МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

7 класс

Базовый уровень

УЧЕБНИК

Под редакцией С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

15-е издание, переработанное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 7-й класс : базовый уровень : учеб-
М34 ник / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. — 15-е изд., перераб. — Москва : Просвещение, 2023. — 255, [1] с. : ил.
ISBN 978-5-09-102535-4.

Данный учебник является первой частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ № 287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены новые по форме задания: задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-102535-4

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый учебный предмет — *алгебру*, являющуюся одним из важнейших разделов математики.

Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов решения разнообразных задач. Алгебра используется в современном мире очень широко: в физике, биологии, экономике, информатике, архитектуре и др.

Изучая математику в 5 и 6 классах, вы научились выполнять различные действия с целыми числами и дробями, находить корни уравнений, решать текстовые задачи. В 7 классе вы узнаете ещё много нового. Вы научитесь выполнять различные тождественные преобразования: сложение, вычитание и умножение многочленов, разложение многочленов на множители и многое другое. Это даст вам возможность решать разнообразные задачи. Впервые вы узнаете о способах решения систем уравнений с двумя переменными. Теперь вы сможете решать текстовые задачи, используя не только уравнения с одной переменной, но и системы уравнений с двумя переменными. Вы познакомитесь со свойствами некоторых функций, научитесь строить их графики. Знания и умения, приобретённые на уроках алгебры в 7 классе, помогут вам при изучении многих школьных предметов: геометрии, информатики, физики, химии и др.

Надеемся, что, занимаясь по этому учебнику, вы полюбите новый учебный предмет — алгебру. Для этого прежде всего написанное в нём должно быть понятно. Поэтому в объяснительных текстах подробно излагается новый материал, приводятся решения различных задач. Они помогут вам разобраться в изучаемых приёмах преобразования выражений, решения уравнений, построения графиков функций и др. Материал, который нужно запомнить, печатается на цветном фоне, чтобы вы обратили на него внимание. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса математики 5—6 классов». Контрольные вопросы и задания, помещённые в конце каждого параграфа, позволят вам задуматься о сути изученного материала.

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что вы примете активное участие в выполнении упражнений под названием «задача-исследование», рассчитанных на коллективное обсуждение приёмов решения, а также заданий, предназначенных для работы в парах. Выполняя такие задания, вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей и отстаивать свою позицию.

Если вы интересуетесь математикой, то ваше внимание, безусловно, привлечёт материал рубрики «Для тех, кто хочет знать больше», помещённый в конце каждой главы. Специально для ребят, находящих радость в решении непростых задач, в учебнике помещены «Задачи повышенной трудности».

Конечно, многим из вас любопытно узнать, как и почему зарождался и затем развивался тот или иной раздел алгебры. Для ответа на эти вопросы в учебнике даются «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении нового интересного предмета — алгебры!

В учебнике используются следующие условные обозначения:

— материал, который важно знать

— текст, который нужно запомнить

▶ — начало решения задачи

◁ — окончание решения задачи

● — начало обоснования утверждения или вывода формулы

○ — окончание обоснования утверждения или вывода формулы

19. — задание обязательного уровня

201. — задание повышенной трудности

П — упражнения для повторения

Глава I ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

В этой главе повторяются начальные сведения из курса алгебры, с которыми вы познакомились в 5—6 классах. Вам уже приходилось находить значения выражений с переменными, сравнивать их, решать уравнения, применять их при решении несложных задач. Теперь эти знания и умения будут расширены. Вы узнаете, что называется тождеством, тождественным преобразованием, научитесь выполнять тождественные преобразования выражений с переменными и применять их при решении уравнений. Расширится круг задач, которые вы сможете решать с помощью уравнений.

§ 1 ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

1. Рациональные числа

В курсе математики вы встречались с различными видами чисел. Числа 1, 2, 3, ..., которые используют при счёте, называют натуральными числами. Они образуют *множество натуральных чисел. Натуральные числа, противоположные им числа и число нуль составляют множество целых чисел.*

Кроме целых, вам известны *дробные числа* (положительные и отрицательные). *Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел.*

- Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой $\boldsymbol{N}$ (от первой буквы латинского слова *naturalis* — естественный, природный),
- множество целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$ (от первой буквы немецкого слова *Zahl* — число),
- множество рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$ (от первой буквы французского слова *quotient* — отношение).

Напомним, что в математике словом «множество» принято называть любую совокупность объектов, объединённых каким-либо общим признаком. Например, можно говорить о множестве людей — граждан РФ, о множестве символов, используемых для записи математических выражений, о множестве окружностей с центром в данной точке. Но мы сейчас будем рассматривать *числовые множества*.

Для того чтобы записать, что какое-либо число принадлежит некоторому множеству, используют знак $\in$. Например, утверждение, что число 2 является натуральным (т. е. что число 2 принадлежит множеству натуральных чисел), можно записать так: $2 \in \boldsymbol{N}$. А то, что число -2 не является натуральным, можно записать так: $-2 \notin \boldsymbol{N}$.

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* множества A. Это записывают так: $B \subset A$.

Так, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$. Точно так же множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел: $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Имеем цепочку включений: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Соотношения между множествами принято иллюстрировать с помощью специальных схем, называемых кругами Эйлера. На рисунке 1, *а* изображено соотношение $B \subset A$. Здесь видно, что все точки круга B принадлежат и кругу A. А на рисунке 1, *б* проиллюстрировано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$.

