)(4a^2+b^2)(2a-b)$; д) $25n^2-(7+5n)(7-5n)$;
в) $(c^3+b)(c^3-b)(c^6+b^2)$; е) $6x^2-(x-0{,}5)(x+0{,}5)$.

888. Докажите, что квадрат любого целого числа на единицу больше произведения предыдущего и последующего целых чисел.

889. Упростите выражение:

а) $(x-2)(x+2)-x(x+5)$;
б) $m(m-4)+(3-m)(3+m)$;
в) $(4x-a)(4x+a)+2x(x-a)$;
г) $2a(a+b)-(2a+b)(2a-b)$;
д) $(5a-3c)(5a+3c)-(7c-a)(7c+a)$;
е) $(4b+10c)(10c-4b)+(-5c+2b)(5c+2b)$;
ж) $(3x-4y)^2-(3x-4y)(3x+4y)$;
з) $(2a+6b)(6b-2a)-(2a+6b)^2$.

890. *(Для работы в парах.)* Докажите, что сумма произведения трёх последовательных целых чисел и среднего из них равна кубу среднего числа.

1) Проверьте утверждение на примере чисел 19, 20, 21.
2) Составьте выражение, обозначив через p одно из этих чисел, и выполните преобразование составленного выражения. Одному учащемуся рекомендуем обозначить через p наименьшее из чисел, а другому — среднее из чисел.
3) Проверьте друг у друга правильность преобразований и сравните их сложность.

891. Упростите выражение:
а) $5a(a-8)-3(a+2)(a-2)$;
б) $(1-4b)(4b+1)+6b(b-2)$;
в) $(8p-q)(q+8p)-(p+q)(p-q)$;
г) $(2x-7y)(2x+7y)+(2x-7y)(7y-2x)$.

892. Решите уравнение:
а) $8m(1+2m)-(4m+3)(4m-3)=2m$;
б) $x-3x(1-12x)=11-(5-6x)(6x+5)$.

893. Найдите корень уравнения:
а) $(6x-1)(6x+1)-4x(9x+2)=-1$;
б) $(8-9a)a=-40+(6-3a)(6+3a)$.

П

894. Представьте выражение в виде квадрата двучлена:
а) $1-4xy+4x^2y^2$; б) $\frac{1}{4}a^2b^2+ab+1$.

895. Докажите тождество:
а) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$;
б) $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$;
в) $(x+3)^3+(x-3)^3=2x^3+54x$.

896. Разложите на множители:
а) $2abc^2-3ab^2c+4a^2bc$; в) $-15am^3n^4-20am^4n^6$;
б) $12a^2xy^3-6axy^5$; г) $-28b^4c^5y+16b^5c^6y^8$.

897. Решите уравнение:
а) $2x-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{3}-6$; г) $6=\frac{3x-1}{2}\cdot 2,4$;
б) $1+\frac{x+1}{3}=x-\frac{3x+1}{8}$; д) $0,69=\frac{5-2y}{8}\cdot 13,8$;
в) $\frac{1-y}{7}+y=\frac{y}{2}+3$; е) $0,5\cdot\frac{4+2x}{13}=x-10$.

898. Со станций M и N, расстояние между которыми 380 км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Скорость поезда, отправившегося со станции N, была больше скорости другого поезда на 5 км/ч. Через 2 ч после отправления поездам оставалось пройти до встречи 30 км. Найдите скорости поездов.

35. Разложение разности квадратов на множители

В тождестве $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ поменяем местами правую и левую части. Получим

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Это тождество называют *формулой разности квадратов*. Её применяют для разложения на множители разности квадратов любых двух выражений:

> разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Приведём примеры применения формулы разности квадратов.

Пример 1. Разложим на множители выражение $36-a^2$.

▶Так как $36=6^2$, то

$$36-a^2=6^2-a^2=(6-a)(6+a). ◁$$

Пример 2. Представим в виде произведения двучлен $49x^2-16y^6$.

▶Данный двучлен можно представить в виде разности квадратов. Получим

$$49x^2-16y^6=(7x)^2-(4y^3)^2=(7x-4y^3)(7x+4y^3). ◁$$

Упражнения

899. Разложите на множители многочлен:

а) x^2-y^2; г) m^2-1; ж) p^2-400; к) $b^2-\frac{4}{9}$;

б) c^2-z^2; д) $16-b^2$; з) $y^2-0{,}09$; л) $\frac{9}{16}-n^2$;

в) a^2-25; е) $100-x^2$; и) $1{,}44-a^2$; м) $\frac{25}{49}-p^2$.

900. Разложите на множители:

а) $25x^2 - y^2$; д) $9m^2 - 16n^2$; и) $9 - b^2c^2$;
б) $-m^2 + 16n^2$; е) $64p^2 - 81q^2$; к) $4a^2b^2 - 1$;
в) $36a^2 - 49$; ж) $-49a^2 + 16b^2$; л) $p^2 - a^2b^2$;
г) $64 - 25x^2$; з) $0{,}01n^2 - 4m^2$; м) $16c^2d^2 - 9a^2$.

901. Представьте в виде произведения:

а) $x^2 - 64$; г) $-81 + 25y^2$; ж) $x^2y^2 - 0{,}25$;
б) $0{,}16 - c^2$; д) $144b^2 - c^2$; з) $c^2d^2 - a^2$;
в) $121 - m^2$; е) $0{,}64x^2 - 0{,}49y^2$; и) $a^2x^2 - 4y^2$.

902. Вычислите:

а) $47^2 - 37^2$; в) $126^2 - 74^2$; д) $0{,}849^2 - 0{,}151^2$;
б) $53^2 - 63^2$; г) $21{,}3^2 - 21{,}2^2$; е) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

903. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36}{13^2 - 11^2}$; б) $\frac{79^2 - 65^2}{420}$; в) $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$; г) $\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2}$.

904. Найдите значение выражения:

а) $41^2 - 31^2$; в) $256^2 - 156^2$; д) $\frac{26^2 - 12^2}{54^2 - 16^2}$;
б) $76^2 - 24^2$; г) $0{,}783^2 - 0{,}217^2$; е) $\frac{63^2 - 27^2}{83^2 - 79^2}$.

905. Разложите на множители:

а) $x^4 - 9$; г) $y^2 - p^4$; ж) $b^4 - y^{10}$; к) $c^8 - d^8$;
б) $25 - n^6$; д) $c^6 - d^6$; з) $m^8 - n^6$; л) $a^4 - 16$;
в) $m^8 - a^2$; е) $x^6 - a^4$; и) $a^4 - b^4$; м) $81 - b^4$.

906. Решите уравнение:

а) $x^2 - 16 = 0$; г) $a^2 - 0{,}25 = 0$; ж) $4x^2 - 9 = 0$;
б) $y^2 - 81 = 0$; д) $b^2 + 36 = 0$; з) $25x^2 - 16 = 0$;
в) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$; е) $x^2 - 1 = 0$; и) $81x^2 + 4 = 0$.

907. Решите уравнение:

а) $m^2 - 25 = 0$; в) $9x^2 - 4 = 0$;
б) $x^2 - 36 = 0$; г) $16x^2 - 49 = 0$.

908. Представьте в виде произведения:

а) $c^6 - 9x^4$; г) $a^4b^4 - 1$; ж) $16m^2y^2 - 9n^4$;
б) $100y^2 - a^8$; д) $0{,}36 - x^4y^4$; з) $9x^8y^4 - 100z^2$;
в) $4x^4 - 25b^2$; е) $4a^2 - b^6c^2$; и) $0{,}81p^6m^4 - 0{,}01x^2$.

909. Разложите на множители:

а) $64 - y^4$; г) $25m^6 - n^2$; ж) $64 - a^4b^4$;
б) $x^2 - c^6$; д) $1 - 49p^{10}$; з) $16b^2c^{12} - 0{,}25$;
в) $a^4 - b^8$; е) $4y^6 - 9a^4$; и) $81x^6y^2 - 0{,}36a^2$.

910. Представьте выражение в виде произведения:

а) $(x+3)^2 - 1$; в) $(4a-3)^2 - 16$; д) $(5y-6)^2 - 81$;
б) $64 - (b+1)^2$; г) $25 - (a+7)^2$; е) $1 - (2x-1)^2$.

911. Разложите на множители:

а) $9y^2 - (1+2y)^2$; в) $49x^2 - (y+8x)^2$; д) $(-2a^2+3b)^2 - 4a^4$;
б) $(3c-5)^2 - 16c^2$; г) $(5a-3b)^2 - 25a^2$; е) $b^6 - (x-4b^3)^2$.

912. Представьте в виде произведения:

а) $(2b-5)^2 - 36$; в) $(4-11m)^2 - 1$; д) $(5c-3d)^2 - 9d^2$;
б) $9 - (7+3a)^2$; г) $p^2 - (2p+1)^2$; е) $a^4 - (9b+a^2)^2$.

913. Представьте в виде произведения:

а) $(2x+y)^2 - (x-2y)^2$; в) $(m+n)^2 - (m-n)^2$;
б) $(a+b)^2 - (b+c)^2$; г) $(4c-x)^2 - (2c+3x)^2$.

914. а) Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(4n+5)^2 - 9$ делится на 4.

б) Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(n+7)^2 - n^2$ делится на 7.

915. На сторонах прямоугольника построены квадраты (рис. 88). Площадь одного квадрата на 95 см^2 больше площади другого. Найдите периметр прямоугольника, если известно, что длина прямоугольника на 5 см больше его ширины.

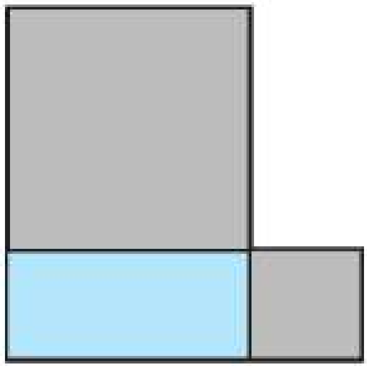


Рис. 88

916. *(Задача-исследование.)* Верно ли утверждение: если p — простое число, большее трёх, то значение выражения $p^2 - 1$ кратно 12?

1) Проверьте правильность утверждения на конкретных примерах.
2) Разложите многочлен $p^2 - 1$ на множители. Обсудите, почему полученное произведение кратно 4.
3) Обсудите, почему полученное произведение делится на 3.
4) Сделайте вывод.

917. Представьте в виде куба одночлена выражение:

а) $27a^3$; в) $8b^6$; д) $-27a^3x^6$;
б) $-8m^3$; г) $-64p^6$; е) $64a^6x^9$.

918. Представьте многочлен в виде квадрата двучлена или выражения, противоположного квадрату двучлена:

а) $0{,}25x^2 - 0{,}6xy + 0{,}36y^2$;   в) $\frac{9}{16}a^4 + a^3 + \frac{4}{9}a^2$;

б) $-a^2 + 0{,}6a - 0{,}09$;   г) $-16m^2 - 24mn - 9n^2$.

919. Решите уравнение:

а) $(5x - 1)(2x + 1) - 10x^2 = 0{,}8$;

б) $18x^2 - (9x + 2)(2x - 1) = 1$.

920. Турист рассчитал, что если он будет идти к железнодорожной станции со скоростью 4 км/ч, то опоздает к поезду на полчаса, а если он будет идти со скоростью 5 км/ч, то придёт на станцию за 6 мин до отправления поезда. Какое расстояние должен пройти турист?

36. Разложение на множители суммы и разности кубов

Для разложения на множители суммы кубов используется тождество

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \qquad (1)$$

которое называют *формулой суммы кубов*.

Чтобы доказать тождество (1), умножим двучлен $a + b$ на трёхчлен $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Множитель $a^2 - ab + b^2$ в правой части формулы (1) напоминает трёхчлен $a^2 - 2ab + b^2$, который равен квадрату разности a и b. Однако вместо удвоенного произведения a и b в нём стоит просто их произведение. Трёхчлен $a^2 - ab + b^2$ называют *неполным квадратом разности* a и b. Итак,

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $27x^3 + y^3$.

▶ Данный многочлен можно представить в виде суммы кубов двух выражений:

$$27x^3 + y^3 = (3x)^3 + y^3.$$

Применив формулу (1), получим

$$(3x)^3 + y^3 = (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2).$$

Итак,

$$27x^3 + y^3 = (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2). \triangleleft$$

Для разложения на множители разности кубов используется тождество

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),} \qquad (2)$$

которое называют *формулой разности кубов*.

Чтобы доказать тождество (2), преобразуем произведение двучлена $a - b$ и трёхчлена $a^2 + ab + b^2$, который называют *неполным квадратом суммы* a и b:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Пример 2. Разложим на множители многочлен $m^6 - n^3$.

▶ Представим данный многочлен в виде разности кубов двух выражений и применим формулу (2). Получим

$$m^6 - n^3 = (m^2)^3 - n^3 = (m^2 - n)(m^4 + m^2n + n^2). \triangleleft$$

Упражнения

921. Разложите на множители многочлен:
а) $x^3 + y^3$; в) $8 + a^3$; д) $t^3 + 1$;
б) $m^3 - n^3$; г) $27 - y^3$; е) $1 - c^3$.

922. Примените формулу суммы кубов или формулу разности кубов:
а) $c^3 - d^3$; в) $x^3 - 64$; д) $y^3 - 1$;
б) $p^3 + q^3$; г) $125 + a^3$; е) $1 + b^3$.

923. Представьте выражение в виде суммы или разности кубов и разложите его на множители:
а) $8x^3 - 1$; в) $8 - \frac{1}{8}a^3$; д) $125a^3 - 64b^3$;
б) $1 + 27y^3$; г) $\frac{1}{64}m^3 + 1000$; е) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{125}y^3$.

924. Разложите на множители:
а) $8 - m^3$; в) $64x^3 + 1$; д) $m^3 - 27n^3$;
б) $c^3 + 27$; г) $1 - \frac{1}{8}p^3$; е) $\frac{1}{8}a^3 + b^3$.

925. Запишите в виде произведения выражение:

а) x^3-y^6; в) m^9-n^3; д) a^6+b^9;
б) a^6+b^3; г) p^3+k^9; е) x^9-y^9.

926. Разложите на множители:

а) c^3+b^6; б) a^9-b^6; в) x^6-8; г) $27+y^9$.

927. Запишите в виде произведения:

а) $-x^3+y^3$; в) $-a^6+\frac{1}{8}$; д) c^6+1;

б) $-8-p^3$; г) $-\frac{1}{27}-b^6$; е) x^6+y^6.

928. Представьте в виде произведения:

а) a^3b^3-1; в) $8-a^3c^3$; д) $x^6y^3-c^3$;
б) $1+x^3y^3$; г) m^3n^3+27; е) $a^3-m^3n^9$.

929. Докажите, что значение выражения:

а) 327^3+173^3 делится на 500; в) 211^3+129^3 делится на 17;
б) 731^3-631^3 делится на 100; г) 356^3-245^3 делится на 3.

930. Делится ли значение выражения:

а) 38^3+37^3 на 75; б) 99^3-74^3 на 25?

П

931. Представьте в виде многочлена:

а) $(11c^2+a^3)(-a^3+11c^2)$; в) $(0{,}3c-0{,}2d)(0{,}2d-0{,}3c)$;
б) $(0{,}8x+y^4)(-0{,}8x-y^4)$; г) $(6x^3-4x)(-6x^3-4x)$.

932. Докажите, что равенство не является тождеством:

а) $x^4+4=(x+2)^2$; б) $(x-2)(2+x)=4-x^2$.

933. Решите уравнение:

а) $(2x-3)^2-2x(4+2x)=11$;
б) $(4x-3)(3+4x)-2x(8x-1)=0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равно произведение разности двух выражений и их суммы? Напишите соответствующую формулу и докажите её.
2. Чему равна разность квадратов двух выражений? Напишите соответствующую формулу.
3. Напишите формулу суммы кубов. Проведите доказательство.
4. Напишите формулу разности кубов. Проведите доказательство.
5. Разложите на множители многочлен $16t^2-1$; p^3+8; m^3-27.

§ 13 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕЛЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

37. Преобразование целого выражения в многочлен

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, называют *целыми выражениями* (произведение одинаковых множителей в целом выражении может быть записано в виде степени). К целым относят и выражения, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на число, отличное от нуля.

Многочлены и, в частности, одночлены являются целыми выражениями. Например, $3{,}5x^2y - 4xy^2 + 10x - 0{,}5y$ и $\frac{2}{3}a^3bc^2$ — целые выражения. Примерами целых выражений служат также выражения:

$$10y^3 + (3x + y)(x^2 - 10y^2), \quad 2b(b^2 - 10c^2) - (b^3 + 2c^2),$$

$$3a^2 - \frac{a(a + 2c)}{5} + 2{,}5ac.$$

Выражение $x + \frac{7}{1 - x} - 5(x - 1)$ не является целым, так как в нём используется деление на выражение с переменной.

Выражение $10y^3 + (3x + y)(x^2 - 10y^2)$ является суммой одночлена $10y^3$ и произведения многочленов $3x + y$ и $x^2 - 10y^2$. Выражение $2b(b^2 - 10c^2) - (b^3 + 2c^2)$ является разностью между произведением одночлена $2b$ и многочлена $b^2 - 10c^2$ и многочленом $b^3 + 2c^2$. Мы знаем, что сумму, разность и произведение многочленов можно преобразовать в многочлен, поэтому каждое из этих целых выражений можно представить в виде многочлена.

Выражение $3a^2 - \frac{a(a + 2c)}{5} + 2{,}5ac$ отличается от рассмотренных тем, что в нём содержится деление на число, отличное от нуля. Если деление заменить умножением на число, обратное делителю, то получится выражение $3a^2 - \frac{1}{5}a(a + 2c) + 2{,}5ac$, которое, как и предыдущие выражения, составлено из многочленов с помощью действий сложения, вычитания, умножения. Поэтому это целое выражение также можно представить в виде многочлена.

Любое целое выражение можно представить в виде многочлена.

Пример 1. Представим в виде многочлена выражение

$$(x^2+2)^2-(x-2)(x+2)(x^2+4).$$

▶ Имеем

$$(x^4+4x^2+4)-(x^2-4)(x^2+4)=x^4+4x^2+4-x^4+16=4x^2+20.$$

Значит, данное выражение тождественно равно многочлену $4x^2+20$. ◁

Преобразование целого выражения в многочлен используется при решении уравнений, доказательстве тождеств, в задачах на делимость и т. п.

Пример 2. Докажем, что ни при каком целом n значение выражения $(n+1)(n-1)-(n-6)(n+2)$ не делится на 4.

▶ Упростим данное выражение:

$$(n+1)(n-1)-(n-6)(n+2)=(n^2-1)-(n^2-6n+2n-12)=$$
$$=n^2-1-n^2+6n-2n+12=4n+11.$$

Мы представили данное выражение в виде суммы $4n+11$. При любом целом n значение первого слагаемого делится на 4; второе слагаемое — число 11 — не делится на 4. Поэтому при любом целом n значение суммы $4n+11$, а значит, и значение исходного выражения $(n+1)(n-1)-(n-6)(n+2)$ не делится на 4. ◁

Упражнения

934. Какие из выражений $2x^2y$, $4a^2-b(a-3b)$, $\frac{a^2}{a-3}$, $\frac{x^2-1}{8}$, $9x-\frac{1}{2}$ являются целыми?

935. Представьте в виде многочлена:

а) сумму многочлена x^3+7x^2+8 и произведения многочленов x^2-6x+4 и $x-1$;

б) разность произведения многочленов a^2+7a-4 и $a-3$ и многочлена $a^3+4a^2-29a+11$.

936. Преобразуйте в многочлен:

а) $4(m-n)^2+4m(m-n)$;
б) $5x(x-y)-2(y-x)^2$;
в) $(y+7)^2-2(y+10)(y+4)$;
г) $(x-5)(6+4x)-3(1-x)^2$.

937. Упростите выражение:

а) $(3m-a)(a+3m)-(2a+m)(3a-m)$;
б) $(x-4y)(x+3y)+(x-3y)(3y+x)$.

938. Зная, что $a=2x-5$, $b=8x+1$, $c=4x-2$, представьте в виде многочлена с переменной x выражение $ab-c^2$.

939. Докажите, что ни при каком целом n значение выражения $(2n+1)(n+5)-2(n+3)(n-3)-(5n+13)$ не делится на 6.

940. *(Для работы в парах.)* Впишите вместо многоточия в выражение

$$(n+8)(n-4)-(n+3)(n-2)+\ldots$$

пропущенное число так, чтобы получилось выражение, значение которого при любом целом n делится на 3.

1) Преобразуйте в многочлен каждое из произведений двучленов и выполните вычитание.
2) Обсудите друг с другом, какому условию должно удовлетворять пропущенное число.
3) Впишите вместо многоточия каждый какое-либо число, удовлетворяющее условию задачи.
4) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание.

941. Решите уравнение:
а) $x(x+2)(x-2)-x(x^2-8)=16$;
б) $2y(4y-1)-2(3-2y)^2=48$.

942. Решите уравнение:
а) $x^2(x+2)-x(x+1)^2=5x+9$;
б) $(y-3)^2+3(y+2)(y-2)=9+4y^2$.

943. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
а) $(a-1)(a^2+1)(a+1)-(a^2-1)^2-2(a^2-3)$;
б) $(a^2-3)^2-(a-2)(a^2+4)(a+2)-6(5-a^2)$.

944. Упростите выражение:
а) $(y-3)(y^2+9)(y+3)-(2y^2-y)^2-19$;
б) $(1-a)(1-a^2)+(1+a)(1+a^2)-2a(1+a)(a-1)$.