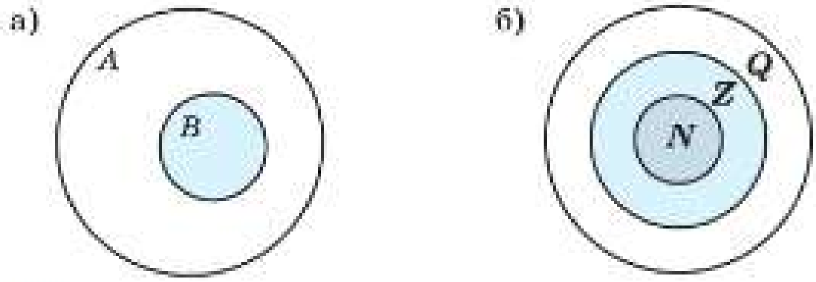


Рис. 1

Всякое рациональное число, как целое, так и дробное, можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Одно и то же рациональное число можно представить в таком виде разными способами.

Например, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{40}{80}$; $-0{,}7=\frac{-7}{10}=\frac{-14}{20}$; $10{,}3=\frac{103}{10}=\frac{515}{50}$; $5=\frac{5}{1}=\frac{20}{4}$.

Среди дробей, с помощью которых записывается данное рациональное число, всегда можно указать дробь с наименьшим знаменателем. Эта дробь несократима. Для целых чисел такая дробь имеет знаменатель, равный 1.

Термин «рациональное число» произошёл от латинского слова *ratio*, что в переводе означает «отношение» (частное).

Рассмотрим вопрос о представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей.

Представим в виде десятичной дроби число $\frac{1}{8}$. Для этого разделим числитель дроби на её знаменатель. Получим

```
  1  | 8
 10  |0,125
- 8
  20
- 16
   40
-  40
    0
```

Таким образом, $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

Точно так же можно показать, что $1\frac{3}{20} = 1{,}15$; $-\frac{1}{40} = -0{,}025$.

Применим теперь этот способ обращения обыкновенной дроби в десятичную к числу $\frac{8}{37}$. Делим числитель на знаменатель:

```
  8    | 37
 80    |0,216216
-74
  60
- 37
 230
-222
    80
  - 74
     60
   - 37
     230
   - 222
       8
```

Первым остатком, полученным при делении, является само число 8. Второй остаток равен 6, третий равен 23. Затем опять получили в остатке 8. Продолжая деление, мы, как и раньше, приписываем к остаткам нули. Поэтому следующим остатком снова будет 6, потом 23, и снова остаток 8 и т. д. Сколько бы мы ни продолжали деление, мы не получим в остатке 0. Значит, деление никогда не закончится.

Говорят, что дробь $\frac{8}{37}$. обращается в *бесконечную десятичную дробь* 0,216216...:

$$\frac{8}{37} = 0{,}216216\ldots.$$

Так как при делении числителя 8 на знаменатель 37 последовательно повторяются остатки 8, 6 и 23, то в частном в одном и том же порядке будут повторяться три цифры: 2, 1, 6. Бесконечные десятичные дроби такого вида называют *периодическими*. Повторяющаяся группа цифр составляет *период дроби*. При записи периодических десятичных дробей период пишут один раз, заключая его в круглые скобки:

$$\frac{8}{37} = 0{,}(216).$$

Эта запись читается так: нуль целых, двести шестнадцать в периоде.

Число $\frac{7}{12}$ также записывается в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\frac{7}{12} = 0{,}5833\ldots = 0{,}58(3).$$

Эта запись читается так: нуль целых, пятьдесят восемь сотых, три в периоде.

Точно так же можно показать, что

$$5\frac{1}{6} = 5{,}1(6), \quad -\frac{5}{11} = -0{,}(45).$$

Вообще каждое дробное число можно представить либо в виде десятичной дроби (конечной десятичной дроби), либо в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби, приписав справа в качестве десятичных знаков бесконечную последовательность нулей. Например:

$$2{,}5 = 2{,}5000\ldots; \qquad -3 = -3{,}000\ldots.$$

Таким образом,

каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Верно и обратное утверждение:

каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Например, $0,(3)=\frac{1}{3}$; $2,(36)=2\frac{4}{11}$; $0,0(945)=\frac{7}{74}$.

Эти равенства легко проверить, выполнив деление.

Разные бесконечные десятичные периодические дроби представляют разные рациональные числа. Исключением являются дроби с периодом 9, которые считают другой записью дробей с периодом 0:

$$0,(9) = 0,999... = 1,000... = 1;$$

$$16,1(9) = 16,1999... = 16,2000... = 16,2.$$

Бесконечные десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0. Заметим, что при обращении обыкновенной дроби в десятичную не может получиться дробь с периодом 9.

Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют *иррациональными числами* (приставка «ир» означает «отрицание»). Иррациональные числа нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Приведём примеры иррациональных чисел:

3,010010001... (единицы разделяются последовательно одним, двумя, тремя и т. д. нулями);

–5,020022000222... (число нулей и число двоек каждый раз увеличивается на единицу).

Иррациональным числом является число π, выражающее отношение длины окружности к её диаметру:

$\pi = 3,1415926...$.

Множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел составляют множество действительных чисел.

Более подробно о действительных числах вы узнаете в 8 классе. В курсе алгебры 7 класса все действия мы будем выполнять только с рациональными числами.

Упражнения

1. Верно ли, что:

а) $-4 \in \boldsymbol{N}$; $-4 \in \boldsymbol{Z}$; $-4 \in \boldsymbol{Q}$;

б) $5,6 \notin \boldsymbol{N}$; $5,6 \in \boldsymbol{Z}$; $5,6 \in \boldsymbol{Q}$;

в) $28 \in \boldsymbol{N}$; $28 \in \boldsymbol{Z}$; $28 \in \boldsymbol{Q}$?