945. Докажите тождество:
а) $(a-3c)(4c+2a)+3c(a+3c)=(2a-c)(3c+5a)-8a^2$;
б) $(1-2b)(1-5b+b^2)+(2b-1)(1-6b+b^2)=b(1-2b)$.

П

946. Представьте данный трёхчлен, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена:
а) $25y^2-15ay+9a^2$;
б) $15ab-9a^2-6\frac{1}{4}b^2$;
в) $4b^2+0{,}25c^2-2bc$;
г) $0{,}36a^2+0{,}04y^2-0{,}24ay$.

947. Разложите на множители:
а) $-20x^4y^2-35x^3y^3$;
б) $3a^3b^2c+9ab^2c^3$;
в) $-1{,}2a^3b+1{,}2b^4$;
г) $7{,}2x^4y^4-1{,}8x^4y^2$.

П

948. От деревни до станции велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно он возвращался со скоростью 10 км/ч. Найдите расстояние от деревни до станции, если известно, что на обратный путь велосипедист затратил на 1 ч больше, чем на путь от деревни до станции.

949. Из пункта A связной доставил донесение в пункт B за 30 мин. На обратном пути он уменьшил скорость на 1 км/ч и затратил на дорогу 36 мин. Определите, с какой скоростью шёл связной из пункта A в пункт B.

38. Применение различных способов для разложения на множители

Для разложения многочленов на множители мы применяли вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращённого умножения. Иногда удаётся разложить многочлен на множители, применив последовательно несколько способов. При этом начинать преобразование следует, если это возможно, с вынесения общего множителя за скобки.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $10a^3 - 40a$.

▶ Члены этого многочлена имеют общий множитель $10a$. Вынесем этот множитель за скобки:

$$10a^3 - 40a = 10a(a^2 - 4).$$

Разложение на множители можно продолжить, применив к выражению $a^2 - 4$ формулу разности квадратов. В результате получим в качестве множителей многочлены более низких степеней. Имеем

$$10a(a^2 - 4) = 10a(a + 2)(a - 2).$$

Значит,

$$10a^3 - 40a = 10a(a + 2)(a - 2). \triangleleft$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$ab^3 - 3b^3 + ab^2y - 3b^2y.$$

▶ Сначала вынесем за скобки общий множитель b^2:

$$ab^3 - 3b^3 + ab^2y - 3b^2y =$$
$$= b^2(ab - 3b + ay - 3y).$$

Попытаемся теперь разложить на множители многочлен

$$ab - 3b + ay - 3y.$$

Сгруппировав первый член со вторым и третий с четвёртым, будем иметь

$$ab - 3b + ay - 3y = b(a - 3) + y(a - 3) = \\ = (a - 3)(b + y).$$

Окончательно получим

$$ab^3 - 3b^3 + ab^2y - 3b^2y = b^2(a - 3)(b + y). \triangleleft$$

Пример 3. Разложим на множители многочлен $a^2 - 4ax - 9 + 4x^2$.

▶ Сгруппируем первый, второй и четвёртый члены многочлена. Получим трёхчлен $a^2 - 4ax + 4x^2$, который можно представить в виде квадрата разности. Поэтому

$$a^2 - 4ax - 9 + 4x^2 = (a^2 - 4ax + 4x^2) - 9 = \\ = (a - 2x)^2 - 9.$$

Полученное выражение можно разложить на множители по формуле разности квадратов:

$$(a - 2x)^2 - 9 = (a - 2x)^2 - 3^2 = (a - 2x - 3)(a - 2x + 3).$$

Следовательно,

$$a^2 - 4ax - 9 + 4x^2 = (a - 2x - 3)(a - 2x + 3). \triangleleft$$

Заметим, что при разложении многочлена на множители имеют в виду представление его в виде произведения нескольких многочленов, в котором хотя бы два множителя являются многочленами ненулевой степени (т. е. не являются числами).

Не каждый многочлен можно разложить на множители.

Например, нельзя разложить на множители многочлены $x^2 + 1$, $4x^2 - 2x + 1$ и т. п.

Рассмотрим пример использования разложения на множители для упрощения вычислений с помощью калькулятора.

Пример 4. Найдём с помощью калькулятора значение многочлена $5x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ при $x = 1{,}2$.

▶ Если выполнять действия в принятом порядке, то сначала придётся найти значения выражений $x^3 \cdot 5$, $x^2 \cdot 2$ и $7x$, записать результаты на бумаге или ввести их в память калькулятора, а затем перейти к действиям сложения и вычитания. Однако искомый результат можно получить гораздо проще, если преобразовать данный многочлен следующим образом:

$$5x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (5x^2 + 2x - 7)x + 4 = ((5x + 2)x - 7)x + 4.$$

Выполнив вычисления для $x = 1{,}2$, найдём, что значение многочлена равно $7{,}12$. ◁

Упражнения

950. Разложите на множители многочлен:

а) $5x^2 - 5y^2$; в) $2ax^2 - 2ay^2$; д) $16x^2 - 4$;
б) $am^2 - an^2$; г) $9p^2 - 9$; е) $75 - 27c^2$.

951. Представьте в виде произведения:

а) $y^3 - y^5$; б) $2x - 2x^3$; в) $81x^2 - x^4$; г) $4y^3 - 100y^5$.

952. Выполните разложение на множители:

а) $mx^2 - 49m$; б) $ab^2 - 4ac^2$; в) $4b^3 - b$; г) $a^3 - ac^2$.

953. Докажите тождество $a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$.

954. Разложите на множители:

а) $p^4 - 16$; б) $x^4 - 81$; в) $y^8 - 1$; г) $a^4 - b^8$.

955. Разложите на множители:

а) $3x^2 + 6xy + 3y^2$; г) $6p^2 + 24q^2 + 24pq$;
б) $-m^2 + 2m - 1$; д) $45x + 30ax + 5a^2x$;
в) $-4x - 4 - x^2$; е) $18cx^2 - 24cx + 8c$.

956. Разложите на множители выражение $x^6 - y^6$, представив его в виде: а) разности квадратов; б) разности кубов.

957. Выполните разложение на множители:

а) $2m^2 - 4m + 2$; б) $36 + 24x + 4x^2$; в) $8a^3 - 8b^3$; г) $9ax^3 + 9ay^3$.

958. Разложите на множители:

а) $4xy + 12y - 4x - 12$; в) $-abc - 5ac - 4ab - 20a$;
б) $60 + 6ab - 30b - 12a$; г) $a^3 + a^2b + a^2 + ab$.

959. Представьте в виде произведения:

а) $45b + 6a - 3ab - 90$; в) $ac^4 - c^4 + ac^3 - c^3$;
б) $-5xy - 40y - 15x - 120$; г) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$.

960. Выполните разложение на множители:

а) $x^2 - 2xc + c^2 - d^2$; в) $p^2 - x^2 + 6x - 9$;
б) $c^2 + 2c + 1 - a^2$; г) $x^2 - a^2 - 10a - 25$.

961. Разложите на множители:

а) $x^2 + 2xy + y^2 - m^2$; в) $b^2 - c^2 - 8b + 16$;
б) $p^2 - a^2 - 2ab - b^2$; г) $9 - c^2 + a^2 - 6a$.

962. Разложите на множители:

а) $x^2 - y^2 - x - y$; в) $m + n + m^2 - n^2$;
б) $a^2 - b^2 - a + b$; г) $k^2 - k - p^2 - p$.

963. Представьте в виде произведения:

а) $a - b + a^2 - b^2$; б) $c^2 + d - d^2 + c$.

964. *(Для работы в парах.)* Используя калькулятор, найдите значение многочлена $3,5x^3-2,1x^2+1,9x-16,7$ при $x=3,7$.

1) Пусть один из вас вычислит с помощью калькулятора сначала значения каждого члена многочлена, затем значение многочлена, а другой выполнит преобразование многочлена по образцу, предложенному в примере 4 на с. 189, затем сделает вычисления с помощью калькулятора.
2) Отметьте затрату времени на выполнение задания в каждом случае.
3) Сравните полученные результаты и время, затраченное на решение задачи.

965. Решите уравнение:
а) $x^3-x=0$;   в) $x^3+x^2=0$;
б) $9x-x^3=0$;   г) $5x^4-20x^2=0$.

966. Решите уравнение:
а) $x^3+x=0$;   б) $x^3-2x^2=0$.

967. Докажите, что значения многочлена x^3-x при целых значениях x кратны числу 6.

968. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечётных чисел делится на 8.

969. Если сторону квадрата увеличить на 4 см, то его площадь увеличится на 96 см^2. Найдите сторону исходного квадрата.

П

970. Упростите выражение и найдите его значение при указанном значении переменной:
а) $(6x-1)(6x+1)-(12x-5)(3x+1)$ при $x=0,2$;
б) $(5+2x)^2-2,5x(8x+7)$ при $x=-0,5$.

971. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:
а) $y=0,24x+6$;   в) $y=-0,6x+4,2$;
б) $y=-5x-1,8$;   г) $y=-x-3,8$.

972. Покажите, как примерно расположен в координатной плоскости график функции:
а) $y=-0,9x+4$;   г) $y=-9$;
б) $y=2,3x$;   д) $y=-9,5$;
в) $y=\frac{x}{10}$;   е) $y=4\frac{1}{3}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример целого выражения и выражения, не являющегося целым.
2. Какие действия надо выполнить и в каком порядке, чтобы представить целое выражение $4x(2-x)^2+(x^2-4)(x+4)$ в виде многочлена?
3. Какие способы разложения многочленов на множители вам известны?

Для тех, кто хочет знать больше

39. Возведение двучлена в степень

Вам известны формулы квадрата суммы и квадрата разности, куба суммы и куба разности. Так как разность $a-b$ можно рассматривать как сумму $a+(-b)$, то в каждом случае можно говорить не о двух формулах, а об одной — квадрате двучлена и кубе двучлена:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Нетрудно получить формулы для возведения двучлена в четвёртую, пятую и т. д. степень. Получить их можно последовательно одну за другой, умножая многочлен, записанный в правой части предшествующей формулы, на $a+b$. Например:

$$(a+b)^4=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b).$$

Умножение выполним «в столбик»:

$$\begin{array}{r} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+\ ab^3 \\ a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \end{array}$$

Итак, $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Умножая правую часть этого равенства на $a+b$, получим формулу пятой степени двучлена:

$$\begin{array}{r} a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ a+b \\ \hline a^5+4a^4b+\ 6a^3b^2+\ 4a^2b^3+\ ab^4 \\ a^4b+\ 4a^3b^2+\ 6a^2b^3+4ab^4+b^5 \\ \hline a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5. \end{array}$$

Значит,

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Для того чтобы заметить закономерность в формуле n-й степени двучлена $a+b$ при различных значениях n, выпишем их, начиная с $n=1$ и заканчивая $n=5$.

$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Рассматривая эти формулы, можно заметить, что в правой части каждой из них записан многочлен, содержащий $n+1$ членов, где n — показатель степени двучлена.

Первый член многочлена равен a^n, т. е. равен произведению a^n и b^0. Далее при переходе к каждому последующему члену показатель степени a уменьшается на 1, а показатель степени b увеличивается на 1, т. е. сумма показателей степеней в каждом слагаемом равна n.

Сложнее обстоит дело с коэффициентами. Чтобы выявить закономерность в их образовании, выпишем по порядку в строку коэффициенты многочленов при $n=2$, а затем при $n=3$:

1 2 1

1 3 3 1

Во второй строке первый и последний коэффициенты равны 1.

Нетрудно заметить, что второй коэффициент можно получить, сложив записанные над ним числа 1 и 2, третий — сложив записанные над ним числа 2 и 1.

По тому же правилу получаем строку для $n=4$ из строки, записанной для $n=3$:

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Аналогичным образом из строки

1 4 6 4 1

можно получить строку, в которой выписаны коэффициенты многочлена, полученного при возведении двучлена $a+b$ в пятую степень:

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Подмеченную закономерность нетрудно обосновать, если проанализировать приведённые ранее примеры на умножение «в столбик» многочлена $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ на двучлен $a+b$ и многочлена $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ на двучлен $a+b$.

Если добавить строку для $n = 0$ (при $a \neq 0$ или $b \neq 0$), то коэффициенты всех строк можно расположить в виде треугольника:

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
......	....

В нём «боковые стороны» состоят из единиц, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, записанных над ним. Этот треугольник называют треугольником Паскаля по имени известного французского учёного Блеза Паскаля (1623—1662) — математика, физика, философа и литератора, описавшего такой треугольник в своём знаменитом трактате «Об арифметическом треугольнике».

Продолжая запись по подмеченному правилу, мы можем получить строку коэффициентов для $n = 6, 7, 8$ и т. д. в формуле

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Существует способ, позволяющий сразу найти коэффициенты многочлена для заданного n. Однако этот способ связан с понятиями, которые вам пока неизвестны.

Отметим ещё одну интересную закономерность в треугольнике Паскаля. Сумма коэффициентов при $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ и т. д. равна соответственно 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 и т. д. Вообще в равенстве

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

сумма коэффициентов многочлена равна 2^n. Убедиться в этом можно, подставив в это равенство $a = 1$ и $b = 1$.

Упражнения

973. Напишите строки треугольника Паскаля для $n = 6$; $n = 7$.

974. Используя треугольник Паскаля, напишите формулу для шестой степени двучлена $a + b$. Проверьте результат, умножив на $a + b$ многочлен, равный $(a + b)^5$.

975. Напишите формулу:

а) седьмой степени двучлена; б) восьмой степени двучлена.

976. Используя формулу четвёртой степени двучлена, преобразуйте выражение:

а) $(a^2 + 2b)^4$; б) $(a^3 - b)^4$.

977. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(a^2 + 3b^3)^3$; б) $(1 - 2xy)^4$.

978. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(x + y)^6 + (x - y)^6$; б) $(x + y)^6 - (x - y)^6$.

979. Выражение $(1 + y)^3 + (1 + y)^4 + (1 + y)^5$ заменили тождественно равным многочленом. Найдите коэффициент члена многочлена, содержащего: а) y^2; б) y^3.

980. Какой остаток получится при делении числа 147^6 на 145?

981. Докажите, что значение выражения:
а) $83^4 + 65$ кратно 81; б) $141^{10} + 88$ кратно 139.

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 11

982. Докажите тождество $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

983. Докажите, что значение выражения не зависит от x:
а) $(x + 7)^2 - (x - 5)(x + 19)$; б) $(x + 9)^2 + (8 - x)(x + 26)$.

984. Решите уравнение:
а) $(3x + 1)^3 = 27x^2(x + 1) + 8x + 2$;
б) $4x^2(2x + 9) = (2x + 3)^3 + 12(3x + 1)$.

985. Разложите на множители:
а) $b^2 + 10b + 25$; в) $16x^2 - 8x + 1$; д) $x^4 + 2x^2y + y^2$;
б) $c^2 - 8c + 16$; г) $4c^2 + 12c + 9$; е) $a^6 - 6a^3b^2 + 9b^4$.

986. Представьте в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена:
а) $a^4 - 8a^2 + 16$; е) $x + 1 + \frac{1}{4}x^2$;
б) $-4 - 4b - b^2$; ж) $y - y^2 - 0{,}25$;
в) $10x - x^2 - 25$; з) $9 - m + \frac{1}{36}m^2$;
г) $c^4d^2 + 1 - 2c^2d$; и) $-25 - 2n - 0{,}04n^2$.
д) $a^6b^2 + 12a^3b + 36$;

К параграфу 12

987. Вычислите:
а) $1005 \cdot 995$; в) $0{,}94 \cdot 1{,}06$; д) $10\frac{1}{7} \cdot 9\frac{6}{7}$;
б) $108 \cdot 92$; г) $1{,}09 \cdot 0{,}91$; е) $99\frac{7}{9} \cdot 100\frac{2}{9}$.

988. Представьте в виде многочлена:

а) $5y(y^2-3)(y^2+3)$;
б) $-8x(4x-x^3)(4x+x^3)$;
в) $(a^4-3)(a^4+3)(a^8+9)$;
г) $(1-b^3)(1+b^3)(1+b^6)$.

989. Упростите выражение:

а) $(a+2)(a-2)-a(a-5)$;
б) $(a-3)(3+a)+a(7-a)$;
в) $(b-4)(b+4)-(b-3)(b+5)$;
г) $(b+8)(b-6)-(b-7)(b+7)$;
д) $(c-1)(c+1)+(c-9)(c+9)$;
е) $(5+c)(c-5)-(c-10)(c+10)$.

990. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $(x-8)(x+8)-(x-12)(x+12)$;

б) $\left(y-\frac{5}{9}\right)\left(y+\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}-y\right)\left(\frac{2}{3}+y\right)$.

991. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x-5)^2+2x(x-3)$;
б) $(y+8)^2-4y(y-2)$;
в) $(a-4)(a+4)+(2a-1)^2$;
г) $(b-3)(b+3)-(b+2)^2$;
д) $(2a-5)^2-(5a-2)^2$;
е) $(3b-1)^2+(1-3b)^2$;
ж) $(2x+1)^2-(x+7)(x-3)$;
з) $(3y-2)^2-(y-9)(9-y)$.

992. При каком значении x удвоенное произведение двучленов $x+2$ и $x-2$ меньше суммы их квадратов на 16?

993. Представьте в виде многочлена:

а) $(x+y+1)(x+y-1)$;
б) $(m+n-3)(m+n+3)$;
в) $(a-b-5)(a-b+5)$;
г) $(c-d+8)(c-d-8)$;
д) $(p+2q-3)(p-2q-3)$;
е) $(a-3x+6)(a+3x+6)$.

994. Решите уравнение:

а) $(x-7)^2+3=(x-2)(x+2)$;
б) $(x+6)^2-(x-5)(x+5)=79$;
в) $(2x-3)^2-(7-2x)^2=2$;
г) $(5x-1)^2-(1-3x)^2=16x(x-3)$.

995. Разложите на множители:

а) $1-a^2b^2$;
б) $4x^2y^4-9$;
в) $0{,}09x^6-0{,}49y^2$;
г) $1{,}21a^2-0{,}36b^6$;
д) $1\frac{7}{9}x^2-\frac{9}{16}y^2$;
е) $0{,}01a^2b^4-1$.

996. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{38^2-17^2}{72^2-16^2}$;
б) $\dfrac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$;
в) $\dfrac{17{,}5^2-9{,}5^2}{131{,}5^2-3{,}5^2}$.

997. Представьте в виде произведения:

а) $x^{10}-1$;
б) $y^{12}-16$;
в) a^2x^8-81;
г) $36-b^4y^6$;
д) $25p^4q^4-1$;
е) $-9+121m^8n^8$;
ж) $0{,}01x^{16}-0{,}16$;
з) $1{,}69y^{14}-1{,}21$;
и) $\frac{4}{9}m^6-\frac{25}{36}$.

998. Разложите на множители:

а) $(x-5)^2-16$; б) $(b+7)^2-9$; в) $25-(3-x)^2$; г) $81-(a+7)^2$; д) $(7x-4)^2-(2x+1)^2$; е) $(n-2)^2-(3n+1)^2$; ж) $9(a+1)^2-1$; з) $4-25(x-3)^2$.

999. Преобразуйте в произведение:

а) $16-9(p+3)^2$; б) $9-25(4-x)^2$; в) $1-36(3y-1)^2$; г) $4-9(a+b)^2$.

1000. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $(n+1)^2-(n-1)^2$ делится на 4;
б) $(2n+3)^2-(2n-1)^2$ делится на 8;
в) $(3n+1)^2-(3n-1)^2$ делится на 12;
г) $(5n+1)^2-(2n-1)^2$ делится на 7.

1001. Найдите значение выражения:

а) $(3a-2b)^2-(2a-b)^2$ при $a=1{,}35$ и $b=-0{,}65$;
б) $(2y-c)^2+(y+2c)^2$ при $c=1{,}2$ и $y=-1{,}4$.

1002. Разложите на множители:

а) $0{,}027x^3+1$; б) $y^6-0{,}001x^3$; в) $d^3+0{,}008c^3$; г) $125-0{,}064p^3$.

1003. Представьте в виде произведения:

а) $\frac{27}{64}-y^{12}$; б) $-x^{15}+\frac{1}{27}$; в) $3\frac{3}{8}a^{15}+b^{12}$; г) $1\frac{61}{64}x^{18}+y^3$.

1004. Докажите, что значение выражения:

а) 41^3+19^3 делится на 60; б) 79^3-29^3 делится на 50; в) 66^3+34^3 делится на 400; г) 54^3-24^3 делится на 1080.

1005. Представьте в виде произведения:

а) $(x+1)^3+x^3$; б) $(y-2)^3-27$; в) $(a-b)^3+b^3$; г) $8x^3+(x-y)^3$; д) $27a^3-(a-b)^3$; е) $1000+(b-8)^3$.

К параграфу 13

1006. Представьте в виде многочлена:

а) $(a^2-7)(a+2)-(2a-1)(a-14)$;
б) $(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^3-3b)$.

1007. Представьте в виде многочлена:

а) $(x+4)(x^2-4x+16)$; б) $(3a+5)(9a^2-15a+25)$.

1008. Решите уравнение:

а) $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+4)=6$;
б) $(3x-1)(2x+7)-(x+1)(6x-5)=7$;
в) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-7)$;
г) $(6y+2)(5-y)=47-(2y-3)(3y-1)$.

1009. Докажите, что функция, заданная формулой

$$y = (2x - 5)(3 + 8x) - (1 - 4x)^2,$$

линейная. Принадлежит ли графику этой функции точка $A(-1; 10)$; точка $B(0; 16)$?

1010. Найдите значение выражения:

а) $(3n - 1)(n + 1) + (2n - 1)(n - 1) - (3n + 5)(n - 2)$ при $n = -3{,}5$;

б) $(5y - 1)(2 - y) - (3y + 4)(1 - y) + (2y + 6)(y - 3)$ при $y = 4$.

1011. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $(a - 3)(a^2 - 8a + 5) - (a - 8)(a^2 - 3a + 5)$;

б) $(x^2 - 3x + 2)(2x + 5) - (2x^2 + 7x + 17)(x - 4)$.

1012. Докажите тождество

$$(a^2 + b^2)(ab + cd) - ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = (ac + bd)(ad + bc).$$

1013. Докажите, что значение выражения

$$(b + c - 2a)(c - b) + (c + a - 2b)(a - c) - (a + b - 2c)(a - b)$$

при любых значениях a, b и c равно 0.

1014. Упростите выражение:

а) $(a + 8)^2 - 2(a + 8)(a - 2) + (a - 2)^2$;

б) $(y - 7)^2 - 2(y - 7)(y - 9) + (y - 9)^2$.

1015. Упростите:

а) $2(a^2 - 1)^2 - (a^2 + 3)(a^2 - 3) - \frac{1}{2}(a^2 + a - 4)(2a^2 + 3)$;

б) $4(m^3 - 3)^2 - (m^2 - 6)(m^2 + 6) - 9(8 - m + m^2)(1 - m)$.

1016. Представьте в виде многочлена

$$(a(a + 2b) + b^2)(a(a - 2b) + b^2)((a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2).$$

1017. Докажите тождество:

а) $(a + b)^2(a - b) - 2ab(b - a) - 6ab(a - b) = (a - b)^3$;

б) $(a + b)(a - b)^2 + 2ab(a + b) - 2ab(-a - b) = (a + b)^3$.

1018. Докажите тождество

$$(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = 2b^6.$$

1019. Найдите значение выражения:

а) $(y + 5)(y^2 - 5y + 25) - y(y^2 + 3)$ при $y = -2$;

б) $x(x + 3)^2 - (x - 1)(x^2 + x + 1)$ при $x = -4$;

в) $(2p - 1)(4p^2 + 2p + 1) - p(p - 1)(p + 1)$ при $p = 1{,}5$.

1020. В книге Леонарда Эйлера (XVIII в.) используется тождество

$$(p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2) = (pr + cqs)^2 + c(ps - qr)^2.$$

Докажите его.

1021. При каком значении a многочлен стандартного вида, тождественно равный произведению $(x^2+x-1)(x-a)$, не содержит:
а) x^2; б) x?

1022. При каком значении b многочлен стандартного вида, тождественно равный произведению $(x^2-10x+6)(2x+b)$:
а) не содержит x^2;
б) имеет равные коэффициенты при x^3 и при x?

1023. Представьте в виде произведения:
а) $7a^3+7b^3$; в) $5a^4+5b^4$; д) $1,2a^6+1,2b^6$;
б) $2a^4-2b^4$; г) $2,5a^6-2,5b^6$; е) $3a^8-3b^8$.

1024. Докажите, что число, равное разности $111\,111-222$, является квадратом натурального числа.

1025. Преобразуйте в произведение выражение:
а) $9c^{15}-c^{13}$; б) $x^{22}-\frac{1}{49}x^{20}$; в) $a^5-0,064a^2$; г) $y^7-1\frac{7}{9}y^5$.

1026. Представьте в виде произведения:
а) $2x^8-12x^4+18$; в) $a^4b+6a^2b^3+9b^5$;
б) $-2a^6-8a^3b-8b^2$; г) $4x+4xy^6+xy^{12}$.

1027. Разложите на множители:
а) $70a-84b+20ab-24b^2$; в) $12y-9x^2+36-3x^2y$;
б) $21bc^2-6c-3c^3+42b$; г) $30a^3-18a^2b-72b+120a$.

1028. Преобразуйте в произведение:
а) $3a^3-3ab^2+a^2b-b^3$; в) $3p-2c^3-3c^3p+2$;
б) $2x-a^2y-2a^2x+y$; г) $a^4-24+8a-3a^3$.

1029. Решите уравнение:
а) $x^3+3x^2-4x-12=0$; в) $y^3-6y^2=6-y$;
б) $2m^3-m^2-18m+9=0$; г) $2a^3+3a^2=2a+3$.

1030. Решите уравнение:
а) $x^3-2x^2-x+2=0$; в) $2y^3-y^2-32y+16=0$;
б) $y^3-y^2=16y-16$; г) $4x^3-3x^2=4x-3$.

1031. Разложите на множители:
а) $x^2-y^2-1,5(x-y)$; г) p^2-16c^2-p-4c;
б) $x^2-a^2+0,5(x+a)$; д) $a^2+6a+6b-b^2$;
в) $4a^2-b^2-2a+b$; е) $x^2-7x+7y-y^2$.

1032. Представьте в виде произведения:
а) $x^2(x+2y)-x-2y$; в) $a^3-5a^2-4a+20$;
б) $x^2(2y-5)-8y+20$; г) $x^3-4x^2-9x+36$.

1033. Разложите на множители:
а) $a^2-b^2+2(a+b)^2$; в) $2(x-y)^2+3x^2-3y^2$;
б) $b^2-c^2-10(b-c)^2$; г) $5a^2-5-4(a+1)^2$.

1034. Преобразуйте в произведение выражение:

а) $a^2+b^2-2ab-25$;
б) $36-b^2-c^2+2bc$;
в) $49-2ax-a^2-x^2$;
г) $b^2-a^2-12a-36$;
д) $81a^2+6bc-9b^2-c^2$;
е) $b^2c^2-4bc-b^2-c^2+1$.

1035. Разложите на множители:

а) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
б) $x^3-y^3-5x(x^2+xy+y^2)$;
в) $2b^3+a(a^2-3b^2)$;
г) p^3-2p^2+2p-1;
д) $8b^3+6b^2+3b+1$;
е) $a^3-4a^2+20a-125$.

1036. Представьте в виде произведения:

а) $x^3+y^3+2x^2-2xy+2y^2$;
б) $a^3-b^3+3a^2+3ab+3b^2$;
в) $a^4+ab^3-a^3b-b^4$;
г) $x^4+x^3y-xy^3-y^4$.

1037. Докажите, что многочлен принимает лишь неотрицательные значения:

а) $x^2-2xy+y^2+a^2$;
б) $4x^2+a^2-4x+1$;
в) $9b^2-6b+4c^2+1$;
г) $a^2+2ab+2b^2+2b+1$;
д) $x^2-4xy+y^2+x^2y^2+1$;
е) $x^2+y^2+2x+6y+10$.

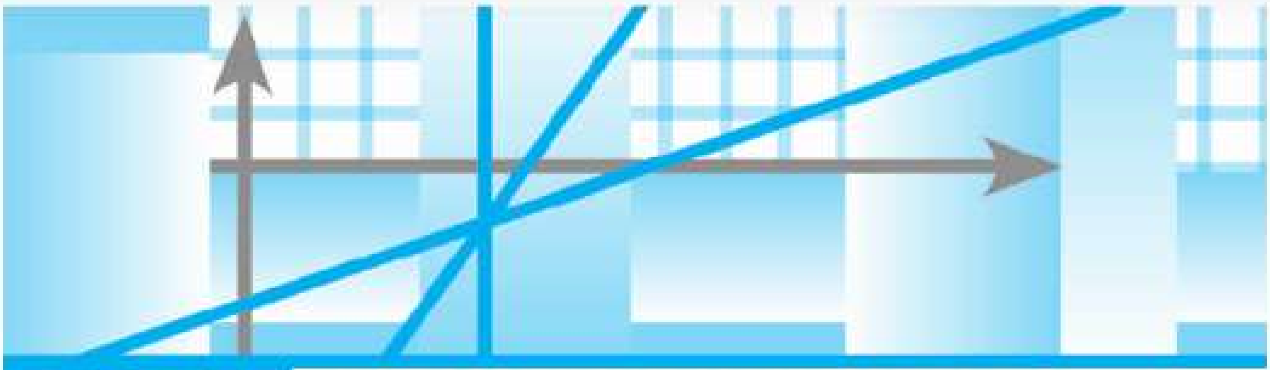
1038. Может ли выражение:

а) $a^2+16a+64$ принимать отрицательные значения;
б) $-b^2-25+10b$ принимать положительные значения;
в) $-x^2+6x-9$ принимать неотрицательные значения;
г) $(y+10)^2-0{,}1$ принимать отрицательные значения;
д) $0{,}001-(a+100)^2$ принимать положительные значения?

1039. Делится ли на 5 при любом целом n выражение:

а) $(2n+3)(3n-7)-(n+1)(n-1)$;
б) $(7n+8)(n-1)+(3n-2)(n+2)$?

1040. Докажите тождество $(10n+5)^2=100n(n+1)+25$. Используя это тождество, сформулируйте правило возведения в квадрат натурального числа, оканчивающегося цифрой 5. Найдите по этому правилу 25^2, 45^2, 75^2, 115^2.



Глава VI СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

С уравнениями с одной переменной вы познакомились в младших классах, а об уравнениях с двумя переменными и их системах вы узнаете в этой главе. Вы познакомитесь с понятием линейного уравнения с двумя переменными, научитесь строить графики таких уравнений. Вы узнаете, что значит решить систему линейных уравнений с двумя переменными, научитесь решать такие системы графически, способом подстановки и способом сложения. Теперь вы сможете решать текстовые задачи не только с помощью уравнений с одной переменной, но и с помощью систем уравнений с двумя переменными. Приобретённые вами знания и умения составят основу для изучения в дальнейшем приёмов решения более сложных систем уравнений.

§ 14 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

40. Линейное уравнение с двумя переменными

Пусть известно, что одно из двух чисел на 5 больше другого. Если первое число обозначить буквой x, а второе — буквой y, то соотношение между ними можно записать в виде равенства $x - y = 5$, содержащего две переменные. Такие равенства называют *уравнениями с двумя переменными* или *уравнениями с двумя неизвестными*.

Приведём другие примеры уравнений с двумя переменными: $5x + 2y = 10$, $-7x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 20$, $xy = 12$. Из этих уравнений первые два имеют вид $ax + by = c$, где a, b и c — числа. Такие уравнения называют *линейными уравнениями с двумя переменными*.

Определение. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа.

Уравнение $x - y = 5$ при $x = 8$, $y = 3$ обращается в верное равенство $8 - 3 = 5$. Говорят, что пара значений переменных $x = 8$, $y = 3$ является *решением* этого уравнения.

Определение. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное числовое равенство.

Нетрудно проверить, что решениями уравнения $x - y = 5$ являются также пары: $x = 105$, $y = 100$; $x = 4$, $y = -1$; $x = 3{,}5$, $y = -1{,}5$. Пары значений переменных записывают в скобках. Например, перечисленные пары можно записать так: (105; 100), (4; −1), (3,5; −1,5). При такой записи необходимо знать, значение какой из переменных стоит на первом месте, а какой — на втором. В записи решений уравнения с переменными x и y условимся на первом месте записывать значения x, а на втором — значения y.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют *равносильными*. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

- если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному;
- если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Рассмотрим уравнение

$$5x + 2y = 12. \qquad (1)$$

Воспользовавшись свойствами уравнений, выразим одну переменную через другую, например переменную y через x. Для этого перенесём слагаемое $5x$ в правую часть уравнения, изменив его знак:

$$2y = -5x + 12.$$

Разделим обе части этого уравнения на 2:

$$y = -2{,}5x + 6. \qquad (2)$$

Уравнение (2) равносильно уравнению (1). Пользуясь формулой $y = -2{,}5x + 6$, можно найти сколько угодно решений уравнения (1). Для этого достаточно взять произвольное x и вычислить соответствующее ему значение y. Например:

если $x = 2$, то $y = -2{,}5 \cdot 2 + 6 = 1$;
если $x = 0{,}4$, то $y = -2{,}5 \cdot 0{,}4 + 6 = 5$.

Пары чисел (2; 1), (0,4; 5) — решения уравнения (1). Вообще уравнение (1) имеет бесконечно много решений.

Иногда при решении задачи требуется найти все пары целых чисел или все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению с двумя переменными. В таких случаях говорят, что надо «решить уравнение в целых числах» или «решить уравнение в натуральных числах».

Проблема решения уравнений в натуральных числах подробно рассматривалась в работах известного греческого математика Диофанта (III в.). В его трактате «Арифметика» приводятся остроумные способы решения в натуральных числах самых разнообразных уравнений. В связи с этим уравнения с несколькими переменными, для которых требуется найти решения в натуральных или целых числах, называют диофантовыми уравнениями.

Рассмотрим задачу, в которой надо найти натуральные решения уравнения с двумя переменными.

Задача. Группу из 35 туристов решили расселить на теплоходе в трёхместные и четырёхместные каюты так, чтобы в каютах не оставалось свободных мест. Сколько трёхместных и сколько четырёхместных кают надо заказать?

▶ Очевидно, что разместить 35 туристов только в трёхместных или только в четырёхместных каютах невозможно. Допустим, что надо заказать x трёхместных и y четырёхместных кают. Тогда

$$3x + 4y = 35.$$

Требуется найти все пары натуральных значений переменных x и y, удовлетворяющие этому уравнению.

Из уравнения $3x + 4y = 35$ находим, что

$$y = \frac{35 - 3x}{4}.$$

Подставляя в это равенство вместо x последовательно числа 1, 2, 3 и т. д., найдём, при каких натуральных значениях x соответствующие значения y являются натуральными числами: если $x = 1$, то $y = 8$; если $x = 5$, то $y = 5$; если $x = 9$, то $y = 2$. Других пар натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $3x + 4y = 35$, нет, так как при других натуральных значениях x соответствующее значение y является либо дробным положительным числом, либо отрицательным числом.

Значит, надо заказать соответственно трёхместных и четырёхместных кают либо 1 и 8, либо 5 и 5, либо 9 и 2. ◁

Упражнения

1041. Является ли уравнение с двумя переменными линейным:
а) $3x - y = 17$; в) $13x + 6y = 0$;
б) $x^2 - 2y = 5$; г) $xy + 2x = 9$?

1042. Является ли пара чисел $x = 1\frac{5}{7}$ и $y = 4\frac{2}{7}$ решением уравнения $x + y = 6$? Укажите ещё два решения этого уравнения.

1043. Пары значений переменных x и y указаны в таблице:

x	−5	−4	−3	−1	0	4	5
y	0	3	4	−3	−5	−3	0

Какие из них являются решениями уравнения:
а) $2x + y = -5$; б) $x + 3y = -5$?

1044. Является ли решением уравнения $10x + y = 12$ пара чисел (3; −20), (−2; 12), (0,1; 11), (1; 2), (2; 1)?

1045. Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел:
а) $x = 2$, $y = 4{,}5$; б) $x = -1$, $y = 2$.

1046. Из линейного уравнения $4x - 3y = 12$ выразите:
а) y через x; б) x через y.

1047. Из уравнения $2u + v = 4$ выразите:
а) переменную v через u;
б) переменную u через v.

1048. Выразите из данного уравнения переменную y через x; используя полученную формулу, найдите три каких-либо решения этого уравнения:
а) $3x + 2y = 12$; б) $5y - 2x = 1$.

1049. а) Выразив из уравнения $x - 6y = 4$ переменную x через y, найдите три каких-либо решения этого уравнения.
б) Выразив переменную y через переменную x, найдите три каких-либо решения уравнения $3x - y = 10$.

1050. Среди решений уравнения $x + 2y = 18$ найдите такую пару, которая составлена из двух одинаковых чисел.

1051. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 2y = 8$, если известно, что пара $x = 2$, $y = 1$ является решением этого уравнения.

1052. Из двухрублёвых и пятирублёвых монет составлена сумма в 28 р. Сколько было взято двухрублёвых монет?

1053. Ученик купил тетради по 50 р. и карандаши по 70 р. Сколько тетрадей купил ученик, если известно, что за всю покупку он заплатил 440 р.?

1054. Хозяйка купила глубокие и мелкие тарелки, уплатив за покупку 3200 р. Глубокая тарелка стоит 350 р., а мелкая тарелка стоит 300 р. Сколько глубоких и сколько мелких тарелок купила хозяйка?

1055. Мука расфасована в пакеты по 3 кг и по 2 кг. Сколько пакетов каждого вида надо взять, чтобы получить 20 кг муки?

1056. *(Для работы в парах.)* Купили тетради в линейку, по 10 р. за каждую, и тетради в клетку, по 15 р. за каждую, затратив на всю покупку 320 р.

а) Выясните, можно ли при указанном условии купить одинаковое количество тетрадей в линейку и тетрадей в клетку.
б) Укажите все возможные пары, которые можно составить из числа тетрадей в линейку и числа тетрадей в клетку при указанном условии.
в) Найдите максимальное количество тетрадей, которые можно купить при указанном условии.
г) Найдите минимальное количество тетрадей, которые можно купить при указанном условии.

1) Выполните совместно задания а) и б).
2) Распределите, кто выполняет задание в), а кто — задание г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, верно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

1057. В результате перестановки цифр двузначного числа оно увеличилось на 54. Найдите это число.

1058. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 6 — остаток 2.

П

1059. Найдите значение выражения:
а) $2c(c-4)^2 - c^2(2c-10)$ при $c = 0{,}2$;
б) $(a-4b)(4b+a)$ при $a = 1{,}2$, $b = -0{,}6$;
в) $3p(1+0{,}1p)^2 - 0{,}6p^2$ при $p = -2$.

1060. Разложите на множители:
а) $1 + a - a^2 - a^3$; б) $8 - b^3 + 4b - 2b^2$.

41. График линейного уравнения с двумя переменными

Каждая пара чисел, являющаяся решением уравнения с переменными x и y, изображается в координатной плоскости точкой, координатами которой служит эта пара чисел (абсциссой служит значение x, а ординатой — значение y). Все такие точки образуют *график уравнения*.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Выясним, что представляет собой график уравнения

$$3x + 2y = 6.$$

Выразим переменную y через x:

$$y = -1{,}5x + 3.$$

Формулой $y = -1{,}5x + 3$ задаётся линейная функция, графиком которой служит прямая (рис. 89). Так как уравнения

$$3x + 2y = 6 \text{ и } y = -1{,}5x + 3$$

равносильны, то эта прямая является и графиком уравнения $3x + 2y = 6$.

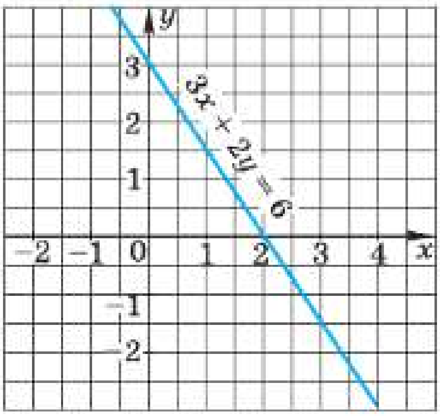


Рис. 89

С помощью таких же рассуждений можно показать, что графиком любого линейного уравнения с переменными x и y, в котором коэффициент при y не равен нулю, является прямая.

Если в линейном уравнении коэффициент при y равен нулю, а коэффициент при x отличен от нуля, то графиком такого уравнения также является прямая. Рассмотрим, например, уравнение

$$2x + 0y = 12.$$

Его решениями служат пары чисел $(x; y)$, в которых $x = 6$, а y — любое число, например $(6; 2)$, $(6; 0)$, $(6; -4{,}5)$. График уравнения состоит из всех точек, абсцисса которых равна 6, а ордината — произвольному числу. Такие точки образуют прямую, проходящую через точку $(6; 0)$ и параллельную оси y (рис. 90).

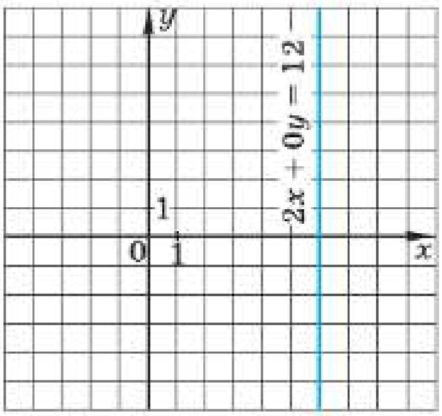


Рис. 90

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

Рассмотрим теперь случай, когда в линейном уравнении оба коэффициента при переменных равны нулю.

Уравнение

$$ax + by = c,$$

в котором оба коэффициента при переменных равны нулю, имеет вид $0x + 0y = c$. При $c = 0$ любая пара чисел является решением этого уравнения, а его графиком — вся координатная плоскость. При $c \neq 0$ уравнение не имеет решений и его график не содержит ни одной точки.

Приведём примеры построения графиков линейных уравнений.

Пример 1. Построим график уравнения $3x - 4y = 12$.

▶ В уравнении $3x - 4y = 12$ коэффициенты при переменных отличны от нуля. Поэтому его графиком является прямая. Прямая определяется двумя точками. Найдём координаты двух каких-либо точек прямой:

если $x = 0$, то $y = -3$; если $x = 2$, то $y = -1{,}5$.

Отметим точки $(0; -3)$ и $(2; -1{,}5)$ и проведём через них прямую (рис. 91). Эта прямая — график уравнения $3x - 4y = 12$. ◁

Пример 2. Построим график уравнения $0{,}5x = -1{,}5$.