2. Какое из множеств (A или B) является подмножеством другого:
а) A — множество чётных чисел, B — множество чисел, кратных 4;
б) A — множество делителей числа 12, B — множество делителей числа 60;
в) A — множество треугольников, B — множество прямоугольных треугольников?

3. Представьте в виде отношения целого числа к натуральному несколькими способами числа $1\frac{2}{5}$; 0,3; $-3\frac{1}{4}$; -27; 0.

4. Представьте в виде дроби с наименьшим натуральным знаменателем числа 36; -45; 4,2; $-0{,}8$; $15\frac{1}{6}$; $-\frac{2}{9}$.

5. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число:

а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{7}$; д) $-\frac{8}{15}$; ж) -17; и) $-1\frac{3}{40}$;

б) $\frac{5}{6}$; г) $-\frac{20}{9}$; е) 10,28; з) $\frac{3}{16}$; к) $2\frac{7}{11}$.

6. Сравните рациональные числа:

а) 0,013 и 0,1004;
б) -24 и 0,003;
в) $-3{,}24$ и $-3{,}42$;
г) $\frac{3}{8}$ и 0,375;
д) $-1{,}174$ и $-1\frac{7}{40}$;
е) $\frac{10}{11}$ и $\frac{11}{12}$;
ж) $-2{,}005$ и $-2{,}04$;
з) $-1\frac{3}{4}$ и $-1{,}75$;
и) 0,437 и $\frac{7}{16}$;
к) $-\frac{1}{8}$ и $-0{,}13$;
л) 1,37 и 1,(37);
м) $-5{,}(34)$ и $-5{,}34$.

7. Укажите какое-либо число, которое:

а) больше $\frac{1}{8}$, но меньше $\frac{1}{7}$; б) больше $\frac{1}{6}$, но меньше $\frac{1}{5}$.

8. Укажите несколько чисел, заключённых между:

а) 10 и 10,1; в) -1001 и -1000;

б) $-0{,}001$ и 0; г) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

9. Запишите пять чисел, заключённых между числами:

а) 1,3 и 1,4; в) $-10\ 000$ и -1000;

б) 5 и $5\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$.

10. Найдите:

а) $|x|$, если $x = 10;\ 0{,}3;\ 0;\ -2{,}7;\ -9$; б) x, если $|x| = 6;\ 3{,}2;\ 0$.

11. Запишите без знака модуля:

а) $|a|$, где $a > 0$; в) $|2b|$, где $b < 0$; д) $|y - 3|$, где $y < 3$.
б) $|c|$, где $c < 0$; г) $|x - 5|$, где $x > 5$;

12. Среди чисел 1458; 1805; 2342; 3620; 89217; 364425 найдите и выпишите те, которые: а) делятся на 2; б) кратны 9; в) делятся на 5, но не кратны 3.

13. Разложите на простые множители:

а) 66; б) 1200; в) 5460; г) 1001.

2. Числовые выражения

Решим задачу:

«Туристы в течение двух часов ехали на велосипедах по шоссе со скоростью 16 км/ч, а затем шли лесом ещё 7 км. Какова длина всего маршрута?»

По шоссе туристы проехали $16 \cdot 2$ (км), а лесом прошли 7 км. Поэтому длина всего маршрута равна $(16 \cdot 2 + 7)$ (км), т. е. 39 км.

Решая задачу, мы получили *числовое выражение* $16 \cdot 2 + 7$.

Числовые выражения составляются из чисел с помощью знаков действий и скобок. Приведём ещё примеры числовых выражений: $43 : 5$; $9{,}6 - 3 \cdot 1{,}2$; $5 \cdot (7{,}4 - 6{,}1)$.

Число, которое получается в результате выполнения действий в числовом выражении, называют *значением выражения*.

Найдём, например, значение выражения $12 \cdot 6 - 35 : 7$. Для этого мы должны, соблюдая принятый порядок действий, выполнить сначала умножение и деление, а затем вычитание:

1) $12 \cdot 6 = 72$; 2) $35 : 7 = 5$; 3) $72 - 5 = 67$.

Число 67 — значение выражения $12 \cdot 6 - 35 : 7$.

Если в выражении есть деление на нуль, то выражение не имеет числового значения, так как на нуль делить нельзя. О таких выражениях говорят, что они не имеют смысла.

Например, не имеют смысла выражения $35 : (4 \cdot 2 - 8)$, $\frac{1}{12 + 4 \cdot (-3)}$.

Упражнения

14. Найдите значение выражения:
а) $6{,}965 + 23{,}3$; г) $6{,}5 \cdot 1{,}22$; ж) $53{,}4 : 15$;
б) $50{,}4 - 6{,}98$; д) $0{,}48 \cdot 2{,}5$; з) $16{,}94 : 2{,}8$;
в) $88 - 9{,}804$; е) $0{,}016 \cdot 0{,}25$; и) $75 : 1{,}25$.

15. Выполните действия:
а) $481{,}92 : 12 - 20{,}16$; б) $1{,}08 \cdot 30{,}5 - 9{,}72 : 2{,}4$.

16. Найдите значение выражения:
а) $3{,}6 : 0{,}08 + 5{,}2 \cdot 2{,}5$; б) $(9{,}885 - 0{,}365) : 1{,}7 + 4{,}4$.

17. Выполните действие:
а) $\frac{5}{6} + \frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{10} - \frac{4}{15}$; д) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$; ж) $2\frac{6}{7} : 1\frac{3}{7}$;
б) $\frac{7}{8} - \frac{5}{6}$; г) $5 - 3\frac{2}{7}$; е) $\frac{5}{8} : \frac{9}{10}$; з) $6\frac{3}{5} \cdot 10$.

18. Выполните действие:
а) $4{,}2 - 8$; г) $1{,}2 \cdot (-5)$; ж) $38 : (-0{,}19)$;
б) $-2{,}4 + 5{,}6$; д) $-8 \cdot 4{,}5$; з) $-16 : 0{,}2$;
в) $-2{,}1 - 3{,}2$; е) $-0{,}9 \cdot (-0{,}1)$; и) $-6{,}4 : (-8)$.

19. Вычислите:
а) $6\frac{1}{3} - 8$; г) $\frac{3}{8} : \left(-\frac{9}{16}\right)$; ж) $\frac{4}{7} \cdot (-49)$;
б) $-2\frac{2}{7} + 4\frac{3}{5}$; д) $\frac{5}{12} \cdot (-6)$; з) $-16 : \left(-\frac{4}{9}\right)$;
в) $5\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4}$; е) $-3\frac{2}{9} \cdot 3$; и) $-3\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$.

20. Запишите проценты в виде десятичной дроби: 1%; 5%; 7%; 10%; 20%; 25%; 36%; 50%; 75%; 100%; 138%; 263%; 0,2%; 0,43%.

21. Представьте дроби в виде процентов: 0,01; 0,04; 0,23; 1,17; 2,78; 4,5; 0,005; 0,9971; 1,369; 2,2785; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{20}$.

22. Найдите:
а) 1% числа 240; г) 9,5% числа 280;
б) 40% числа 15; д) число, 30% которого равны 18;
в) 120% числа 8; е) число, 125% которого равны 550.

23. На пакете молока написано, что в молоке содержится 3,2% жира, 2,5% белка и 4,7% углеводов. Сколько граммов каждого из этих веществ содержится в стакане (200 г) молока?

24. В фермерском хозяйстве собирали по 36 ц пшеницы с гектара. Применение интенсивной технологии позволило увеличить производство пшеницы на той же площади на 25%. Сколько центнеров пшеницы стали собирать с 1 га в этом фермерском хозяйстве?

25. За несколько книг уплатили 320 р. Стоимости двух из этих книг составили соответственно 30% и 45% израсходованных денег. На сколько рублей одна из этих книг дешевле другой?

26. Используя три раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно: а) 6; б) 8; в) 3; г) 1.

27. Составьте выражение, содержащее два знака действия, значение которого равно: а) 12; б) 0.

28. Какое из выражений не имеет смысла?

1. $\dfrac{2{,}6 - 13 \cdot 0{,}2}{8}$ 2. $\dfrac{0{,}57}{0{,}8 - 0{,}4 \cdot 2}$ 3. $(1{,}7 \cdot 2 - 3{,}4) : 11$

29. Составьте какое-либо выражение, не имеющее смысла.

30. Составьте выражение для решения задачи: «Из двух населённых пунктов, расстояние между которыми 40 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Какое расстояние будет между ними через 3 ч, если известно, что скорость одного пешехода 4 км/ч, а скорость другого — 5 км/ч?»

31. Решите задачу, составив выражение: «Один рабочий изготовляет за час 7 деталей, а другой — 9 деталей. Сколько деталей они изготовят за 4 ч?»

32. Используя термины «сумма», «разность», «произведение» и «частное», прочитайте выражение:

а) $8{,}5 - 7{,}3$; д) $2 \cdot 9{,}5 + 14$; и) $2{,}5 - (3{,}2 + 1{,}8)$;
б) $4{,}7 \cdot 12{,}3$; е) $(10 - 2{,}7) : 5$; к) $(5{,}74 - 1{,}24) \cdot 3{,}6$;
в) $65 : 1{,}3$; ж) $6{,}1 \cdot (8{,}4 : 4)$; л) $8 - (1{,}71 + 0{,}19)$;
г) $5{,}6 + 0{,}9$; з) $(6{,}4 + 7) : 2$; м) $0{,}36 : 0{,}3 - 1{,}78$.

33. *(Задача-исследование.)* Из 36 учащихся класса каждый изучает хотя бы один иностранный язык — английский или немецкий. Известно, что 25 учащихся изучают английский язык, а 20 учащихся — немецкий язык.

1) Укажите число учащихся, изучающих хотя бы один из этих языков.

2) Вычислите число учащихся, изучающих оба языка — английский и немецкий.

3) Найдите, сколько процентов учащихся изучают оба языка.

П

34. У Ивана в социальной сети 24 подписчика. Из них $\frac{2}{3}$ слушают современную музыку, а остальные предпочитают классическую музыку. Сколько подписчиков Ивана слушают классическую музыку?

35. Новый спектакль посетили 24 семиклассника, что составило $\frac{2}{3}$ всех обучающихся в параллели седьмых классов. Сколько всего человек учится в этой параллели?

36. В июле семья Иванушкиных израсходовала 250 кВт · ч, а в следующем месяце они уехали отдыхать, поэтому расход электроэнергии в августе уменьшился на 80%. В сентябре семья вернулась, но в связи с наступлением холодной погоды пришлось включать обогреватель, что увеличило расход электроэнергии на 620% по сравнению с августом. Постройте столбчатую диаграмму расхода электроэнергии семьёй Иванушкиных.