▶ Это уравнение можно записать в виде $0{,}5x + 0y = -1{,}5$. Его решениями служат пары чисел, в которых $x = -3$, y — произвольное число. Графиком уравнения является прямая, проходящая через точку $(-3; 0)$ и параллельная оси y (рис. 92). ◁

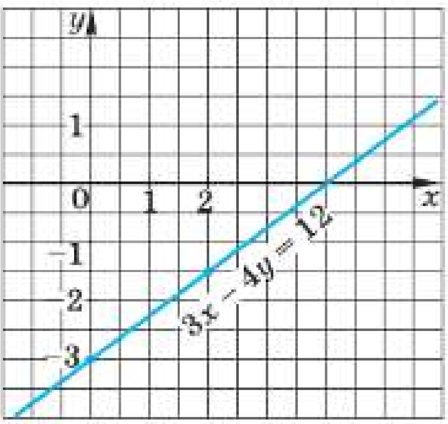


Рис. 91

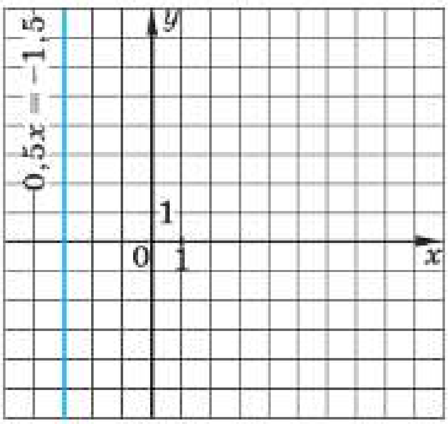


Рис. 92

Упражнения

1061. Принадлежит ли графику уравнения $3x + 4y = 12$ точка:
а) $A(4; 1)$; б) $B(1; 3)$; в) $C(-6; -7{,}5)$; г) $D(0; 3)$?

1062. Какие из точек $A(6; 1)$, $B(-6; -5)$, $C(0; -2)$, $D(-1; 3)$ принадлежат графику уравнения $x - 2y = 4$?

1063. Докажите, что графики уравнений $3x - y = -5$, $-x + 10y = 21$, $11x + 21y = 31$ проходят через точку $P(-1; 2)$.

1064. Постройте график уравнения:
а) $2x - y = 6$; в) $x + 6y = 0$; д) $1{,}2x = -4{,}8$;
б) $1{,}5x + 2y = 3$; г) $0{,}5y - x = 1$; е) $1{,}5y = 6$.

1065. Постройте график уравнения:
а) $x + y = 5$; б) $y - 4x = 0$; в) $1{,}6x = 4{,}8$; г) $0{,}5y = 1{,}5$.

1066. Постройте график уравнения:
а) $x - y - 1 = 0$; в) $2(x - y) + 3y = 4$;
б) $3x = y + 4$; г) $(x + y) - (x - y) = 4$.

1067. На прямой, являющейся графиком уравнения $21x - 5y = 100$, взята точка, абсцисса которой равна 3. Найдите ординату этой точки.

1068. Известно, что ордината некоторой точки прямой, являющейся графиком уравнения $12x - 5y = 132$, равна 0. Найдите абсциссу этой точки.

1069. *(Для работы в парах.)* Не выполняя построения, определите, в каких координатных четвертях расположен график уравнения:
а) $12x - 8y = 25$; б) $6x + 3y = 11$; в) $1{,}5x = 150$; г) $0{,}2x = 43$.

1) Обсудите друг с другом, в каких координатных углах при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ может быть расположен график уравнения: $ax = b$; $ay = b$; $ax + by = c$.
2) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, верно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

РЕНЕ ДЕКАРТ (1596—1650) — французский философ, математик и физик. Создал основы аналитической геометрии, ввёл понятие переменной величины, разработал метод координат. Осуществил связь алгебры с геометрией.

1070. Решите уравнение:

а) $\frac{16-x}{8}-\frac{18-x}{12}=0$; б) $\frac{x-15}{2}-\frac{2x+1}{8}+1=0$.

1071. Найдите значение выражения:

а) $a(a-4)-(a+4)^2$ при $a=-1\frac{1}{4}$;

б) $(2a-5)^2-4(a-1)(3+a)$ при $a=\frac{1}{12}$.

42. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Задача. Сумма двух чисел равна 12, а их разность равна 2. Найдите эти числа.

▶ Обозначим первое число буквой x, а второе буквой y. По условию задачи сумма чисел равна 12, т. е.

$$x+y=12.$$

Так как разность чисел равна 2, то

$$x-y=2.$$

Мы составили два уравнения с двумя переменными. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти такие значения переменных, которые обращают в верное равенство каждое из уравнений $x+y=12$ и $x-y=2$, т. е. найти общие решения этих уравнений. В таких случаях говорят, что требуется *решить систему уравнений*.

Систему уравнений принято записывать с помощью фигурной скобки. Составленную систему уравнений можно записать так:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2. \end{cases}$$

ПЬЕР ФЕРМА (1601—1665) — французский математик, один из создателей аналитической геометрии и теории чисел. Занимался теорией решения алгебраических уравнений с несколькими переменными.

Пара значений переменных $x = 7$, $y = 5$ служит решением каждого уравнения системы, так как оба равенства $7 + 5 = 12$ и $7 - 5 = 2$ являются верными. Такую пару называют *решением системы*. ◁

Определение. Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Для того чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными, можно использовать графики уравнений.

Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - y = -9. \end{cases}$$

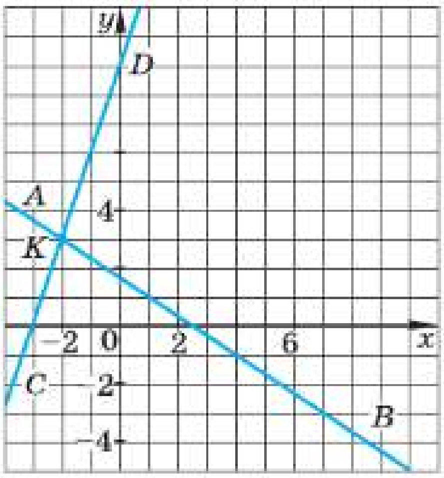


Рис. 93

Построим в координатной плоскости графики уравнений системы. Графиком первого уравнения является прямая AB, а графиком второго — прямая CD (рис. 93).

Координаты любой точки прямой AB являются решением уравнения $2x + 3y = 5$, а координаты любой точки прямой CD являются решением уравнения $3x - y = -9$. Координаты точки пересечения прямых удовлетворяют как первому уравнению, так и второму, т. е. являются решением системы. Графики пересекаются в точке $K(-2; 3)$. Значит, система имеет единственное решение: $x = -2$, $y = 3$.

Применённый нами способ решения системы уравнений называется *графическим*. Заметим, что графический способ обычно позволяет находить решения лишь приближённо.

Рассмотрим системы двух линейных уравнений с двумя переменными, в каждом из которых хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Выясним, всегда ли такая система имеет решения, и если имеет, то сколько. Графиками уравнений системы являются прямые. Если эти прямые пересекаются, то система имеет единственное решение; если прямые параллельны, то система не имеет решений; если прямые совпадают, то решений бесконечно много.

Пример 1. Выясним, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 11x + 10y = 120, \\ 6x + y = 18. \end{cases}$$

▶ Рассмотрим, каково взаимное расположение графиков уравнений данной системы. Для этого выразим из каждого уравнения y через x, получим

$$\begin{cases} y = -1{,}1x + 12, \\ y = -6x + 18. \end{cases}$$

Уравнениями $y = -1{,}1x + 12$ и $y = -6x + 18$ задаются линейные функции. Угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками этих функций, различны.
Значит, эти прямые пересекаются и система имеет единственное решение. ◁

П р и м е р 2. Рассмотрим, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 8x + 20y = 3, \\ 2x + 5y = 16. \end{cases}$$

▶ Из каждого уравнения системы выразим y через x:

$$\begin{cases} y = -0{,}4x + 0{,}15, \\ y = -0{,}4x + 3{,}2. \end{cases}$$

Прямые, являющиеся графиками линейных функций

$$y = -0{,}4x + 0{,}15 \text{ и } y = -0{,}4x + 3{,}2,$$

параллельны, так как их угловые коэффициенты одинаковы, а точки пересечения с осью y различны.
Отсюда следует, что данная система уравнений не имеет решений. ◁

П р и м е р 3. Выясним, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 2y = -18, \\ 15x + 6y = -54. \end{cases}$$

▶ Выразив из каждого уравнения системы y через x, получим

$$\begin{cases} y = -2{,}5x - 9, \\ y = -2{,}5x - 9. \end{cases}$$

Очевидно, что графики уравнений совпадают. Это означает, что любая пара чисел $(x_0; y_0)$, в которой x_0 — произвольное число, а $y_0 = -2{,}5x_0 - 9$, является решением системы.
Система имеет бесконечно много решений. ◁

Упражнения

1072. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ пара чисел: а) $x = 3$, $y = 1$; б) $x = 2$, $y = 2$?

1073. Является ли пара чисел $u = 3$, $v = -1$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3u + v = 8, \\ 7u - 2v = 23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} v + 2u = 5, \\ u + 2v = 1? \end{cases}$

1074. Какие из пар $(-3; 4)$, $(-2; -6)$, $(-4; 3)$ являются решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 3x + 4y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 13x - y = 0, \\ 5x - y = -4? \end{cases}$

1075. Составьте какую-либо систему линейных уравнений с переменными x и y, решением которой служит пара:
а) $x = 4$, $y = 1$; б) $x = 0$, $y = 3$.

1076. Решите графически систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 3y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 0, \\ -3x + 4y = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 3x + 10y = -12. \end{cases}$

1077. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x + 3y = -5. \end{cases}$

1078. Выясните, имеет ли система решения и сколько:

а) $\begin{cases} 4y - x = 12, \\ 3y + x = -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1{,}5x = 1, \\ -3x + 2y = -2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x = 11 - 2y, \\ 6y = 22 - 4x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ 3y - x = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ y = -0{,}5x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -x + 2y = 8, \\ x + 4y = 10. \end{cases}$

1079. *(Для работы в парах.)* Имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} x = 6y - 1, \\ 2x - 10y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y = 4, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 12x - 3y = 5, \\ 6y - 24x = -10? \end{cases}$

1) Обсудите друг с другом, от чего зависит ответ на вопрос задачи.
2) Выполните совместно задание а).
3) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
4) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.

1080. Укажите какие-нибудь три решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 3x - 9y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5y + x = -0{,}5, \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$

П

1081. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-3}{4} - 3x = \frac{x+1}{2}$; б) $6 = \frac{3x-1}{3} - \frac{x}{5}$.

1082. Представьте в виде многочлена:

а) $(5c^2 - c + 8)(2c - 3) - 16$; б) $18m^3 - (3m - 4)(6m^2 + m - 2)$.

1083. Разложите на множители:

а) $a^3 + a^2 - x^2a - x^2$; б) $b^3 + b^2c - 9b - 9c$.

Контрольные вопросы и задания

1 Дайте определение линейного уравнения с двумя переменными. Приведите пример.

2 Что называется решением уравнения с двумя переменными? Является ли пара значений переменных $x = 7$, $y = 3$ решением уравнения $2x + y = 17$?

3 Что является графиком уравнения $ax + by = c$ с переменными x и y, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$?

4 Что называется решением системы уравнений с двумя переменными? Что значит решить систему уравнений?

5 Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?

§ 15 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

43. Способ подстановки

Рассмотрим способ решения систем линейных уравнений с двумя переменными, называемый *способом подстановки*. Начнём с примера.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ -5x + 2y = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

▶ Выразим из первого уравнения y через x: $y = 7 - 3x$.

Подставив во второе уравнение вместо y выражение $7 - 3x$, получим систему

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ -5x + 2(7 - 3x) = 3. \end{cases} \qquad (2)$$

Нетрудно показать, что системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.

В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение:

$$-5x + 14 - 6x = 3,$$
$$-11x = -11,$$
$$x = 1.$$

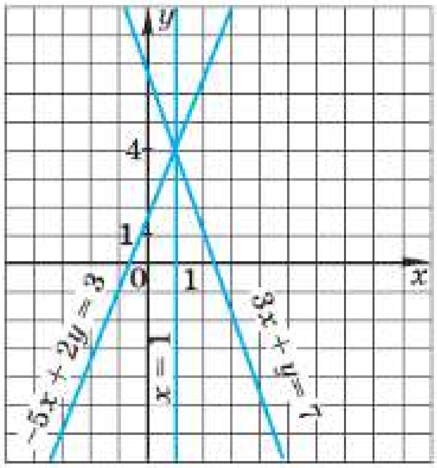


Рис. 94

Подставив в равенство $y = 7 - 3x$ вместо x число 1, найдём соответствующее значение y:

$$y = 7 - 3 \cdot 1,$$
$$y = 4.$$

Пара $(1; 4)$ — решение системы (2), а значит, и системы (1). ◁

Решение системы (1) мы свели к решению системы (2). При этом мы воспользовались тем, что системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*. Системы, не имеющие решений, также считают равносильными.

Геометрически равносильность систем (1) и (2) означает, что графики уравнений системы (1) пересекаются в той же точке, что и графики уравнений системы (2), т. е. все три прямые проходят через одну и ту же точку (рис. 94).

Мы решили систему (1), используя способ подстановки. При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:

1) выражают из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставляют в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение второй переменной.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 6y = 6, \\ 3x + 4y = 9. \end{cases}$$

▶ Выразим из второго уравнения x через y: $3x = 9 - 4y$, $x = \frac{9-4y}{3}$.

Подставим в первое уравнение вместо буквы x выражение $\frac{9-4y}{3}$:

$$7 \cdot \frac{9-4y}{3} + 6y = 6.$$

Решим полученное уравнение с переменной y:

$$7(9-4y) + 3 \cdot 6y = 3 \cdot 6,$$
$$63 - 28y + 18y = 18,$$
$$-10y = -45, \quad y = 4{,}5.$$

Подставим в уравнение $x = \frac{9-4y}{3}$ вместо y число 4,5:

$$x = \frac{9 - 4 \cdot 4{,}5}{3}, \quad x = -3.$$

Ответ: $x = -3$, $y = 4{,}5$. ◁

Упражнения

1084. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x - 1, \\ 5x + 2y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2 - y, \\ 3x - 2y - 11 = 0. \end{cases}$

1085. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 6x - y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 3x - 5y = 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y - x = 20, \\ 2x - 15y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x - 3y = 13, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - y = 11, \\ 6x - 2y = 13; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 25 - x = -4y, \\ 3x - 2y = 30. \end{cases}$

1086. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 7x - 2y = 31; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8y - x = 4, \\ 2x - 21y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - 2x = 4, \\ 7x - y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x = y + 0{,}5, \\ 3x - 5y = 12. \end{cases}$

1087. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2u + 5v = 0, \\ -8u + 15v = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4u + 3v = 14, \\ 5u - 3v = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5p - 3q = 0, \\ 3p + 4q = 29; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10p + 7q = -2, \\ 2p - 22 = 5q. \end{cases}$

1088. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x + 6y = -20, \\ 9y + 2x = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x + 2y = 0, \\ 4y + 9x = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 1 = 8y, \\ 11y - 3x = -11. \end{cases}$

1089. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков уравнений:
а) $7x + 4y = 23$ и $8x - 10y = 19$; б) $11x - 6y = 2$ и $-8x + 5y = 3$.

1090. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений, не выполняя построения:
а) $5x - 4y = 16$ и $x - 2y = 6$; б) $20x - 15y = 100$ и $3x - y = 6$.

1091. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3(x - 5) - 1 = 6 - 2x, \\ 3(x - y) - 7y = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6(x + y) - y = -1, \\ 7(y + 4) - (y + 2) = 0. \end{cases}$

1092. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5y + 8(x - 3y) = 7x - 12, \\ 9x + 3(x - 9y) = 11y + 46; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2(a - b) + 16 = 3(b + 7), \\ 6a - (a - 5) = -8 - (b + 1). \end{cases}$

1093. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{2m}{5} + \frac{n}{3} = 1, \\ \frac{m}{10} - \frac{7n}{6} = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{a}{6} - 2b = 6, \\ -3a + \frac{b}{2} = -37; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x - \frac{3y}{5} = -4, \\ x + \frac{2y}{5} = -3. \end{cases}$

1094. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{y}{4} - \frac{x}{5} = 6, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2, \\ \frac{3x}{2} - y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{6x}{5} + \frac{y}{15} = 2{,}3, \\ \frac{x}{10} - \frac{2y}{3} = 1{,}2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3x}{5} - 2y = 5, \\ x - \frac{3y}{2} = 6{,}5. \end{cases}$

1095. Упростите выражение:

а) $(2x-3y)^2+(2x+3y)^2$; в) $2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)^2+(2x-y)^2$;

б) $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2$; г) $3\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{9}\right)^2-(3x-y)^2$.

1096. Разложите на множители:

а) $x^5+4a^2x^3-4ax^4$; б) $4a^6-12a^5b+9a^4b^2$.

1097. Докажите, что все точки графика функции, заданной формулой $y=x^2-4x+5$, расположены в верхней полуплоскости.

44. Способ сложения

Рассмотрим ещё один способ решения систем линейных уравнений — *способ сложения*. При решении систем этим способом, как и при решении способом подстановки, мы переходим от данной системы к другой, равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=-5, \\ x-3y=38. \end{cases} \qquad (1)$$

▶ В уравнениях этой системы коэффициенты при y являются противоположными числами. Сложив почленно левые и правые части уравнений, получим уравнение с одной переменной $3x=33$. Заменим одно из уравнений системы (1), например первое, уравнением $3x=33$. Получим систему

$$\begin{cases} 3x=33, \\ x-3y=38. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) равносильна системе (1).

Решим систему (2). Из уравнения $3x=33$ находим, что $x=11$. Подставив это значение x в уравнение

$$x-3y=38,$$

получим уравнение с переменной y:

$$11-3y=38.$$

Решим это уравнение:

$$-3y=27,$$
$$y=-9.$$

Пара $(11; -9)$ — решение системы (2), а значит, и данной системы (1). ◁

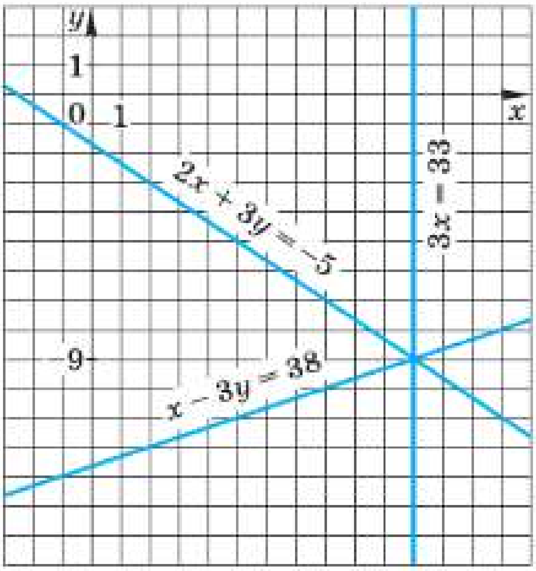


Рис. 95

Воспользовавшись тем, что в уравнениях системы (1) коэффициенты при y являются противоположными числами, мы свели её решение к решению равносильной системы (2), в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

Геометрически равносильность систем (1) и (2) означает, что графики уравнений $2x+3y=-5$ и $x-3y=38$ пересекаются в той же точке, что и графики уравнений $3x=33$ и $x-3y=38$, т. е. все три прямые пересекаются в одной точке (рис. 95).

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} 5x+11y=8, \\ 10x-7y=74. \end{cases}$

▶ Почленное сложение уравнений системы не приведёт к исключению одной из переменных. Однако если умножить все члены первого уравнения на -2, а второе уравнение оставить без изменений, то коэффициенты при x в полученных уравнениях будут противоположными числами:

$$\begin{cases} -10x-22y=-16, \\ 10x-7y=74. \end{cases}$$

Теперь почленное сложение приводит к уравнению с одной переменной $-29y=58$. Из этого уравнения находим, что $y=-2$. Подставив во второе уравнение вместо y число -2, найдём значение x:

$$10x-7\cdot(-2)=74, \quad 10x=60, \quad x=6.$$

Ответ: $x=6$, $y=-2$. ◁

Пример 3. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x-5y=93, \\ 5x-4y=103. \end{cases}$

▶ Подберём множители к уравнениям системы так, чтобы после умножения на них коэффициенты при y стали противоположными числами. Умножив первое уравнение системы на -4, а второе на 5, получим

$$\begin{cases} -12x+20y=-372, \\ 25x-20y=515. \end{cases}$$

Отсюда найдём, что $13x=143$, $x=11$. Подставив значение x в уравнение $5x-4y=103$, найдём, что $y=-12$.

Ответ: $x=11$, $y=-12$. ◁

Мы рассмотрели примеры решения систем способом сложения. При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

1) умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение второй переменной.

Заметим, что если коэффициенты при одной из переменных являются противоположными числами, то решение сразу начинают с почленного сложения уравнений.

Упражнения

1098. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 7y = 30, \\ 4x - 5y = 90; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x - 17y = 4, \\ -8x + 15y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 13x - 8y = 28, \\ 11x - 8y = 24. \end{cases}$

1099. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - 6y = 17, \\ 5x + 6y = 13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -5x + 2y = 45; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 7y = -12, \\ -4x + 3y = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9x - 4y = -13, \\ 9x - 2y = -20. \end{cases}$

1100. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 40x + 3y = 10, \\ 20x - 7y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 33a + 42b = 10, \\ 9a + 14b = 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 10x - 9y = 8, \\ 21y + 15x = 0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 15x - 3y = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 13x - 12y = 14, \\ 11x - 4 = 18y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 9y + 8z = -2, \\ 5z = -4y - 11. \end{cases}$

1101. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 12x - 7y = 2, \\ 4x - 5y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x = 25y + 1, \\ 5x - 16y = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7u + 2v = 1, \\ 17u + 6v = -9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4b + 7a = 90, \\ 5a - 6b = 20. \end{cases}$

1102. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 0,75x + 20y = 95, \\ 0,32x - 25y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 10x = 4,6 + 3y, \\ 4y + 3,2y = 6x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,5u - 0,6v = 0, \\ 0,4u + 1,7v = 10,9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3b + 10a - 0,1 = 0, \\ 15a + 4b - 2,7 = 0. \end{cases}$

1103. Составьте уравнение вида $y = kx + b$, график которого проходит через точки:

а) $M(5; 5)$ и $N(-10; -19)$; в) $A(8; -1)$ и $B(-4; 17)$;
б) $P(4; 1)$ и $Q(3; -5)$; г) $C(-19; 31)$ и $D(1; -9)$.