3. Выражения с переменными

Двигаясь со скоростью 60 км/ч, автомобиль за 2 ч пройдёт $60 \cdot 2$ км, за 3 ч — $60 \cdot 3$ км, за 5 ч — $60 \cdot 5$ км, за 5,5 ч — $60 \cdot 5{,}5$ км. Вообще за t ч он пройдёт $60t$ км. Изменяя значение t, мы можем с помощью выражения $60t$ находить путь, пройденный автомобилем за разные промежутки времени. Для этого достаточно вместо буквы t подставить её значение и выполнить умножение. Букву t в выражении $60t$ называют *переменной*, а само выражение $60t$ — *выражением с переменной*.

Приведём ещё пример. Пусть длины сторон прямоугольника равны a см и b см. Тогда его площадь равна ab см^2. Выражение ab содержит две переменные a и b. Оно показывает, как находить площадь прямоугольника при различных значениях a и b. Например:

если $a = 8$ и $b = 11$, то $ab = 8 \cdot 11 = 88$;
если $a = 25$ и $b = 4$, то $ab = 25 \cdot 4 = 100$.

Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-либо её значение, то получится числовое выражение. Его значение называют *значением выражения с переменными* при выбранных значениях переменных.

Так, число 88 есть значение выражения ab при $a = 8$ и $b = 11$, число 100 есть значение этого выражения при $a = 25$ и $b = 4$.

Рассмотрим выражение $\frac{b}{b-3}$. При любом $b \neq 3$ можно найти его значение. Например, если $b = 13$, то $\frac{b}{b-3} = \frac{13}{13-3} = \frac{13}{10} = 1{,}3$.

При $b = 3$ значение этого выражения найти нельзя, так как в этом случае делитель $b - 3$ равен нулю. Говорят, что при $b = 3$ выражение *не имеет смысла*.

Некоторые выражения имеют смысл при всех значениях переменных. Примерами могут служить выражения

$$x(x+1), \quad ay - 4, \quad \frac{a^2 - 10}{3}.$$

Выражения с переменными используются для записи *формул*.

Рассмотрим примеры.

Любое чётное число m можно представить в виде произведения числа 2 и целого числа n, т. е.

$$m = 2n.$$

Если в эту формулу вместо n подставлять целые числа, то значениями переменной m будут чётные числа. Формулу $m = 2n$ называют *формулой чётного числа*.

Формулу $m = 2n + 1$, где n — целое число, называют *формулой нечётного числа*.

Точно так же можно записать формулу числа, кратного любому другому натуральному числу.

Например, формулу числа, кратного 3, можно записать так: $m = 3n$, где n — целое число.

Упражнения

37. Найдите значения выражения:

а) $4x - 12$ при $x = 7$; 0; -5;

б) $2{,}8 - 0{,}5y$ при $y = 3$; 0; -6.

38. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните её, вычислив значения выражений $3x - 1$ и $-3x + 1$ для указанных значений x.

x	-2	-1	0	1	2	4	5
$3x - 1$							
$-3x + 1$							

Какими числами являются соответственные значения выражений $3x - 1$ и $-3x + 1$?

39. Найдите значения выражений $10-2y$ и $10+2y$ и запишите их в соответствующие клетки таблицы, перечертив её в тетрадь.

y	-3	-1	0	2	3	4	6
$10-2y$							
$10+2y$							

40. Какие значения принимают сумма $x+y$ и произведение xy при следующих значениях переменных:

а) $x=1{,}2$, $y=-2{,}5$;
б) $x=-0{,}8$, $y=3$;
в) $x=0{,}1$, $y=0{,}2$;
г) $x=-1{,}4$, $y=-1{,}6$?

41. Найдите значение выражения $5m-3n$, если:

а) $m=-\frac{2}{5}$, $n=\frac{2}{3}$;
б) $m=0{,}2$, $n=-1{,}4$.

42. Вычислите значение выражения $\frac{1}{2}x-y$, если:

а) $x=2{,}4$, $y=0{,}8$;
б) $x=-3{,}6$, $y=5$;
в) $x=4{,}8$, $y=-2{,}1$;
г) $x=-4{,}4$, $y=-3$.

43. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу, вычислив значения выражения $a-2b$.

a	5	-2	4	1	6
b	-3	3	0	-1	4
$a-2b$					

44. Известно, что при некоторых значениях x и y значение выражения $x-y$ равно 0,7. Какое значение принимает при тех же x и y выражение: а) $5(x-y)$; б) $y-x$; в) $\frac{1}{x-y}$; г) $\frac{x-y}{y-x}$?

45. Известно, что при некоторых значениях a и b значение выражения $a-b$ равно 4. Чему равно при тех же a и b выражение $\frac{12}{b-a}+\frac{16}{(b-a)^2}$? Выберите верный ответ.

1. -2 2. 2 3. -4 4. 4

46. Вычислите значение выражения:

а) $ax-3y$ при $a=10$, $x=-5$, $y=-\frac{1}{3}$;

б) $ax+bx+c$ при $a=\frac{1}{2}$, $x=2$, $b=-3$, $c=5{,}8$.

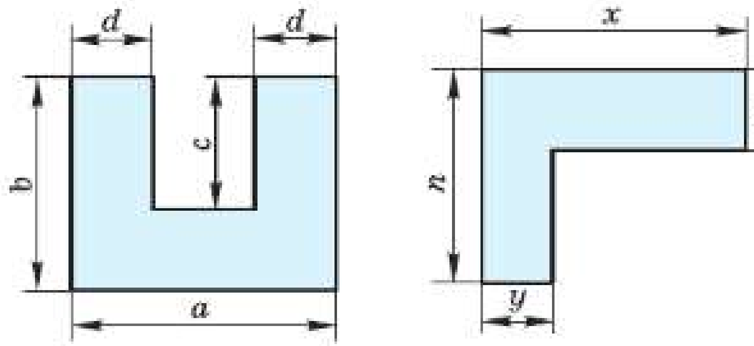


Рис. 2

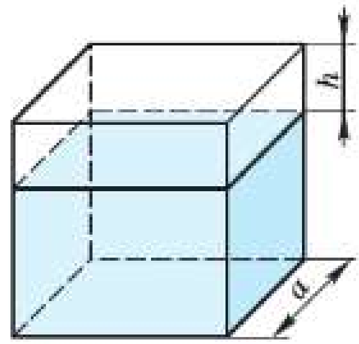


Рис. 3

47. Опытное поле разбили на два участка. Площадь первого участка a га, а второго — b га. С каждого гектара первого участка собрали 32 ц пшеницы, а с каждого гектара второго участка собрали 40 ц. Сколько пшеницы собрали с обоих участков? Вычислите при $a = 120$ и $b = 80$.

48. На стройке работало 5 бригад, по a человек в каждой, и 3 бригады, по b человек в каждой. Сколько человек работало на стройке? Вычислите при $a = 25$ и $b = 32$.

49. На рисунке 2 указаны длины отрезков (в сантиметрах). Для каждой фигуры составьте выражение для вычисления её площади (в квадратных сантиметрах).

50. Ребро куба равно a м. От этого куба отрезан прямоугольный параллелепипед, высота которого равна h м (рис. 3). Найдите объём оставшейся части.

51. В 250 г водного раствора соли содержалось x г соли. Какой стала концентрация раствора после добавления в него 5 г соли? Выберите верный ответ.

1. $\frac{x}{250} \cdot 100\%$ 2. $\frac{x+5}{250} \cdot 100\%$ 3. $\frac{x}{255} \cdot 100\%$ 4. $\frac{x+5}{255} \cdot 100\%$

52. В сплаве олова и свинца массой 20 кг содержалось x кг олова. Каким стало процентное содержание олова в сплаве после добавления в него 2 кг олова?

53. Длина прямоугольника a см, ширина b см. Что означает выражение:

а) ab; б) $2a + 2b$; в) $a + b$; г) $2a$?

54. Тетрадь стоит x р., а карандаш стоит y р. Что означает выражение:

а) $x + y$; б) $3x + y$; в) $2x + 3y$; г) $\frac{x}{y}$?

55. Прочитайте, пользуясь терминами «сумма», «разность», «произведение» и «частное», выражение:

а) mx; в) $(a + 5)x$; д) $2x + 1$; ж) $ab + bc$;

б) $10 + ab$; г) $m - 8a$; е) $\frac{a}{b} + c$; з) $(a - b)(a + b)$.

56. Запишите в виде выражения:

а) сумму чисел b и c;
б) разность чисел a и m;
в) квадрат числа x;
г) куб числа y;
д) сумму числа x и произведения чисел a и b;
е) разность числа m и частного чисел x и y;
ж) произведение суммы чисел a и b и числа c;
з) произведение числа a и суммы чисел x и y.

57. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $5y + 2$; б) $\frac{18}{y}$; в) $\frac{1}{x-7}$; г) $\frac{m-1}{4}$; д) $\frac{7a}{3+a}$; е) $\frac{2b}{10-b}$?

58. Какое из выражений $\frac{14}{a^2}$, $\frac{14}{a^2+1}$ или $\frac{14}{a^2-1}$ имеет смысл при любом значении a?

59. Составьте формулу числа:

а) кратного 5; б) кратного 10; в) кратного 101.

60. Напишите формулу числа, кратного 7. Найдите по этой формуле два трёхзначных числа, кратных 7.

61. *(Для работы в парах.)* Докажите, что всякое простое число, начиная с 5, либо увеличенное, либо уменьшенное на 1, делится на 6.

1) Проверьте утверждение на примерах. Одному учащемуся рекомендуем взять простые числа из третьего десятка, другому — из седьмого десятка.

2) Обсудите друг с другом, из чего следует справедливость указанного свойства.

3) Проведите доказательство.

П

62. Найдите число, если известно, что:

а) 3% этого числа равны 1,8;
б) 85% этого числа равны 17;
в) 130% этого числа равны 3,9;
г) 6,2% этого числа равны 9,3.

63. После того как из бидона отлили 30% молока, в нём осталось 14 л. Сколько литров молока было в бидоне первоначально?

64. Перевыполнив план на 15%, завод выпустил за месяц 230 станков. Сколько станков нужно было выпустить за месяц по плану?

65. На выборах голоса за двух кандидатов распределились в отношении 5:7. Всего в голосовании приняли участие 252 человека. Сколько голосов набрал победитель?

4. Сравнение значений выражений

Решим задачу: «Пшеницей засеяли два опытных участка площадью 48 га и 60 га. С первого участка собрали 1800 ц пшеницы, а со второго — 2100 ц. На каком участке урожайность выше?»

Урожайность выражается частным от деления массы пшеницы, собранной с участка, на площадь участка. Чтобы узнать, на каком участке урожайность выше, надо сравнить значения выражений $1800:48$ и $2100:60$. Так как $1800:48=37{,}5$ и $2100:60=35$, то урожайность выше на первом участке.

Для любых двух числовых выражений можно установить, равны их значения или нет, и если они не равны, то какое из них больше и какое меньше.

Результат сравнения значений выражений можно записать в виде равенства или неравенства. Например, результат сравнения частных $1800:48$ и $2100:60$ можно записать в виде неравенства

$$1800:48>2100:60.$$

Если выражения содержат переменные, то для разных значений переменных результат сравнения значений этих выражений может оказаться различным. Сравним, например, значения выражений $2a$ и $a+4$ при $a=0;\ 4;\ 10$.