1104. График линейной функции пересекает оси координат в точках $(-5; 0)$ и $(0; 11)$. Задайте эту функцию формулой.

1105. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(-1; 3)$ и $B(2; -1)$. Напишите уравнение этой прямой.

1106. График линейной функции пересекает ось x в точке с абсциссой 4, а ось y в точке с ординатой 11. Задайте эту функцию формулой.

1107. Задайте формулой линейную функцию, график которой изображён на рисунке 96.

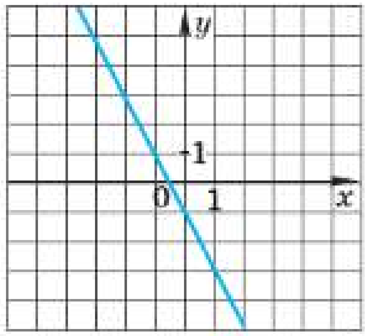


Рис. 96

1108. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5(x + 2y) - 3 = x + 5, \\ y + 4(x - 3y) = 50; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2,5(x - 3y) - 3 = -3x + 0,5, \\ 3(x + 6y) + 4 = 9y + 19. \end{cases}$

1109. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0, \\ 5x - y = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{5}m - \frac{1}{6}n = 0, \\ 5m - 4n = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,5x + 0,2y = 7, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{10}y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{6}u - \frac{1}{3}v = -3, \\ 0,2u + 0,1v = 3,9. \end{cases}$

1110. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 5 = 0, \\ 2x - y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 0, \\ 3(x - 1) - 9 = 1 - y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 7y = 4, \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{6} = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5x}{6} - y = -\frac{5}{6}, \\ \frac{2x}{3} + 3y = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

1111. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}y = 4, \\ 6x + 5y = 150; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, \\ 2x + 3y = -12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{3}v - \frac{1}{8}u = 3, \\ 7u + 9v = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4a - 5b - 10 = 0, \\ \frac{a}{5} - \frac{b}{3} + \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$

1112. Имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -6x + 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5x + 2y = 7, \\ 15x - 6y = -21? \end{cases}$

П

1113. Разложите на множители:

а) $15a^2 - 15b^2$; в) $10a^3 + 10b^3$; д) $47a^6 - 47b^6$;
б) $29a^2 + 29b^2 + 58ab$; г) $18a^3 - 18b^3$; е) $51a^6 + 51b^6$.

1114. Упростите выражение:

а) $2x(8x - 1) - (4x + 1)^2$; б) $4(3y - 1)^2 - 18y(2y - 1)$.

45. Решение задач с помощью систем уравнений

При решении задач с помощью систем уравнений поступают следующим образом:

1) обозначают некоторые неизвестные числа буквами и, используя условие задачи, составляют систему уравнений;
2) решают эту систему;
3) истолковывают результат в соответствии с условием задачи.

Задача 1. Масса 15 кирпичей и 5 шлакоблоков равна 64 кг. Какова масса одного кирпича и одного шлакоблока, если 5 кирпичей тяжелее 2 шлакоблоков на 3 кг?

▶ Пусть масса кирпича x кг, а шлакоблока y кг. Тогда масса 15 кирпичей и 5 шлакоблоков будет $15x + 5y$ кг. По условию задачи она равна 64 кг, поэтому $15x + 5y = 64$.
Известно, что 5 кирпичей тяжелее 2 шлакоблоков на 3 кг. Значит,

$$5x - 2y = 3.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти такие значения x и y, которые удовлетворяют как первому, так и второму уравнению, т. е. удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 15x + 5y = 64, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $x = 2{,}6$, $y = 5$.

Ответ: масса кирпича 2,6 кг, а шлакоблока 5 кг. ◁

Задача 2. Можно ли разменять сторублёвую купюру пятирублёвыми и однорублёвыми монетами так, чтобы всех монет было 30?

▶ Допустим, что следует взять x пятирублёвых и y однорублёвых монет. По условию $x + y = 30$. Так как с помощью этих монет нужно разменять 100 р., то должно выполняться равенство $5x + y = 100$. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ 5x + y = 100. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что $x = 17\frac{1}{2}$, $y = 12\frac{1}{2}$.

По смыслу задачи x и y должны быть натуральными числами, а мы получили дробные числа.

Ответ: разменять сторублёвую купюру указанным способом невозможно. ◁

Упражнения

1115. В фермерском хозяйстве под гречиху и просо отведено 19 га, причём гречиха занимает на 5 га больше, чем просо. Сколько гектаров отведено под каждую из этих культур?

1116. Техническое переоснащение цеха позволило выпустить в феврале на 165 изделий больше, чем в январе. Сколько изделий было выпущено в январе и сколько в феврале, если известно, что за эти месяцы цех выпустил 1315 изделий?

1117. В мастерской «Автосервис» отремонтировали 22 легковых и грузовых автомобиля. Среди них легковых было на 8 меньше, чем грузовых. Сколько грузовых автомобилей отремонтировали в мастерской?

1118. На теннисном корте для игры пар теннисистов выделяется площадка прямоугольной формы. Найдите длину и ширину площадки, если известно, что длина больше ширины на 12,8 м, а периметр прямоугольника равен 69,48 м.

1119. Основание равнобедренного треугольника на 7 см больше его боковой стороны. Найдите боковую сторону треугольника, если его периметр равен 43 см.

1120. *Старинная задача.* Ослица и мул шли вместе, нагруженные равными по весу мешками. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. «Что ты жалуешься, — сказал мул, — если ты дашь мне твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я тебе дам один мешок, то наши грузы сравняются». Сколько мешков нёс каждый?

1121. *Старинная задача.* Если A получит от B 100 рупий, то станет вдвое его богаче, а если A даст B 10 рупий, то B станет вшестеро богаче. Сколько денег у каждого?

1122. Сколько лет брату и сколько лет сестре, если 2 года назад брат был старше сестры в 2 раза, а 8 лет назад — в 5 раз?

1123. Два автомата изготавливают детали. Число деталей, изготовленных первым автоматом за 3 ч и вторым за 2 ч, составляет 720 штук. Четвёртая часть деталей, изготовленных обоими автоматами за 2 ч, составила 150 штук. Сколько деталей изготовлял каждый автомат за час?

1124. За 4 ч езды на автомашине и 7 ч езды на поезде туристы проехали 640 км. Какова скорость поезда, если она на 5 км/ч больше скорости автомашины?

1125. Теплоход проходит за 3 ч по течению и 2 ч против течения 240 км. Этот же теплоход за 3 ч против течения проходит на 35 км больше, чем за 2 ч по течению. Найдите скорость теплохода против течения и его скорость по течению.

1126. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 280 км, выходят одновременно два автомобиля. Если автомобили будут двигаться навстречу друг другу, то встреча произойдёт через 2 ч. Если же они будут двигаться в одном направлении, то автомобиль, вышедший из A, догонит автомобиль, вышедший из B, через 14 ч. Какова скорость каждого автомобиля?

1127. Два туриста вышли одновременно из двух городов, расстояние между которыми 38 км, и встретились через 4 ч. С какой скоростью шёл каждый турист, если известно, что первый прошёл до встречи на 2 км больше второго?

1128. Моторная лодка путь по течению от одной пристани до другой проходит за 4 ч, а обратный путь — за 5 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если 70 км по течению она проходит за 3,5 ч?

1129. За 3 ч по течению и 4 ч против течения теплоход проходит 380 км. За 1 ч по течению и 30 мин против течения теплоход проходит 85 км. Найдите собственную скорость теплохода и скорость течения.

1130. На двух полках 55 книг. Если переставить со второй полки половину книг на первую, то на первой станет в 4 раза больше книг, чем останется на второй. Сколько книг на каждой полке?

1131. *Старинная задача.* На левой чаше весов, находящихся в равновесии, лежат 9 одинаковых слитков золота, а на правой — 11 одинаковых слитков серебра. Если поменять местами один слиток золота со слитком серебра, то левая чаша окажется на 13 г легче правой. Сколько весит один слиток золота и один слиток серебра?

1132. Масса 4,5 см^3 железа и 8 см^3 меди равна 101,5 г. Масса 3 см^3 железа больше массы 2 см^3 меди на 6,8 г. Найдите плотность железа и плотность меди.

1133. Под озимыми культурами было занято на 480 га больше, чем под яровыми. После того как убрали 80% озимых и 25% яровых культур, площадь, оставшаяся под озимыми, оказалась на 300 га меньше, чем площадь под яровыми. Какая площадь была отведена под яровые и какая под озимые культуры?

1134. Две бригады должны были по плану изготовить за месяц 680 деталей. Первая бригада перевыполнила месячное задание на 20%, а вторая — на 15%, и поэтому обеими бригадами было изготовлено сверх плана 118 деталей. Сколько деталей должна была изготовить по плану каждая бригада за месяц?

1135. Имеется молоко 5% жирности и 1% жирности. Сколько молока каждого вида надо взять, чтобы получить 3 л молока, жирность которого составляет 3,2%?

1136. Имеющиеся 45 000 р. клиент банка разделил на две части. Одну из них он положил на вклад «Депозитный», доход по которому составлял 9% в год, но нельзя было снимать деньги в течение года. Другую часть он положил на вклад «До востребования», доход по которому составлял 1% в год, однако в любое время можно было взять деньги полностью или частично. В результате общий доход, полученный клиентом через год, составил 3410 р. Сколько денег положил клиент на вклад «Депозитный» и сколько на вклад «До востребования»?

1137. Из 10%-го и 15%-го растворов соляной кислоты требуется составить 80 г раствора, концентрация которого равна 12%. Сколько граммов каждого раствора надо взять?

1138. Смешав кислоту 70%-й и 48%-й концентрации, получили 660 г кислоты 60%-й концентрации. Сколько было взято кислоты каждого вида?

1139. *(Задача-исследование.)* На сколько надо уменьшить число 100, чтобы при делении полученной разности как на 5, так и на 7 остаток был равен 1 и при этом первое частное было на 2 больше второго?

1) Обсудите, какие обозначения удобно ввести для решения задачи.
2) Составьте систему уравнений и решите её.
3) Проверьте правильность полученного ответа.

П

1140. Разложите на множители:
а) $0{,}064m^3 + 1$; б) $0{,}027x^3 - y^3$; в) $p^6 + 8$; г) $27 - m^6$.

1141. Докажите тождество
$$(x^3 - y^3)^2 + 2x^3y^3 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2).$$

1142. В каких координатных четвертях расположен график уравнения:
а) $2x + 5y = 12$; б) $3x - 4y = 10$?

1143. Докажите, что все точки графика функции, заданной формулой $y = -x^2 - 6x - 11$, расположены в нижней полуплоскости.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните на примере, как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки.
2. Объясните на примере, как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения.

Для тех, кто хочет знать больше

46. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы

Неравенство $y > 0{,}5x + 2$ при $x = 6$, $y = 10$ обращается в верное неравенство $10 > 0{,}5 \cdot 6 + 2$. Говорят, что пара значений переменных $x = 6$, $y = 10$ является решением этого неравенства.

> **Определение.** Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая его в верное числовое неравенство.

Нетрудно проверить, что решениями неравенства

$$y > 0{,}5x + 2$$

являются также пары $x = 0$, $y = 5$; $x = -8$, $y = -1$. Каждое решение неравенства $y > 0{,}5x + 2$ можно изобразить точкой на координатной плоскости.

Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости рассматриваемое неравенство.

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 0{,}5x + 2$, представляет собой прямую (рис. 97). Если точка плоскости лежит выше, чем точка этой прямой, находящаяся с ней на одной вертикали (см. рис. 97), то её ордината больше ординаты соответствующей точки прямой и потому координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 0{,}5x + 2$.

Вообще координаты любой точки полуплоскости, расположенной выше прямой $y = 0{,}5x + 2$, удовлетворяют неравенству $y > 0{,}5x + 2$, а координаты других точек плоскости этому неравенству не удовлетворяют.

Таким образом, неравенство $y > 0{,}5x + 2$ задаёт полуплоскость, расположенную выше прямой $y = 0{,}5x + 2$. На рисунке 97 эта полуплоскость показана цветом. Граничная прямая, не принадлежащая этой полуплоскости, проведена пунктиром.

Пример 1. Покажем в координатной плоскости множество точек, которое задаёт неравенство $x \geqslant 4$.

▶ Проведём прямую $x = 4$ (рис. 98). Абсцисса любой точки, принадлежащей этой прямой или расположенной правее её, равна 4 или больше 4. Значит, неравенство $x \geqslant 4$ задаёт на координатной плоскости прямую $x = 4$ и полуплоскость, расположенную правее прямой $x = 4$. Эта полуплоскость показана на рисунке цветом. Граничная прямая принадлежит этой полуплоскости. ◁

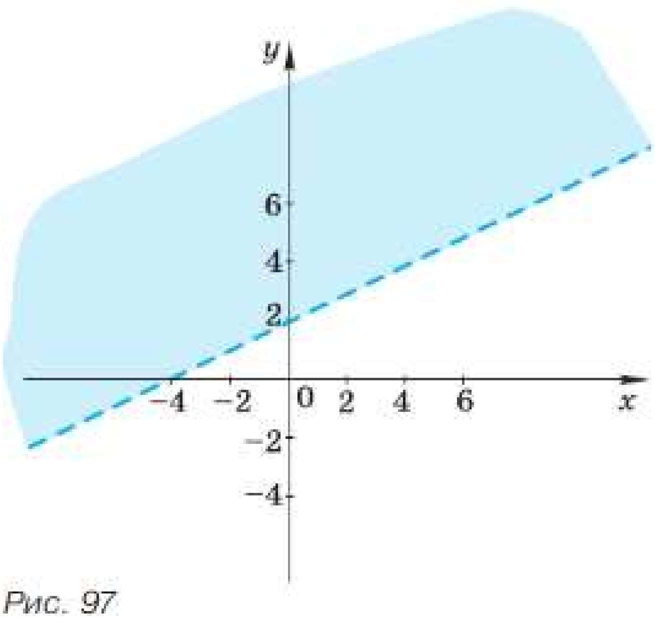


Рис. 97

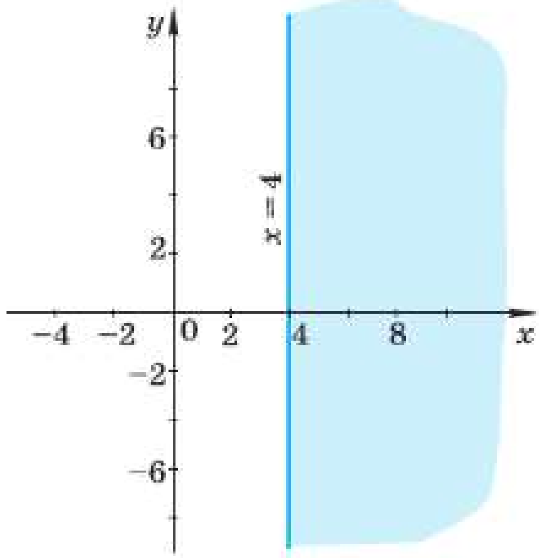


Рис. 98

Пример 2. Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 0,4x - 2, \\ y \leqslant 0,4x + 3. \end{cases}$$

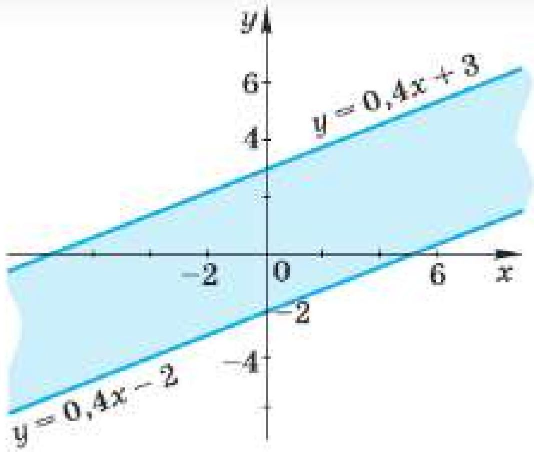


Рис. 99

▶ Построим в координатной плоскости прямые, являющиеся графиками уравнений

$$y = 0,4x - 2 \text{ и } y = 0,4x + 3.$$

Так как угловые коэффициенты прямых равны, то эти прямые параллельны.
Первое нестрогое неравенство задаёт прямую $y = 0,4x - 2$ и полуплоскость, расположенную выше этой прямой, а второе — прямую $y = 0,4x + 3$ и полуплоскость, расположенную ниже этой прямой. Рассматриваемая система неравенств задаёт общую часть этих множеств.
Эта общая часть представляет собой полосу, ограниченную прямыми $y = 0,4x - 2$ и $y = 0,4x + 3$ (рис. 99). ◁

Упражнения

1144. Постройте прямую $y = \frac{1}{3}x$. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:
а) $y > \frac{1}{3}x$; б) $y < \frac{1}{3}x$.

1145. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, которое задаёт неравенство:
а) $y \geqslant x$; б) $y \leqslant -x$; в) $x \geqslant 1$; г) $y \leqslant 5$.

1146. Изобразите множество точек, которое задаёт на координатной плоскости неравенство:
а) $y \geqslant x + 1$; б) $y < -0,2x + 3$.

1147. Задайте неравенством полуплоскость, расположенную выше прямой:
а) $y = x - 1,3$; б) $x + y = 5$.

1148. Является ли пара чисел $x = -3$, $y = 4$ решением системы неравенств:
а) $\begin{cases} 3x - y < 0, \\ x + y > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y < 5, \\ x - 2y > -15? \end{cases}$

1149. Изобразите на координатной плоскости множество точек, которое задаёт система неравенств:

а) $\begin{cases} y \leqslant -x, \\ y \geqslant -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geqslant x - 2, \\ y \leqslant x + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant -2x + 4, \\ y \leqslant x + 1. \end{cases}$

1150. Какую фигуру на координатной плоскости задаёт система неравенств:

а) $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant -x + 7, \\ y \geqslant -x + 1? \end{cases}$

1151. Изобразите на координатной плоскости фигуру, которую задаёт система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant -0{,}5x + 2, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

и найдите её площадь.

1152. Укажите какие-либо значения k и b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 3x + 2, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости: а) полосу; б) угол.

Дополнительные упражнения к главе VI

К параграфу 14

1153. Является ли решением уравнения $x^2 - 2y = 7$ пара значений переменных x и y:

а) (5; 8); б) (−4; −11,5); в) (−1; −3); г) (1,2; −2,78)?

1154. Составьте уравнение с переменными u и v, решением которого служит пара чисел вида $(u; v)$:

а) (10; 3); б) (0; −7); в) (0,6; −0,8); г) (−1,4; −3,6).

1155. Докажите, что если в уравнении $ax + by = 81$ коэффициенты a и b — целые числа, то пара чисел (15; 40) не может быть решением этого уравнения.

1156. Известно, что:
а) пара значений переменных $x = 5$, $y = 7$ является решением уравнения $ax - 2y = 1$. Найдите коэффициент a;
б) пара значений переменных $x = -3$, $y = 8$ является решением уравнения $5x + by = 17$. Найдите коэффициент b.

1157. Найдите все пары натуральных чисел, которые являются решением уравнения: а) $x + y = 11$; б) $xy = 18$.

1158. Найдите все пары простых чисел, которые являются решениями уравнения $a + b = 42$.

1159. Трёхзначное число начинается с цифры 9. Если эту цифру переставить на последнее место, то получится трёхзначное число, которое меньше данного на 576. Найдите данное трёхзначное число.

1160. Трёхзначное число оканчивается цифрой 4. Если эту цифру поставить на первое место, то новое число будет на 7 меньше удвоенного данного числа. Найдите данное число.

1161. К двузначному числу приписали слева и справа по 1. Получившееся четырёхзначное число оказалось в 21 раз больше первоначального. Найдите двузначное число.

1162. Пересекает ли график уравнения $y - x^2 = 9$:
а) ось x; б) ось y?
При положительном ответе укажите координаты точек пересечения.

1163. Графику уравнения $x - xy = 46$ принадлежит точка с ординатой $-1{,}3$. Найдите абсциссу этой точки.

1164. График уравнения $8x - 5y = 14$ проходит через точку с абсциссой 1,2. Найдите ординату этой точки.

1165. Докажите, что графику уравнения $3x + 2y = -4$ не принадлежит ни одна точка, у которой обе координаты положительны.

1166. Докажите, что графику уравнения $6x - 12y = 5$ не принадлежит ни одна точка с целочисленными координатами.

1167. Постройте график уравнения:
а) $3(x - 2y) - 2(x - 4y) = 4$;
б) $2(0{,}5x - 1{,}2y) - (0{,}6y + x) = 6$;
в) $3(0{,}4y - 0{,}2x) - 4(0{,}3y - 0{,}6x) = 0{,}6$.