Если $a=0$, то $2a=0$ и $a+4=4$, т. е. при $a=0$ верно неравенство $2a<a+4$.

Если $a=4$, то $2a=8$ и $a+4=8$, т. е. при $a=4$ верно равенство $2a=a+4$.

Если $a=10$, то $2a=20$ и $a+4=14$, т. е. при $a=10$ верно неравенство $2a>a+4$.

Иногда требуется установить, между какими числами заключено значение выражения.

Рассмотрим пример. Пусть при взвешивании металлического шарика установили, что его масса больше 86 г, но меньше 87 г. Обозначим массу шарика (в граммах) буквой m. Тогда результат взвешивания можно записать так: $m>86$ и $m<87$ — или иначе: $86<m$ и $m<87$.

Два неравенства $86<m$ и $m<87$ можно записать *в виде двойного неравенства*

$$86<m<87.$$

Неравенство $86 < m < 87$ читают так: «m больше 86 и меньше 87».

Рассмотрим ещё один пример. Число дней в месяце меньше 31 или равно 31. Обозначим число дней в месяце буквой n. Тогда

$$n < 31 \quad \text{или} \quad n = 31.$$

Вместо этой записи обычно пишут одно неравенство

$$n \leqslant 31$$

(читают: «n меньше или равно 31»).

Число дней в месяце больше или равно 28:

$$n > 28 \quad \text{или} \quad n = 28.$$

В таких случаях также пишут короче:

$$n \geqslant 28$$

(читают: «n больше или равно 28»).

Так как $n \geqslant 28$, то $28 \leqslant n$.

Два неравенства $28 \leqslant n$ и $n \leqslant 31$ можно записать в виде двойного неравенства

$$28 \leqslant n \leqslant 31.$$

Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ и $<$, называют *строгими неравенствами*, а неравенства, составленные с помощью знаков $\geqslant$ и $\leqslant$, называют *нестрогими*.

Упражнения

66. Сравните значения выражений:

а) $2{,}06 \cdot 3{,}05$ и $21{,}28 : 3{,}5$;

б) $97{,}2 : 2{,}4$ и $62 - 21{,}6$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;

г) $16 - 3\frac{5}{8}$ и $15 - 2\frac{1}{4}$.

67. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

а) $56 \cdot \frac{2}{7}$ и $56 : \frac{7}{2}$;

б) $9 : 0{,}6$ и $9 \cdot 0{,}6$;

в) $2{,}1 - 5{,}8$ и $2{,}1 - 1{,}7$;

г) $6{,}13 - 7{,}57$ и $-6{,}13 + 7{,}57$.

68. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

а) $6{,}16 - 7{,}44$ и $7{,}23 + 8{,}11$;

б) $24{,}12 \cdot \frac{1}{4}$ и $24{,}12 : \frac{1}{4}$;

в) $5{,}7 - 3{,}11$ и $5{,}7 - 2{,}16$;

г) $65{,}4 \cdot \frac{5}{6}$ и $65{,}4 : \frac{5}{6}$.

69. Сравните значения выражений:

а) $0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9$ и $0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}9$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ и $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$.

70. Сравните значения выражений:
а) $9,5 - a$ и $0,5a$ при $a = 3,8;\ 0;\ 5;$
б) $3 - c$ и $4c - 5$ при $c = 1,6;\ -3;\ -6.$

71. Сравните значения выражений:
а) x и $-x$ при $x = 8;\ 0;\ -3;$ б) x и $100x$ при $x = 5;\ 0;\ -5.$

72. Сравните значения выражений:
а) $5m - 0,8$ и $0,8m - 5$ при $m = -1;$
б) ab и $a : b$ при $a = 4,6,\ b = 0,23.$

73. Верно ли неравенство $2x + 5 < 3x$ при $x = 4,2;\ 5;\ 6,5$?

74. Прочитайте неравенство:
а) $8,1 < 8,14 < 8,6;$ г) $-40 < -38,7 < -30;$
б) $9 < 9,865 < 10;$ д) $1\frac{3}{5} < 1,7 < 1\frac{4}{5};$
в) $-900 < -839 < -800;$ е) $2,42 < 2\frac{3}{7} < 2,43.$

75. Запишите в виде двойного неравенства:
а) 8 меньше 13 и 13 меньше 15;
б) 4,1 меньше 4,18 и 4,18 меньше 4,2;
в) 63,5 больше 63 и меньше 64;
г) −8,1 больше −11 и меньше −7;
д) a больше 1,8 и меньше 2,8;
е) x больше a и меньше b.

76. Подберите какое-нибудь число, заключённое между числами:
а) 8,6 и 8,7; б) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{8}$; в) −3,6 и −3,7; г) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$.
Результат запишите в виде двойного неравенства.

77. Запишите в виде двойного неравенства:
а) 0,79 больше 0,7 и меньше 0,8;
б) $6\frac{4}{5}$ больше 6 и меньше 7;
в) −4,6 больше −10 и меньше 0;
г) m больше −16 и меньше −15;
д) k больше 2,65 и меньше 2,66;
е) y больше m и меньше n.

78. На координатной прямой точками отмечены числа a, b и c (рис. 4). Укажите для каждой точки соответствующее ей число, если известно, что $a > b$ и $c > a$. Составьте из чисел a, b и c двойное неравенство с помощью знака $<$.

Рис. 4

79. Прочитайте неравенство:

а) $7{,}3 \leqslant x$; б) $y \geqslant 0{,}83$; в) $a \geqslant -10{,}4$; г) $k \leqslant 0{,}5$; д) $4{,}4 \leqslant n \leqslant 6{,}1$; е) $7{,}6 \leqslant m \leqslant 20{,}8$; ж) $-5 \leqslant a < -2$; з) $x \leqslant b \leqslant y$.