1168. В линейном уравнении $ax - y = 4$ подберите коэффициент a так, чтобы график этого уравнения проходил через точку $M(3; 5)$. Постройте график этого уравнения.

1169. Постройте прямую, которая является графиком уравнения $y - 2{,}5x = c$, если известно, что она проходит через точку $K(2; -3)$.

1170. Постройте график уравнения:
а) $(x - 2)(y - 3) = 0$; в) $(x + 4)(y + 5) = 0$;
б) $(x + 8)(y - 1) = 0$; г) $x(y - 2) = 0$.

1171. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графика уравнения $(x+2)(y+3)=0$ с осью x; с осью y.

1172. Постройте график уравнения:
а) $y=|x|$; б) $y=-|x|$.

1173. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} a^2+b^2=16, \\ a^2+8a+b^2-8b+16=0 \end{cases}$$

пара чисел:
а) $a=0,\ b=4$; б) $a=0,\ b=-4$; в) $a=-4,\ b=0$?

1174. Докажите, что прямые $x+y=5$, $2x-y=16$ и $x+2y=3$ пересекаются в одной точке. Каковы координаты этой точки?

1175. При каком значении a прямые $5x-2y=3$ и $x+y=a$ пересекаются в точке, принадлежащей оси y?

1176. При каком значении b прямые $bx+3y=10$ и $x-2y=4$ пересекаются в точке, принадлежащей оси x?

1177. При каком значении k прямая $y=kx-4$ проходит через точку пересечения прямых $y=2x-5$ и $y=-x+1$?

1178. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y+3x=0, \\ x-y=4, \\ x+y=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=1, \\ y-x=3, \\ 2x+y=0. \end{cases}$

1179. Имеет ли система решения и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} 2x+5y=17, \\ 4x-10y=45; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,2x-5y=11, \\ -x+25y=-55; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{y}{15}=1, \\ 6x-2y=35; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+\frac{1}{3}y=10, \\ 9x-2y=1? \end{cases}$

1180. *(Для работы в парах.)* Подберите какое-либо линейное уравнение с двумя переменными, которое вместе с уравнением $10x+5y=1$ составило бы систему: а) имеющую одно решение; б) имеющую бесконечно много решений; в) не имеющую решений.

1) Выполните совместно задание а) и решите составленную систему.
2) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.

1181. Укажите какое-либо значение k, при котором система

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - kx = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1182. При каком значении c система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 10, \\ 9x - 3y = c \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

1183. При каких значениях c система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 2, \\ 5x + 2y = c \end{cases}$$

не имеет решений?

К параграфу 15

1184. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 25x - 18y = 75, \\ 5x - 4y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 35x = 3y + 5, \\ 49x = 4y + 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8y - 5z = 23, \\ 3y - 2z = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 13x - 15y = -48, \\ 2x + y = 29; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x + 4y = 74, \\ 3x + 2y = 32; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 11u + 15v = 1{,}9, \\ -3u + 5v = 1{,}3. \end{cases}$

1185. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 6(x + y) = 8 + 2x - 3y, \\ 5(y - x) = 5 + 3x + 2y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2(2x + 1) + 1{,}5 = 3(y - 2) - 6x, \\ 11{,}5 - 4(3 - x) = 2y - (5 - x); \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4(2x - y + 3) - 3(x - 2y + 3) = 48, \\ 3(3x - 4y + 3) + 4(4x - 2y - 9) = 48; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 84 + 3(x - 3y) = 36x - 4(y + 17), \\ 10(x - y) = 3y + 4(1 - x). \end{cases}$

1186. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{5} = 1 - \frac{y}{15}, \\ 2x - 5y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ \frac{2x+1}{6} = \frac{9-5y}{8}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3m + 5n = 1, \\ \frac{m}{4} + \frac{3n}{5} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3q = 4p - 7, \\ \frac{1-3q}{4} = \frac{4-2p}{3}. \end{cases}$

1187. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} (x-1)^2 - (x+2)^2 = 9y, \\ (y-3)^2 - (y+2)^2 = 5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (7+u)^2 - (5+u)^2 = 6v, \\ (2-v)^2 - (6-v)^2 = 4u. \end{cases}$

1188. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 8x + 5y = 20, \\ 1,6x + 2y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -1,8x + 2,4y = 1, \\ 3x - 4y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{7}x - \frac{1}{13}y = 1, \\ 13x - 7y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{8}y = \frac{1}{2}, \\ -16x + 3y = 12. \end{cases}$

1189. Имеет ли решения система уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 3x + y = 13, \\ 7x - 5y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x + 3y = 1, \\ 2x + y = 3, \\ 5x + 2y = 4? \end{cases}$

1190. Проходят ли прямые $2x + 3y = 20$, $3x - 5y = 11$ и $x + y = 9$ через одну и ту же точку?

1191. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точки:
а) $A(1; 2)$ и $B(-2; 3)$; б) $M(-5; 0)$ и $K(2; -1)$.

1192. *(Для работы в парах.)* Напишите уравнение вида $y = kx + b$, график которого проходит через точки: а) $M(-1; 1)$ и $P(4; 4)$; б) $A(-3; 3)$ и $B(3; -3)$.

1) Обсудите друг с другом ход решения задачи.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли составлены уравнения, построив соответствующие графики.

1193. Автомобиль проделал путь за 8 ч. Сначала он ехал со скоростью 40 км/ч, а затем со скоростью 60 км/ч. Весь этот путь он мог бы проехать за то же время, если бы ехал со скоростью 45 км/ч. Сколько часов ехал автомобиль со скоростью 40 км/ч и сколько со скоростью 60 км/ч?

1194. Велосипедист ехал от пункта A до пункта B со скоростью 10 км/ч, а от пункта B до пункта C со скоростью 15 км/ч. На весь путь он затратил 5 ч. Тот же путь за то же время он мог бы проехать со скоростью 12 км/ч. Сколько часов затратил велосипедист на путь от A до B и сколько на путь от B до C?

1195. В первый день засеяли $\frac{1}{4}$ первого поля и $\frac{1}{3}$ второго, что составило 340 га. Во второй день засеяли $\frac{1}{3}$ оставшейся части первого поля, что на 60 га меньше половины оставшейся части второго поля. Найдите площадь каждого поля.

1196. Если каждую сторону прямоугольника увеличить на 3 см, то его площадь увеличится на 90 см^2. Если же длину прямоугольника увеличить на 5 см, а ширину уменьшить на 2 см, то его площадь увеличится на 20 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

1197. Написали два числа. Если первое число увеличить на 30%, а второе уменьшить на 10%, то их сумма увеличится на 6. Если же первое число уменьшить на 10%, а второе — на 20%, то их сумма уменьшится на 16. Какие числа были написаны?

1198. В магазине находилось два мешка с рисом одинаковой массы и один мешок с пшеном. Масса всех трёх мешков составляла 160 кг. После того как из каждого мешка с рисом продали 20% риса, а из мешка с пшеном — 25% пшена, масса крупы в мешках составила 125 кг. Сколько килограммов риса и пшена было в каждом мешке первоначально?

1199. За 8 дней работы на первом станке и 5 дней работы на втором было изготовлено 235 деталей. В результате усовершенствования производительность первого станка возросла на 15%, а второго — на 20%. Теперь за 2 дня работы на первом станке и 3 дня на втором можно изготовить 100 деталей. Сколько деталей в день изготовляли раньше на каждом станке?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1200. Найдите все натуральные значения a, при которых корень уравнения $(a-1)x = 12$ является натуральным числом.

1201. Решите уравнение:

а) $|x - 3| = 7$; в) $|4 - x| = 1,5$;

б) $|x + 2| = 9$; г) $|6 - x| = 7,3$.

1202. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвёртой, вторая — с пятой и третья — с шестой. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13.

1203. В двух бочках было воды поровну. Количество воды в первой бочке сначала уменьшилось на 10%, затем увеличилось на 10%, а во второй бочке сначала увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. В какой бочке стало больше воды?

1204. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие грибы — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 11 кг свежих?

1205. Три ящика наполнены орехами. Во втором ящике орехов на 10% больше, чем в первом, и на 30% больше, чем в третьем. Сколько орехов в каждом ящике, если в первом на 80 орехов больше, чем в третьем?

1206. Докажите, что сумма $1^3+2^3+\ldots+99^3$ делится на 100.

1207. Число a составляет 80% числа b, а число c составляет 140% числа b. Найдите числа a, b и c, если число c больше a на 72.

1208. Число a составляет 75% числа b и 40% числа c. Число c на 42 больше числа b. Найдите числа a и b.

1209. Какое двузначное число в 4 раза больше суммы его цифр?

1210. Делится ли число $\underbrace{111\ldots1}_{81\text{ раз}}$ на 81?

1211. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть простое число или единица.

1212. К некоторому двузначному числу слева и справа приписали по единице. В результате получили число, в 23 раза большее первоначального. Найдите это двузначное число.

1213. В двузначном числе зачеркнули одну цифру. Получилось число, которое в 31 раз меньше первоначального. Какую цифру и в каком числе зачеркнули?

1214. Первая цифра трёхзначного числа 8. Если эту цифру переставить на последнее место, то число увеличится на 18. Найдите первоначальное число.

1215. Постройте график уравнения:
а) $(x-2)(y+3)=0$; б) $x^2+xy=0$.

1216. Постройте график уравнения: а) $y+|y|=x$; б) $y=x|y|$.

1217. Постройте график функции: а) $y=|x|-3$; б) $y=4-|x|$.

1218. Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 станет квадратом, а после умножения на 3 — кубом натурального числа.

1219. Докажите, что значение выражения $96^7-22^5-48^6$ кратно 10.

1220. В координатной плоскости (рис. 100) отмечена точка $M(x;y)$. Отметьте в этой координатной плоскости точки $A(2x;2y)$, $B\left(-3x;\frac{1}{2}y\right)$, $C\left(\frac{1}{2}x;-2y\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}x;-\frac{1}{3}y\right)$.

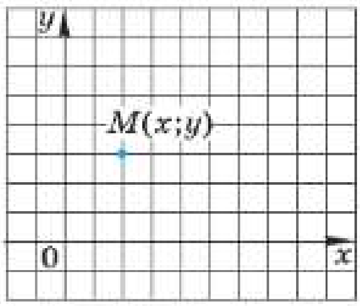


Рис. 100

1221. Что больше:
$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}\text{ или }\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}?$$

1222. Представьте выражение $2x^2+2y^2$ в виде суммы двух квадратов.

1223. Если $x\neq0$ или $y\neq0$, то значение выражения $15x^2-18xy+15y^2$ положительно. Докажите это.

1224. Разложите на множители многочлен:
а) x^8+x^4-2; б) a^5-a^2-a-1; в) n^4+4; г) n^4+n^2+1.

1225. Докажите, что p^2-1 кратно 24, если p — простое число, большее 3.

1226. Докажите, что разность между кубами двух последовательных натуральных чисел при делении на 6 даёт остаток 1.

1227. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть квадратом натурального числа.

1228. Докажите, что разность между квадратом натурального числа, не кратного 3, и числом 1 кратна 3.

1229. Упростите выражение

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1).$$

1230. Докажите, что уравнение $x^2-y^2=30$ не имеет целых решений.

1231. Докажите, что не существует целых коэффициентов a, b, c и d таких, что значение многочлена ax^3+bx^2+cx+d равно 1 при $x=19$ и равно 2 при $x=62$.

1232. Докажите, что если y есть среднее арифметическое x и z, то $x^4+2x^3z-2xz^3-z^4-4x^2y^2+4y^2z^2=0$.

1233. Найдите все простые числа p и q, для которых $p^2-2q^2=1$.

1234. При каких значениях a, b, c и d является тождеством равенство

$$5x^3-32x^2+75x-71=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d?$$

1235. Представьте многочлен $3x^3+7x^2+9x+6$ в виде многочлена ay^3+by^2+cy+d, где $y=x+1$.

1236. При каких натуральных значениях x и y верно равенство $3x+7y=23$?

1237. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=-1, \\ y-z=-1, \\ z+x=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=-3, \\ y+z=6, \\ z+x=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y+2z=1, \\ x-y-z=-2, \\ 2x-y+z=1. \end{cases}$

1238. Найдите трёхзначное число, которое равно квадрату двузначного числа и кубу однозначного числа.

1239. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 168, а их наибольший общий делитель равен 24.

1240. Найдите все пары простых чисел, которые являются решениями уравнения $x+y=26$.

1241. Путь от A до B идёт 3 км в гору, 6 км под гору и 12 км по ровному месту. Этот путь мотоциклист проделал за 1 ч 7 мин, а обратный путь — за 1 ч 16 мин. Найдите скорость мотоциклиста в гору и под гору, если на ровном месте его скорость 18 км/ч.

1242. *Задача Л. Н. Толстого.* Вышла в поле артель косцов. Ей предстояло скосить два луга, из которых один был вдвое больше другого. Полдня вся артель косила большой луг, а на вторую половину дня артель разделилась пополам, и одна половина осталась докашивать большой луг, а другая стала косить малый луг. К вечеру большой луг был скошен, а от малого остался участок, который был скошен на другой день одним косцом, работавшим весь день. Сколько было косцов в артели?

1243. Из двух городов A и B, расстояние между которыми 180 км, в 6 ч 20 мин выехали навстречу друг другу автобус и легковой автомобиль. Их встреча произошла в 7 ч 50 мин. Если бы автобус выехал на 1 ч 15 мин раньше, а легковой автомобиль на 15 мин позже, то они встретились бы в 7 ч 35 мин. Какова скорость автобуса и легкового автомобиля?

1244. Из города A в город B в 8 ч 50 мин вышли два автобуса. В то же время из города B в город A выехал велосипедист. Один автобус он встретил в 10 ч 10 мин, а другой — в 10 ч 50 мин. Расстояние между городами 100 км. Найдите скорость велосипедиста, если скорость одного автобуса в $1\frac{5}{7}$ раза больше скорости другого.

1245. Всадник и пешеход одновременно отправились из пункта A в пункт B. Всадник, прибыв в пункт B на 50 мин раньше пешехода, возвратился обратно в пункт A. На обратном пути он встретился с пешеходом в двух километрах от пункта B. На весь путь всадник затратил 1 ч 40 мин. Найдите расстояние от A до B и скорость всадника и пешехода.

1246. Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды, а после двухнедельного пребывания на воздухе он содержит 12% воды. На сколько килограммов увеличилась масса добытой тонны угля после того, как уголь две недели был на воздухе?

1247. Два брата ходят из школы домой с одинаковой скоростью. Однажды через 15 мин после выхода из школы первый побежал в школу и, добежав до неё, немедленно бросился догонять второго. Оставшись один, второй продолжал идти домой в 2 раза медленнее. Когда первый брат догнал второго, они пошли с первоначальной скоростью и пришли домой на 6 мин позже, чем обычно. Во сколько раз скорость бега первого брата больше обычной скорости ходьбы братьев?

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Как появилась алгебра

Алгебра как искусство решать уравнения зародилась очень давно в связи с потребностями практики, в результате поиска общих приёмов решения однотипных задач. Самые ранние дошедшие до нас рукописи свидетельствуют о том, что в Древнем Вавилоне и Древнем Египте были известны приёмы решения линейных уравнений.

Слово «алгебра» возникло после появления трактата «Китаб аль-джебр валь-мукабала» математика и астронома из г. Хивы Мухаммеда бен Муса аль-Хорезми (787 — ок. 850). Термин «аль-джебр», взятый из названия этой книги, в дальнейшем стал употребляться как «алгебра».

До XVI в. изложение алгебры велось в основном словесно. Буквенные обозначения и математические знаки появлялись постепенно. Знаки «+» и «−» впервые встречаются у немецких алгебраистов XVI в. Несколько позже вводится знак «×» для умножения. Знак деления «:» был введён лишь в XVII в. Решительный шаг в использовании алгебраической символики был сделан в XVI в., когда французский математик Франсуа Виет (1540—1603) и его современники стали применять буквы для обозначения не только неизвестных (что делалось и ранее), но и любых чисел. Однако эта символика ещё отличалась от современной. Так, Виет для обозначения неизвестного числа применял букву N (*Numerus* — число), для квадрата и куба неизвестного — буквы Q (*Quadratus* — квадрат) и C (*Cubus* — куб), а знак равенства записывал как *aequ*. Например, запись уравнения $x^3-8x^2+16x=40$ у Виета выглядела бы так:

$$1C-8Q+16N\ aequ.\ 40\ (Aequali \text{ — равно}).$$

В процессе развития алгебра из науки об уравнениях преобразовалась в науку об операциях, более или менее сходных с действиями над числами. Современная алгебра — один из основных разделов математики.

Школьный курс алгебры включает, кроме некоторых алгебраических сведений, отдельные вопросы из других разделов математики (функции, метод координат, приближённые вычисления, теория вероятностей и др.).

О функциях

В первой половине XVII в. в связи с развитием механики в математику проникают идеи изменения и движения. В это же время начинает складываться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Так, французские математики Пьер Ферма (1601—1665) и Рене Декарт (1596—1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от её абсциссы. А английский учёный Исаак Ньютон (1643—1727) понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки.

Термин «функция» (от латинского *functio* — исполнение, совершение) впервые ввёл немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646—1716). У него функция связывалась с геометрическим образом (графиком функции). В дальнейшем функцию обычно рассматривали как аналитическое выражение. Однако уже у швейцарского математика Иоганна Бернулли (1667—1748) и члена Петербургской академии наук знаменитого математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707—1783) имеется и общее понимание функции как зависимости одной переменной величины от другой.

Формулы сокращённого умножения

Некоторые правила сокращённого умножения были известны ещё около 4 тыс. лет тому назад. Их знали вавилоняне и другие народы древности. Тогда они формулировались словесно или геометрически.

У древних греков величины обозначались не числами или буквами, а отрезками прямых. Они говорили не «a^2», а «квадрат на отрезке a», не «ab», а «прямоугольник, содержащийся между отрезками a и b». Например, тождество $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ во второй книге «Начал» Евклида (III в. до н. э.) формулировалось так: «Если прямая линия (имеется в виду отрезок) как-либо рассечена, то квадрат на всей прямой равен квадратам на отрезках вместе с дважды взятым прямоугольником, заключённым между отрезками». Доказательство опиралось на геометрические соображения (см. рис. 85).

Некоторые термины подобного геометрического изложения алгебры сохранились до сих пор. Так, мы называем вторую степень числа квадратом, а третью степень — кубом числа.

О методе координат

Первоначально идея координат зародилась в древности в связи с потребностями астрономии, географии, живописи. Так, на стене одной из древнеегипетских погребальных камер была обнаружена квадратная сетка (палетка), которой пользовались для увеличения изображений. Древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в.) применил географические координаты (долготу и широту) для определения местонахождения мореплавателя. Идеей координат пользовались в Средние века для определения положения светил на небе, для определения места на поверхности Земли. Прямоугольной сеткой пользовались художники эпохи Возрождения.

Применять координаты в математике впервые стали П. Ферма и Р. Декарт. В 1637 г. вышла книга Р. Декарта «Рассуждения о методе», в которой наряду с общими философскими рассуждениями о материи значительное место отводится «универсальной математике». В разделе этой книги «Геометрия» Р. Декарт предложил новый метод — метод координат, который позволил переходить от точки (в координатной плоскости) к паре чисел, от линии к уравнению, от геометрии к алгебре. Это была новая геометрия, которую в настоящее время называют аналитической геометрией. Заслуга Р. Декарта состояла в том, что он ввёл переменные координаты. Так, в уравнении $ax + by = c$ буквы x и y стали рассматриваться не как неизвестные, а как переменные. Благодаря этому каждой прямой в координатной плоскости соответствует линейное уравнение $ax + by = c$ (a или b — отличные от нуля числа) и наоборот.

Метод координат позволяет строить графики уравнений, изображать геометрически различные зависимости, выраженные аналитически с помощью уравнений и формул, решать различные геометрические задачи с помощью алгебры.

Термины «абсцисса» и «ордината» и название «координаты» были введены в употребление Г. Лейбницем в 70—80-е гг. XVII в.

Вычислительные средства

С давних пор люди стремились облегчить вычисления. Самой древней «счётной машиной» были пальцы рук и ног, камешки и другие мелкие предметы. Ремесленники и торговцы пользовались для счёта доской, разграфлённой на столбцы, на которой с помощью камешков откладывались единицы различных разрядов. Эту доску называли абаком. От римлян к нам пришло слово «калькуляция», что означает буквально «счёт камешками». Усовершенствование абака привело к появлению счётов (в Древнем Китае — «суан-чан», в Японии — «сорабан»). Русские счёты появились в XVI в.

Машину для механического производства арифметических действий называют арифмометром. Одними из первых таких машин были машины, созданные в 1641 г. французским учёным Блезом Паскалем (1623—1662) и в 1671 г. Г. Лейбницем. Массовое распространение получил арифмометр, сконструированный в 1874 г. петербургским механиком В. Однером.

Революцию в вычислительной технике совершили электронные вычислительные машины (ЭВМ), которые появились в середине XX столетия. Первая ЭВМ была создана в США в 1944 г. Первая советская ЭВМ была построена под руководством академика С. А. Лебедева (1902—1974) в 1950 г. Современные суперкомпьютеры могут производить до 10^{17} операций в секунду, и без них невозможно моделирование различных сложнейших процессов в окружающем мире.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАССОВ

Делимость чисел

1. Пусть a и b — натуральные числа и при делении a на b в частном получается q и в остатке r. Тогда $a = bq + r$, где q и r — натуральные числа или нули, причём $r < b$. Например:

$$\begin{array}{r|l} -\,127 & 35 \\ \underline{105} & \;\;3 \\ 22 & \end{array} \qquad 127 = 35 \cdot 3 + 22.$$

2. Если натуральное число a делится на натуральное число b, то a называют кратным b, а b — делителем a. Это означает, что $a = bq$, где q — натуральное число. Например, 62 кратно 31, 31 — делитель 62, так как $62 = 31 \cdot 2$.

3. Простым числом называется такое натуральное число, которое имеет только два делителя — единицу и само это число.

Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Например, числа 2, 7, 43, 109 — простые, а числа 4, 12, 35 — составные. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Всякое составное число можно разложить на простые множители, и притом единственным способом. Например, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

4. Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем. Например, $72 = 2^3 \cdot 3^2$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ и $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Наименьшее общее кратное чисел 72, 180 и 600 равно $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим показателем. Например, наибольший общий делитель чисел 72, 180 и 600 равен $2^2 \cdot 3$, т. е. числу 12.

5. Если число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5. Если число оканчивается любой другой цифрой, то оно не делится на 5.

Если число оканчивается чётной цифрой, то оно делится на 2. Если число оканчивается нечётной цифрой, то оно не делится на 2. Если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3. Если сумма цифр числа не делится на 3, то число не делится на 3. Если сумма цифр числа делится на 9, то и число делится на 9. Если сумма цифр числа не делится на 9, то число не делится на 9.

Обыкновенные дроби

6. Правильной дробью называется дробь, у которой числитель меньше знаменателя.

Неправильной дробью называется дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему.

7. Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

8. Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей; вычислить дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель; умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель. Например, приведём к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$. Наименьший общий знаменатель равен 36:

$$\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 6}{6\cdot 6}=\frac{6}{36},\quad \frac{7}{12}=\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{21}{36},\quad \frac{5}{18}=\frac{5\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{10}{36}.$$

9. При сложении дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель. При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель.

Например, $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями сначала их приводят к общему знаменателю.

10. Чтобы перемножить две дроби, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем. Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Например, $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$, $\frac{3}{7}:\frac{4}{5}=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{28}$.

Десятичные дроби

11. При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра 5, 6, 7, 8 или 9, то к последней оставшейся цифре прибавляют 1. Если первая следующая за этим разрядом цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют. Например, $4{,}376 \approx 4{,}4$, $2{,}8195 \approx 2{,}820$, $10{,}1425 \approx 10{,}14$.

12. Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют поразрядно. При этом дроби записывают одну под другой так, чтобы запятая оказалась под запятой. Например:

$$\begin{array}{r} 3{,}4691 \\ +\,48{,}63 \\ \hline 52{,}0991 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68{,}3 \\ -\,5{,}275 \\ \hline 63{,}025 \end{array}$$

13. Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятые, а затем в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную, надо в делимом и делителе перенести запятые вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число. Например:

$$\begin{array}{r} 3{,}06 \\ \times\,2{,}4 \\ \hline 1224 \\ +\,612 \\ \hline 7{,}344 \end{array} \qquad 12{,}096 : 2{,}24 = 1209{,}6 : 224,$$

$$\begin{array}{r|l} 1209{,}6 & 224 \\ \cline{2-2} -\,1120 & 5{,}4 \\ \cline{1-1} 89\,6 & \\ -\,89\,6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

14. Чтобы умножить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр вправо. Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр влево. Например,

$$8{,}373 \cdot 100 = 837{,}3, \quad 3{,}4 : 1000 = 0{,}0034.$$

Положительные и отрицательные числа

15. Модулем положительного числа и нуля называется само это число. Модулем отрицательного числа называется противоположное ему положительное число. Модуль числа a обозначают $|a|$. Например,

$$|3{,}6| = 3{,}6, \quad |0| = 0, \quad |-2{,}8| = 2{,}8.$$

16. Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и перед полученным результатом поставить знак «минус».

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и перед полученным результатом поставить знак того слагаемого, модуль которого больше.

Сумма двух противоположных чисел равна нулю. Например,

$$-3{,}4 + (-1{,}8) = -5{,}2, \quad 2{,}5 + (-4{,}1) = -1{,}6, \quad -3{,}6 + 3{,}6 = 0.$$

17. Чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например, $-5-1{,}9=-5+(-1{,}9)=-6{,}9$.

18. Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули.

Чтобы перемножить два числа с разными знаками, надо перемножить их модули и перед полученным результатом поставить знак «минус». Например, $-1{,}2\cdot(-8)=9{,}6$, $-3\cdot 1{,}2=-3{,}6$.

19. Чтобы разделить отрицательное число на отрицательное, надо модуль делимого разделить на модуль делителя.

Чтобы разделить два числа с разными знаками, надо модуль делимого разделить на модуль делителя и перед полученным результатом поставить знак «минус».

Например, $-4{,}8:(-2{,}4)=2$, $5{,}5:(-5)=-1{,}1$.

20. Средним арифметическим нескольких чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Пропорции

21. Равенство двух отношений называют пропорцией. Например, равенство $2{,}5:5=3{,}5:7$ — пропорция. Числа 2,5 и 7 — крайние члены пропорции. Числа 5 и 3,5 — средние члены пропорции. Если пропорция верна, то произведение её крайних членов равно произведению средних членов. В пропорции можно менять местами крайние члены или средние члены.

22. Две величины называются прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Если величины прямо пропорциональны, то отношения соответствующих значений этих величин равны.

23. Две величины называются обратно пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Если величины обратно пропорциональны, то отношение значений одной из величин равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.

Свойства действий над числами

24. *Переместительное свойство сложения.* От перестановки слагаемых значение суммы не изменяется.

Сочетательное свойство сложения. Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего.

Переместительное свойство умножения. От перестановки множителей значение произведения не изменяется.

Сочетательное свойство умножения. Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего.

Распределительное свойство умножения. Чтобы умножить число на сумму, можно умножить это число на каждое слагаемое и сложить полученные результаты.

Преобразование выражений

25. Слагаемые, которые имеют одинаковую буквенную часть, называются подобными слагаемыми.

26. Для того чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть. Например, $5a - 7a + 4a = 2a$.

27. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $3x + (2a - y) = 3x + 2a - y$.

28. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $5a - (2x - 3y) = 5a - 2x + 3y$.

Проценты

29. Процентом от некоторого числа называют одну сотую часть от этого числа. Для обозначения процентов используют знак %.

30. Чтобы перейти от выражения числа в процентах к записи в виде десятичной дроби, надо число процентов разделить на 100. Например, 38% — это $\frac{38}{100} = 0{,}38$.

31. Чтобы выразить десятичную дробь в процентах, надо эту дробь умножить на 100. Если число выражено обыкновенной дробью, то сначала надо перейти к записи в виде десятичной дроби. Например, 0,63 — это 63%; 1,1 — это 110%; $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$, значит $\frac{2}{3}$ — это примерно 67%.

32. Основные задачи на проценты.

1) *Нахождение процентов от данного числа.*

Чтобы найти $a\%$ от числа b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$. Например, 5% от числа 40 составляют $40 \cdot \frac{5}{100} = 2$.

2) *Нахождение числа по его процентам.*

Чтобы найти число, $a\%$ которого составляют b, надо b разделить на $\frac{a}{100}$. Например, если 5% от числа x равны 40, то $x = 40 : \frac{5}{100} = \frac{40 \cdot 100}{5} = 800$.

3) *Нахождение процентного отношения двух чисел.*

Чтобы найти, сколько процентов число a составляет от числа b, надо отношение $\frac{a}{b}$ умножить на 100%.

Например, число 35 от числа 40 составляет $\frac{35}{40} \cdot 100\% = 87{,}5\%$.

Список дополнительной литературы

1. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. Баврин И. И. Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М.: Просвещение, 1994.
3. Волошинов А. В. Мудрость Эллады / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2009.
4. Всероссийская олимпиада школьников по математике. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11390
5. Галкин Е. В. Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
6. Глейзер Г. И. История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
7. Государственная (итоговая) аттестация выпускников 9 классов в новой форме. 9 класс. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/12489
8. Дорофеева А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
9. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 1 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
10. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 2 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
11. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 3 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
12. Московский центр непрерывного математического образования. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11388 Рекомендуем рубрики: «Олимпиады для школьников», «Журнал „Квант“».
13. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2005.
14. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.
15. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5—7 кл. / А. В. Спивак. — М.: Просвещение, 2017.
16. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. — М.: Наука, 1978.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Глава I

5. в) 0,(142857); г) −2,(2); д) −0,5(3); и) −1,075(0). **15.** а) 20; б) 28,89. **16.** а) 58; б) 10. **22.** а) 2,4; б) 6; в) 9,6; г) 26,6; д) 60; е) 440. **23.** 6,4 г; 5 г; 9,4 г. **24.** 45 ц. **25.** На 48 рублей. **33.** 25%. **34.** 16 подписчиков. **35.** 36 человек. **37.** б) 1,3; 2,8; 5,8. **41.** а) −4; б) 5,2. **46.** а) −49; б) 0,8. **62.** а) 60; б) 20; в) 3; г) 150. **63.** 20 л. **64.** 200 станков. **65.** 147 голосов. **85.** а) 4%; б) 15%. **86.** 25%. **87.** а) 26,81; б) 77,01; в) 7,22; г) 78. **91.** а) 35,7; б) 16,64; в) 10; г) 2,8. **93.** а) 0; б) $1\frac{4}{9}$. **96.** а) 35; б) 124. **97.** а) 94,2; б) 40,3. **121.** а) 6,75; б) 22; в) −6; г) −0,3. **122.** а) $11-6{,}5x$; б) $3p-5{,}1$; в) $0{,}4a-7$; г) $6b-5$; д) $y-8$; е) $8x-8$. **124.** а) $8+2x$; б) $46-5y$; г) 5; д) $4-10b$. **125.** а) 1; б) −7. **128.** На 12,5%. **141.** а) $4{,}5x-2{,}4$; б) $36-3{,}6a$; в) $12{,}3-8{,}5y$; г) $2-14b$. **147.** а) 30; б) 16; в) −6; г) 3; д) −43; е) 180; ж) −5; з) 300; и) −90. **148.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 0,5; в) −2; г) 0; д) −0,15; е) −5; ж) 12; з) −3; и) 0; к) 0; л) 0; м) 0. **149.** а) 7; б) $1\frac{1}{11}$; в) $5\frac{1}{4}$; г) 5; д) $1\frac{1}{4}$; е) −1,2; ж) $1\frac{3}{4}$. **150.** а) $\frac{5}{6}$; б) 2,5; в) −89; г) 0,5. **151.** а) 2,4; б) −12; в) −5; г) −1,5. **152.** а) 7; б) −32; в) −3; г) −1,8. **153.** а) 4; б) 2; в) 3,6; г) $3\frac{1}{4}$. **154.** а) 16; б) $\frac{3}{4}$; в) −4; г) $3\frac{6}{13}$; д) 3. **155.** а) 5,5; б) 2,4; в) 10. **156.** а), в), г) Корней нет; б) любое число является корнем уравнения. **157.** а) 0; б), г) Корней нет; в) любое число является корнем уравнения. **162.** а) 5,9; б) −9,4. **163.** 214 и 178 билетов. **164.** 8 и 11 домов. **165.** 6,3, 6,3 и 3,4 см. **166.** 3127 и 3110 м. **167.** 4, 8, 24 и 96 руший. **168.** 46 и 40 деталей. **169.** 60 000 р. **170.** 16, 22 и 32 компьютера. **171.** 400 г, 80 г, 75 г. **174.** 55 и 11 кустов. **175.** 20 км/ч. **176.** 50 км/ч. **177.** 8 дней. **178.** 20 маляров и 8 плотников. **180.** 1,5 кг. **181.** 2,4 кг и 10 кг. **182.** 20 и 40 кг. **185.** −39. **190.** 1,08 км. **191.** б) Уменьшится на 9%. **194.** На 25%. **198.** а) $\frac{2}{3}$; б) 2,5; в) 240; г) $\frac{5}{7}$. **199.** а) 1,44; б) $1\frac{5}{18}$; в) 9,2; г) 6. **200.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{4}{33}$; г) $\frac{4}{33}$. **201.** 207. **202.** 0. **203.** а) $\frac{1}{4}$; б) −16. **204.** а) −12,15; б) 2,025; в) −16,2; г) 20,25. **216.** 689,28 рублей. **217.** Женя и Вика. **218.** а) 58; б) 52. **219.** а) 0; б) 3,947. **225.** а) −0,5; б) 1. **235.** а) 1,49; б) 0; в) −32,5; г) 0,3. **237.** а) 24; б) −35; в), г) корней нет. **238.** а) −5; б) 1. **241.** 575 кроликов, 425 кур. **242.** 42 куста. **243.** 48 и 12 марок. **244.** 10 дней. **245.** 9 дней. **246.** 13.

Глава II

251. а) 6,3; б) 3,63; в) 18,86; г) 9; д) $6\frac{13}{14}$; е) $\frac{49}{20}$. **252.** 6,5. **253.** 5,5. **254.** 3.; 4.; 3.; 2.. **255.** $\frac{101}{23}$. **257.** 6 банок; 21 банка. **276.** а) 43,2 г; б) 360 см^3. **277.** а) 390 км; б) 60,5 км/ч. **278.** а) 18 км; б) 2,5 ч. **280.** 165 книг.

294. а) 0,9; б) 0; в) $\frac{5}{27}$; г) $-2,5$. **295.** 200 машин. **303.** Принадлежат точки B, C и D. **310.** а) $-1,76$; б) 88. **314.** $-10a$; $-\frac{4}{a}$; $-a$; $\frac{a}{8}$; $a+6,5a$; **323.** а) (30;0); б) (24;0). **327.** а) (1;2); б) (8;−6); в) (2;28); г) (4,4;−6). **328.** 4,4. **329.** 27. **330.** $-0,375$. **331.** 0,8. **340.** а) 2; б) -13. **341.** 20, 30, 15 деталей. **344.** $V=20-2x$, если $0 \leqslant x < 9$, $V=2$, если $9 \leqslant x \leqslant 12$. **346.** а) При $m<-1$; б) при $m=-1$; в) при $m>-1$. **347.** а) При $m \leqslant -1$; б) при $-1<m<0$; в) при $m \geqslant 0$. **358.** $y=150+1,5x$; а) 165; б) 20. **372.** При $a=-0,4$. **373.** 2, 3, 4 и 5. **375.** а) (4; 0); б) (−7; 0); в), г) (0; 0); д), е) не пересекает. **378.** $k=-0,4$, принадлежит. **381.** а) (7; 37); б) (−3; −55); в) (1,2; 5); г) (140; 14). **382.** Лежит.

Глава III

389. б) 4096; г) 16 807. **396.** д) -96; е) 432. **400.** а) -9; б) -37; в) -539. **404.** а) 0,16; 0,81; 100; б) 245; 3; 453. **409.** 18 и 90. **420.** а) a^6a^9; в) a^2a^{13}; г) $a^{14}a$. **423.** в) m^{11}; г) p^9; д) 10^{10}; е) 3^{10}. **425.** в) 6^{17}; г) 2^{14}; д) $0,4^7$. **429.** в) a^{20}; з) $0,7^5$. **431.** г) $1\frac{7}{9}$; е) $-\frac{8}{27}$. **432.** г) $2\frac{1}{4}$; д) $-12\frac{19}{27}$. **433.** а) 49; б) 81; в) 25; г) 0,216. **434.** а) x^{n+3}; в) x^{n+1}; г) y^{n-4}. **435.** а) 3; б) $-2,5$; в) 90; г) -1. **437.** д) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$; е) $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$. **439.** 105 км. **442.** 202,5 г. **451.** г) $(-ab)^3$; д) $(2a)^5$; е) $(0,3m)^3$. **452.** в) 1; г) 1; д) $\frac{5}{7}$; е) 50 000 000. **454.** д) x^9; е) x^{24}. **456.** в) a^{m+2}; г) a^{2m}; д) a^{3n}. **459.** б) 8^{20}; г) 32^{12}. **462.** в) a^{14}; г) x^{20}; д) m^{20}. **465.** а) 16; б) 5; в) 4; г) $\frac{1}{9}$. **474.** а) -2; б) 0,18. **475.** а) 0,592; б) 0,012. **476.** $5\pi r^2$ см^2. **477.** $8a^3$ см^3. **478.** а) 11; б) 3; е) 0. **481.** а) $\frac{1}{16}$; б) 0,5. **483.** а) $-3,3x^4y^3$; б) $-a^6b^4c$; в) $4x^3y^4$; г) $-0,36a^5b^6x^6$. **484.** в) $64a^5b^7$; г) $-28a^4b^4$; д) $-6x^6y^3$; е) $108a^4b^3$. **487.** в) $-8a^{12}b^6$; г) $81x^8y^4$; д) $-a^{10}b^5c^{15}$. **488.** в) $-0,216m^9n^6$; г) $4x^2y^6$; д) $x^4y^{16}b^8$; е) $-x^{10}y^{15}m^5$. **490.** а) $(9x^2)^2$. **491.** в) $(-0,2b^2)^3$. **494.** б) $1000m^9$; $100m^6$. **495.** а) $225a^{10}$; б) $81b^{25}$; в) $8p^{19}$; г) $-0,15c^{10}$; д) c^{19}; е) $2b^{13}$; ж) $-x^{10}$; з) $2y^{14}$. **496.** Через 9 дней. **497.** $k=1,5$, $b=6$. **513.** $x=-2,4$, $y=-20,4$. **514.** а) $4,8a^9b^{10}$; б) $28,8x^3y^{12}$. **522.** а) 45; б) 88. **523.** а) 5292; б) 4851. **524.** 8 чисел. **525.** а) 4; б) 5. **529.** г) 3^6; д) 2^{10}. **530.** в) 2^5+2^3+2. **534.** а) 98; б) -8. **542.** $-1,5$. **546.** в) 7^{n+3}; г) 3^{k+4}. **550.** б) 36; г) 0,6; е) $\frac{5}{9}$. **552.** а) 1,5; б) 1,5. **553.** а) $2\frac{2}{3}$; б) 6,8. **558.** в) 0,04; г) 6,25; д) 1; е) 81. **559.** в) Указание. $25^{25}=5^{50}$, $2^{50}\cdot 3^{50}=6^{50}$; г) $63^{30}>3^{60}\cdot 5^{30}$. **560.** г) 3^6. **576.** г) $3a^8b^7$.

Глава IV

588. а) 107; б) 30. **589.** а) -57; б) 3. **598.** а) $233\frac{1}{3}$; б) $-1,6$; в) $-3\frac{6}{7}$. **599.** а) $\frac{1}{5}$; б) 1; в) $\frac{2}{3}$. **600.** а) 24 000; б) $-10 000$. **603.** г) $-2b-1$; д) $-n^2-7$; е) 8. **604.** а) $0,7a-4,8a^2$; б) $1,6x^2+5,5$; в) $-b^2+13b$; г) $1,9y^2-1,4y+4$. **609.** а) $x^2+11xy-y^2$; б) $a^2-3ab+5b^2$; в) $4c^4-7c^2+6$. **611.** а) $0,2a^2+0,35a+1,2$; б) $0,7y^2-3,75y$; в) $-4x^2+4xy$; г) $2ab^2-4ab-5b$. **612.** а) $4a^2b-b^2+2$; б) $2xy$.

613. а) 60; б) 156. **614.** а) -2; б) -1. **617.** а) $2xy - x^2$; б) $2xy - y^2$. **620.** а) $10a^2 + 12ab + 2b^2$; б) $-4b^2$. **621.** а) 3; б) $1\frac{2}{3}$; в) 0,3; г) -20; д) 0; е) $\frac{4}{9}$. **622.** а) 1,23; б) -2; в) $-1{,}5$; г) -2. **625.** а) Да; б) да. **628.** б) $-5a^8b^7$; г) $-2c^{16}d^7$. **634.** а) 10,5; б) 28; в) 0,8; г) -5. **635.** а) $80b - 11$; б) $5c + 34$; в) -21; г) $42 - 24y$. **636.** а) $26y - 2y^2$; б) $-y^2 - 10y$; в) $2 - 4x$; г) $2a^3$; д) $4c^2 - 7b^2$; е) $-3x^3y$; ж) $3m^3 - m^2n + 2n^2$; з) $n^2 - n^3$. **637.** а) $7x^2 - 20x$; б) $a^3 + a^2$; в) $ax^2 - 8a^2x$; г) $4m^4 - m^2n^2 - 3n^4$. **638.** а) -6; 60; б) 8. **639.** а) 200; -250; б) 0,8. **640.** а) $14a^4 - a^3$; б) $2b^2 - b$; в) $16x^2 - 6x^4$; г) c^4. **646.** а) 7; б) 8; в) 49; г) 0,4; д) -2; е) 0; ж) 24; з) $\frac{5}{19}$. **647.** а) -2; б) -20; в) $-1{,}5$; г) $-0{,}2$. **648.** а) -1; б) 2; в) -4; г) 2. **649.** а) 0,5; б) -2; в) 1,6; г) -2. **650.** а) 24; б) $13\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{3}$; г) $-1\frac{7}{8}$; д) $-52{,}5$; е) $-4{,}5$; ж) -36; з) $1\frac{1}{7}$; и) 0,4. **651.** а) 12,5; б) 17; в) 17; г) -25; д) $\frac{8}{9}$; е) $\frac{12}{13}$. **652.** а) $1\frac{1}{4}$; б) $-0{,}5$; в) $-\frac{1}{7}$; г) 28. **653.** а) -13; б) 1,5; в) -15; г) 0,5. **654.** а) $-3{,}5$; б) -1; г) 2; д) 17,4; е) $4\frac{1}{4}$. **655.** 16, 20 и 8 см. **656.** 60, 40 и 66 м^2. **657.** 28 флоринов. **658.** 9 и 3 т. **659.** 300 га. **660.** 1500 м. **661.** 9 км. **662.** 40 км. **663.** 360 км. **664.** 19 г. **665.** 8,8 кг. **669.** а) $-\frac{1}{9}a^{13}y^9$; б) $-90a^8b^9$. **676.** а) 2,28; б) $-22{,}5$; в) 14,4; г) -348. **677.** а) 0; -8; б) 0; 0,2; в) 0; 5; г) 0; 0,4; д) 0; $\frac{1}{12}$; е) 0; -4; ж) 0; 0,1; з) 0; 30; и) 0; $-\frac{2}{3}$. **678.** а) 0; $-0{,}6$; б) 0; 11; в) 0; 0,6; г) 0; 10; д) 0; 0,16; е) 0; 0,04. **687.** а) $(b - c)(a - d)$; б) $(y - 5)(x + y)$; в) $(2x - 7)(3a - 5b)$; г) $(x - y)(x - y + a)$; д) $(a - 2)(3a - 5)$; е) $(b - 3)(5b - 17)$. **688.** г) $(c + 2)(c + 9)$; д) $(a - b)(a - b + 3)$; е) $-(x + 2y) \times (4x + 8y + 1)$. **689.** 9 км. **690.** а) 5; б) $-1{,}5$. **699.** а) $x^3 + 2x^2y - y^3$; б) $n^3 - 2n^2p + 2np^2 - p^3$; в) $a^3 - 2ax^2 - x^3$; г) $b^3 - 2b^2c + c^3$; д) $a^3 - 6a^2 + 11a - 12$; е) $5x^3 - 7x^2 - 3x + 2$; ж) $x^3 + 3x^2 - 8x + 10$; з) $3y^3 - 7y^2 + 7y - 4$. **700.** а) $c^3 - 2cd^2 - d^3$; б) $x^3 - 2x^2y + y^3$; в) $4a^3 - 3a^2 + 2a - 3$; г) $-3x^3 + 8x^2 + 7x - 12$. **701.** а) $y^4 + 2y^3 - 15y^2$; б) $-2a^4 + 8a^3 - 6a^2$. **703.** а) $19b - 10$; б) $14y^2 - 12$; в) $9x$; г) $a^3b + 5ab^2 - a^2b^2$; д) $4a - 2ab$; е) $3x - y^2 - 2$. **705.** $94x + 1$. **713.** а) 3; б) 0,5; в) 0; г) 0. **711.** а) $-\frac{1}{7}$; б) 0,2; в) 3,5; г) $-1\frac{1}{3}$. **716.** 21, 22, 23. **717.** 17, 19, 21. **718.** 25 и 10 см. **719.** 36 см. **720.** 12 дней. **721.** 1680 га. **722.** а) 2; б) 15,5. **727.** е) $(a + b)(b - 3)$; ж) $(x + y)(11 - x)$; з) $(m + n)(k - n)$. **728.** в) $(m + k)(3 - k)$; г) $(x + y)(k - x)$. **729.** а) $-\frac{3}{16}$; б) $\frac{11}{36}$. **730.** а) $12\frac{2}{3}$; б) 0. **734.** а) $(x + 5)(x + 1)$; б) $(x - 3)(x + 2)$; в) $(a - 1)(a - 4)$; г) $(a + 2)(a - 8)$. **735.** 260 коров. **736.** а) $-\frac{7}{8}$; б) $-\frac{1}{4}$. **738.** б) -6; 2; в) -1; 1. **746.** 1. **747.** 8. **748.** 71. **749.** а) $-7x^2 - 14$; б) $-a^2 + 2a + 2$; в) $-2a - 10b - 3$; г) $-x^2$. **758.** а) -2; б) 8; в) 0,5; г) 2. **762.** 1,92; 3,84; 4,8; 5,76. **763.** 11. **764.** 52. **765.** 246. **766.** 417. **770.** а) $\frac{1}{3}$; б) 2; в) 0,25; г) -3; д) 8; е) $-3{,}5$. **771.** 1 кг. **772.** 750

и 800 кг. **773.** $2\frac{1}{3}$ ч. **774.** 2,5 ч; 150 км. **775.** 60 км/ч; 50 км/ч; 210 км. **776.** 60 км/ч; 40 км/ч; 24 км. **777.** 16,5 км/ч. **778.** 2,5 км/ч. **779.** 70 сорочек. **780.** 600 и 800 т. **781.** 480 га. **782.** 30 г. **786.** а) 2,3; б) 0,147. **787.** а) 0; $-\frac{5}{6}$; б) 0; $-1{,}6$; в) 0; 2; г) 0; 0,2; д) 0; $1\frac{7}{8}$; е) 0; 1. **788.** а) $9(a+2)^2$; г) $-27(p-2)^3$. **797.** а) -35; б) 156. **800.** 8; 9; 10; 11. **802.** 400 см^2. **803.** 360 см^2. **804.** 80 м^2. **805.** 55,25 см^2. **806.** а) $-2{,}8$; б) 7; в) 91; г) $-4{,}2$; д) 0; е) -50. **809.** а) $(x-4)(x-6)$; б) $(x-8)(x-5)$; д) $(x+4)(x-3)$; е) $(x+5)(x-7)$. **812.** $a=-4$.

Глава V

831. в) $198x-81x^2$; г) $14ab-49$; д) $14b$; е) $-18a^2-162$. **832.** а) a^2+81; б) $-10x+1$; в) $12x-9$; г) a^2+4ab. **833.** б) $4a^2$; в) $-21b-4$; г) $14-5b$; д) $-2a^2+4a+14$; е) $-2y^2+19y-40$. **834.** а) 3; б) 0; в) -14; г) 130. **835.** а) 1,7; б) $\frac{1}{24}$; в) 3; г) 3,125. **836.** а) 2,2; б) 1; в) $\frac{5}{12}$; г) 1. **837.** д) $15c^2-24c+20$; е) $-16a^2+26ab+2b^2$. **838.** б) $-96+48b-6b^2$; в) $-3x^2+2x-12$. **839.** б) $6x^5+60x^4+150x^3$; в) a^3-3a+2; г) $x^3-12x-16$. **842.** а) При $x=16$; б) при $x=0$. **845.** а) $18x^2+54$; б) a^3-8b^3. **848.** 80 и 90 км/ч. **856.** а) 10 000; 144; 0,16; б) 400; 25; 81; в) 81; 9; 1. **862.** б) $\left(b^4-\frac{1}{2}a^2\right)^2$. **881.** а) 49; б) 16. **886.** б) b^2+9; в) x^2+1; д) $75x^2+16$; е) $13c^2+49$. **887.** д) $50n^2-49$; е) $5x^2+0{,}25$. **889.** а) $-4-5x$; б) $-4m+9$; в) $18x^2-2ax-a^2$; г) $2ab+b^2-2a^2$; ж) $32y^2-24xy$; з) $-8a^2-24ab$. **891.** а) $2a^2-40a+12$; б) $1-12b-10b^2$; в) $63p^2$; г) $28xy-98y^2$. **892.** а) $-1{,}5$; б) 7. **893.** а) 0; б) $-0{,}5$. **897.** а) -6; б) 5; г) 2; д) 2,3. **898.** 85 и 90 км/ч. **903.** а) $\frac{3}{4}$; б) $4\frac{4}{5}$; в) $\frac{4}{7}$; г) 1. **904.** д) $\frac{1}{5}$; е) 5. **906.** а) 4 и -4; б) 9 и -9; в) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$; г) 0,5 и $-0{,}5$; д) корней нет; е) 1 и -1; ж) 1,5 и $-1{,}5$; з) $\frac{4}{5}$ и $-\frac{4}{5}$; и) корней нет. **907.** а) 5 и -5; б) 6 и -6; в) $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$; г) $\frac{7}{4}$ и $-\frac{7}{4}$. **911.** а) $(y-1)(5y+1)$; б) $(c+5)(5-7c)$; в) $-(x+y)(15x+y)$; г) $-3b(10a-3b)$; д) $3b(3b-4a^2)$; е) $(5b^3-x)(x-3b^3)$. **912.** а) $(2b-11)(2b+1)$; б) $-(4+3a)(10+3a)$; в) $(3-11m)(5-11m)$; г) $-(p+1)(3p+1)$; д) $5c(5c-6d)$; е) $-9b(2a^2+9b)$. **915.** 38 см. **919.** а) 0,6; б) $-0{,}2$. **920.** 12 км. **930.** а), б) Да. **931.** б) $-0{,}64x^2-1{,}6xy^4-y^8$; в) $-0{,}09c^2+0{,}12cd-0{,}04d^2$; г) $16x^2-36x^6$. **933.** а) $-0{,}1$; б) 4,5. **936.** в) $-y^2-14y-31$; г) $x^2-8x-33$. **941.** а) 4; б) 3. **942.** а) $-1{,}5$; б) -2. **944.** а) $-3y^4+4y^3-y^2-100$; б) $2a+2$. **948.** 30 км. **949.** 6 км/ч. **958.** а) $4(y-1)(x+3)$; б) $6(2-b)(5-a)$; в) $-a(c+4)(b+5)$; г) $a(a+1)(a+b)$. **959.** а) $3(b-2)\times(15-a)$; б) $-5(y+3)(x+8)$; в) $c^3(a-1)(c+1)$; г) $x(x-y)(x+1)$. **962.** а) $(x+y)(x-y-1)$; б) $(a-b)(a+b-1)$; в) $(m+n)(1+m-n)$; г) $(k+p)\times(k-p-1)$. **963.** а) $(a-b)(a+b+1)$; б) $(c+d)(c-d+1)$. **965.** а) 0; 1; -1;

б) 0; 3; −3; в) 0; −1; г) 0; 2; −2. **966.** а) 0; б) 0; 2. **970.** а) 4,6; б) 19,75. **979.** а) 19; б) 15. **980.** 64. **984.** а) 1; б) $\frac{15}{36}$. **989.** а) $5a-4$; б) $7a-9$; в) $-2b-1$; г) $2b+1$; д) $2c^2-82$; е) 75. **991.** в) $5a^2-4a-15$; г) $-4b-13$; д) $-21a^2+21$; е) $18b^2-12b+2$; ж) $3x^2+22$; з) $10y^2-30y+85$. **979.** При всех x. **994.** а) 4; б) 1,5; в) 2,625; г) 0. **996.** а) $\frac{15}{64}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{80}$. **998.** д) $15(x-1)\times$ $\times(3x-1)$; е) $(2n+3)(1-4n)$; ж) $(3a+2)(3a+4)$; з) $(-5x+17)(5x-13)$. **1001.** а) 17,4; б) 17. **1005.** а) $(2x+1)(x^2+x+1)$; б) $(y-5)(y^2-y+7)$; в) $a(a^2-3ab+3b^2)$; г) $(3x-y)(3x^2+y^2)$; д) $(2a+b)(13a^2-5ab+b^2)$; е) $(b+2)\times$ $\times(b^2-26b+244)$. **1008.** а) −4; б) 0,5; в) 2; г) 2. **1010.** а) 34,5; б) 24. **1015.** а) $-a^3-1{,}5a^2-1{,}5a+17$; б) $4m^6-m^4-15m^3-18m^2+81m$. **1016.** a^8- $-2a^4b^4+b^8$. **1019.** а) 131; б) 61; в) 24,125. **1021.** а) При $a=1$; б) при $a=-1$. **1022.** а) При $b=20$; б) при $b=1$. **1027.** а) $2(7+2b)(5a-6b)$; б) $3(7b-c)\times$ $\times(c^2+2)$; в) $3(y+3)(2-x)(2+x)$; г) $6(5a-3b)(a^2+4)$. **1029.** а) 2; −2; −3; б) $\frac{1}{2}$; 3; −3; в) 6; г) −1,5; −1; 1. **1031.** а) $(x-y)(x+y-1{,}5)$; б) $(x+a)\times$ $\times(x-a+0{,}5)$; в) $(2a-b)(2a+b-1)$; г) $(p+4c)(p-4c-1)$; д) $(a+b)(a-b+6)$; е) $(x-y)(x+y-7)$. **1032.** а) $(x+2y)(x-1)(x+1)$; б) $(2y-5)(y-2)(y+2)$; в) $(a-2)(a+2)(a-5)$; г) $(x-4)(x-3)(x+3)$. **1033.** а) $(a+b)(3a+b)$; б) $(b-c)(11c-9b)$; в) $(x-y)(5x+y)$; г) $(a+1)(a-9)$. **1034.** а) $(a-b-5)\times$ $\times(a-b+5)$; д) $(9a-3b+c)(9a+3b-c)$; е) $(bc-b-c-1)(bc+b+c-1)$. **1035.** а) $(x+y)(x^2+xy+y^2)$; б) $-(4x+y)(x^2+xy+y^2)$; в) $(a-b)^2(a+2b)$; г) $(p-1)(p^2-p+1)$; д) $(2b+1)(4b^2+b+1)$; е) $(a-5)(a^2+a+25)$. **1036.** а) $(x^2-xy+y^2)(x+y+2)$; б) $(a^2+ab+b^2)(a-b+3)$; в) $(a-b)(a+b)\times$ $\times(a^2-ab+b^2)$; г) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

Глава VI

1050. (6; 6). **1051.** $a=3$. **1052.** 4 или 9 монет. **1053.** 6 тетрадей. **1054.** 4 глубокие и 6 мелких тарелок. **1055.** 2 и 7; 4 и 4; 6 и 1 соответственно трёхкилограммовых и двухкилограммовых пакетов. **1057.** 17; 28; 39. **1058.** 26. **1059.** а) 6,16; б) −4,32. **1060.** а) $(1+a)^2(1-a)$; б) $(2-b)(2+b)^2$. **1067.** −7,4. **1068.** 11. **1070.** а) 12; б) 26,5. **1071.** а) −1; б) $34\frac{2}{3}$. **1081.** а) $\frac{5}{12}$; б) $7\frac{11}{12}$. **1082.** а) $10c^3-17c^2+19c-40$; б) $21m^2+10m-8$. **1083.** а) $(a+1)(a+x)\times$ $\times(a-x)$; б) $(b+c)(b+3)(b-3)$. **1085.** а) (2; 5); б) (1; −2); в) (4; 2); г) (4,5; 7); д) (−23; −3); е) (7; −4,5). **1086.** а) (5; 2); б) (1; 6); в) (−20; −2); г) (−1,5; −3,5). **1087.** а) $u=-0{,}5$, $v=0{,}2$; б) $p=3$, $q=5$; в) $u=4\frac{1}{3}$, $v=-1\frac{1}{9}$; г) $p=2{,}25$, $q=-3{,}5$. **1088.** а) (−4; 3); б) (−2; 7); в) (−10; 5); г) (−11; −4). **1089.** а) (3; 0,5). **1090.** а) $\left(1\frac{1}{3}; -2\frac{1}{3}\right)$; б) (−0,4; −7,2). **1091.** а) (4,4; 1,72); б) $\left(3\frac{4}{9}; -4\frac{1}{3}\right)$. **1092.** а) $x=7$, $y=1$; б) $a=-3$, $b=1$. **1093.** а) $x=-6$, $y=4$; б) $a=12$, $b=-2$; в) $m=5$, $n=-3$; г) $x=-1$, $y=-5$. **1094.** а) (−15; 12); б) (2; −1,5). **1098.** а) (2; 1); б) (−8; −4); в) (60; 30); г) $\left(2; -\frac{1}{4}\right)$. **1099.** а) (5; −2); б) (−3; 0);

в) $(-5; 10)$; г) $(-3; -3{,}5)$. **1100.** а) $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$; б) $(-0{,}6; -2)$; в) $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$; г) $(2; 1)$; д) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$; е) $y = 6$, $z = -7$. **1101.** а) $x = 1$, $y = -2$; б) $u = 3$, $v = -10$; в) $x = -4$, $y = -1$; г) $a = 10$, $b = 5$. **1102.** а) $x = 100$, $y = 1$; б) $u = 6$, $v = 5$; в) $x = 0{,}4$, $y = -0{,}2$; г) $a = 0{,}1$, $b = 0{,}3$. **1103.** а) $y = 1{,}6x - 3$; б) $y = 6x - 23$; в) $y = -1{,}5x + 11$; г) $y = 2x - 7$. **1104.** $y = 2{,}2x + 11$. **1105.** $y = 1\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$. **1106.** $y = -2\frac{3}{4}x + 11$. **1108.** а) $(7; -2)$; б) $(2; 1)$. **1109.** а) $x = 3$, $y = 4$; б) $x = 6$, $y = 20$; в) $m = 10$, $n = 12$; г) $u = 12$, $v = 15$. **1110.** а) $(9; 8)$; б) $(-0{,}8; -0{,}8)$; в) $(3; 4)$; г) $(-1; 0)$. **1111.** а) $x = 15$, $y = 12$; б) $u = -8$, $v = 6$; в) $x = 12$, $y = -12$; г) $a = 15$, $b = 10$. **1114.** а) $-10x - 1$; б) $-6y + 4$. **1115.** 12 и 7 га. **1116.** 575 и 740 изделий. **1104.** 15 автомобилей. **1105.** 23,77 и 10,97 м. **1106.** 12 см. **1120.** 5 и 7 мешков. **1121.** 40 и 170 руший. **1122.** 18 и 10 лет. **1123.** 120 и 180 деталей. **1124.** 60 км/ч. **1125.** 45 и 50 км/ч. **1126.** 80 и 60 км/ч. **1127.** 5 и 4,5 км/ч. **1128.** 18 км/ч. **1129.** 55 и 5 км/ч. **1130.** 33 и 22 книги. **1131.** 35,75 и 29,25 г. **1132.** 7,8 и 8,3 г/см^3. **1133.** 720 и 1200 га. **1134.** 320 и 360 деталей. **1135.** 1,65 и 1,35 л. **1136.** 37 000 и 8000 р. **1137.** 48 и 32 г. **1138.** 360 и 300 г. **1139.** На 64. **1140.** в) $(p^2 + 2)(p^4 - 2p^2 + 4)$; г) $(3 - m^2) \times$ $\times (9 + 3m^2 + m^4)$. **1151.** 4 кв. ед. **1156.** а) 3; б) 4. **1157.** б) $(1; 18)$; $(2; 9)$; $(3; 6)$; $(6; 3)$; $(9; 2)$; $(18; 1)$. **1158.** $(5; 37)$; $(11; 31)$; $(13; 29)$; $(19; 23)$; $(23; 19)$; $(29; 13)$; $(31; 11)$; $(37; 5)$. **1159.** 935. **1160.** 214. **1161.** 91. **1162.** а) Нет; б) да, в точке $(0; 9)$. **1163.** 20. **1164.** $-0{,}88$. **1174.** $(7; -2)$. **1175.** $a = -1{,}5$. **1176.** $b = 2{,}5$. **1177.** $k = 1{,}5$. **1184.** а) $x = 21$, $y = 25$; б) $x = 1$, $y = 10$; в) $y = 16$, $z = 21$; г) $x = 9$, $y = 11$; д) $x = 10$, $y = 1$; е) $u = -0{,}1$, $v = 0{,}2$. **1185.** а) $(-0{,}25; 1)$; б) $(-0{,}5; 1{,}5)$; в) $(7; 5)$; г) $(4; 4)$. **1186.** а) $x = 4\frac{4}{17}$, $y = 1\frac{13}{17}$; б) $m = -8$, $n = 5$; в) $x = 1$, $y = 1$; г) $p = 2$, $q = \frac{1}{3}$. **1187.** а) $x = -5$, $y = 3$; б) $u = 0$, $v = 4$. **1188.** а) $(5; -4)$; б), в), г) решений нет. **1193.** 6 и 2 ч. **1194.** 3 и 2 ч. **1195.** 560 и 600 га. **1196.** 15 и 12 см. **1197.** 40 и 60. **1198.** 50 и 60 кг. **1199.** 20 и 15 деталей.

Задачи повышенной трудности

1200. 2, 3, 4, 5, 7 и 13. **1201.** а) -4; 10; б) -11; 7; в) 2,5; 5,5; г) $-1{,}3$; 13,3. **1204.** 1,25 кг. **1205.** 520, 572 и 440 орехов. **1207.** 96, 120 и 168. **1208.** 36 и 48. **1209.** 12, 24, 36, 48. **1210.** Делится. **1212.** 77. **1214.** 890. **1218.** 72. **1221.** Первая дробь больше второй. **1229.** $2^{64} - 1$. **1234.** $a = 5$, $b = -2$, $c = 7$, $d = -9$. **1236.** $x = 3$, $y = 2$. **1237.** а) $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$; б) $x = -4$, $y = 1$, $z = 5$; в) $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$. **1238.** 729. **1239.** 24 и 144, или 48 и 120, или 72 и 96. **1241.** 12 и 30 км/ч. **1242.** 8 косцов. **1243.** 40 и 80 км/ч. **1244.** 15 км/ч. **1245.** 6 км, 7,2 км/ч, 3,6 км/ч. **1246.** ≈ 114 кг. **1247.** В 3 раза.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич, **Миндюк** Нора Григорьевна,
Нешков Константин Иванович, **Суворова** Светлана Борисовна

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
7 класс
Базовый уровень
Учебник

Центр математики

Ответственный за выпуск *П. А. Зубкова*
Редактор *П. А. Зубкова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *Л. В. Аникиной, М. А. Тамазовой*
Технический редактор *Е. А. Урвачева*
Компьютерная вёрстка *О. В. Сиротиной*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Подписано в печать 10.10.2022. Формат 70×90/16.
Гарнитура SchoolBookCSanPin. Уч.-изд. л. 14,30. Усл. печ. л. 18,72.
Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение 1.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.