80. Верно ли неравенство:

а) $x \leqslant 5{,}3$ при $x = 2{,}7$; $5{,}3$; 6;
б) $y \geqslant 4{,}8$ при $y = 3{,}5$; $4{,}8$; $7{,}1$;
в) $0{,}6 < x \leqslant 0{,}8$ при $x = 0{,}5$; $0{,}6$; $0{,}7$; $0{,}8$; $0{,}9$;
г) $2{,}1 \leqslant y \leqslant 2{,}4$ при $y = 2{,}1$; $2{,}2$; $2{,}3$; $2{,}4$; $2{,}5$?

81. Запишите с помощью знаков неравенства:

а) x меньше или равно 8;
б) y больше или равно 0;
в) a больше 5 и меньше или равно 7;
г) b больше или равно -2 и меньше 1.

82. Запишите в виде неравенства:

а) x — отрицательное число;
б) m — положительное число;
в) y — неотрицательное число;
г) z — неположительное число.

83. Запишите в виде двойного неравенства:

а) x больше или равно 11 и меньше 12;
б) y больше 50 и меньше или равно 100;
в) a больше 350 и меньше 400;
г) b больше или равно -100 и меньше или равно -10.

84. Один автомобиль проехал 700 км за x ч, а другой автомобиль проехал 630 км за y ч. Сравните средние скорости автомобилей, если:

а) $x = 12{,}5$, $y = 10{,}5$; б) $x = y = 14$.

П

85. Сколько процентов составляет:

а) число 8 от числа 200; б) число 2,1 от числа 14?

86. В результате рационализации производства удалось сократить число рабочих на комбинате. Вместо 1600 их осталось 1200. На сколько процентов сократилось число рабочих?

87. Найдите значение выражения:

а) $37{,}6 - 5{,}84 + 3{,}95 - 8{,}9$; б) $81 - 45{,}34 + 19{,}6 + 21{,}75$; в) $17{,}1 \cdot 3{,}8 : 4{,}5 \cdot 0{,}5$; г) $81{,}9 : 4{,}5 : 0{,}28 \cdot 1{,}2$.

88. Запишите в виде выражения:

а) сумму числа x и произведения чисел a и b;
б) частное от деления числа a на разность чисел b и c;
в) произведение суммы чисел x и a и разности чисел x и b.

Контрольные вопросы и задания

1 Приведите примеры рациональных чисел.

2 Приведите пример числового выражения и выражения с переменными.

3 Имеет ли смысл выражение: $\frac{36}{2 \cdot 16 - 32}$; $\frac{42 - 6 \cdot 7}{37 - 11}$?

4 Сравните значения выражений $x + 3$ и $3x$ при $x = -4; 1{,}5; 5$.

5 Приведите пример двойного неравенства и прочитайте его.

6 Как читаются знаки $\geqslant$ и $\leqslant$? Какое неравенство называется строгим и какое нестрогим? Приведите пример строгого неравенства, нестрогого неравенства.

§ 2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

5. Свойства действий над числами

Напомним основные свойства сложения и умножения чисел.

1) *Переместительное свойство:* для любых чисел a и b верны равенства
$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$
2) *Сочетательное свойство:* для любых чисел a, b и c верны равенства
$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$
3) *Распределительное свойство:* для любых чисел a, b и c верно равенство
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Из переместительного и сочетательного свойств сложения следует:

в любой сумме можно как угодно переставлять слагаемые и произвольным образом объединять их в группы.

Пример 1. Вычислим сумму $1{,}23 + 13{,}5 + 4{,}27$.

▶ Для этого удобно объединить первое слагаемое с третьим. Получим
$$1{,}23 + 13{,}5 + 4{,}27 = (1{,}23 + 4{,}27) + 13{,}5 = 5{,}5 + 13{,}5 = 19. \triangleleft$$

Из переместительного и сочетательного свойств умножения следует:

> в любом произведении можно как угодно переставлять множители и произвольным образом объединять их в группы.

П р и м е р 2. Найдём значение произведения $1{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 64 \cdot 0{,}5$.

▶ Объединив первый множитель с четвёртым, а второй — с третьим, получим

$$1{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 64 \cdot 0{,}5 = (1{,}8 \cdot 0{,}5) \cdot (0{,}25 \cdot 64) = \\ = 0{,}9 \cdot 16 = 14{,}4. \lhd$$

Распределительное свойство справедливо и в том случае, когда число умножается на сумму трёх и более слагаемых.

Например, для любых чисел a, b, c и d верно равенство

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

Мы знаем, что вычитание можно заменить сложением, прибавив к уменьшаемому число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

Это позволяет числовое выражение вида $a - b$ считать суммой чисел a и $-b$, числовое выражение вида $a + b - c - d$ считать суммой чисел a, b, $-c$, $-d$ и т. п. Рассмотренные свойства действий справедливы и для таких сумм.

П р и м е р 3. Найдём значение выражения $3{,}27 - 6{,}5 - 2{,}5 + 1{,}73$.

▶ Это выражение является суммой чисел $3{,}27$, $-6{,}5$, $-2{,}5$ и $1{,}73$. Применив свойства сложения, получим

$$3{,}27 - 6{,}5 - 2{,}5 + 1{,}73 = (3{,}27 + 1{,}73) + (-6{,}5 - 2{,}5) = \\ = 5 + (-9) = -4. \lhd$$

П р и м е р 4. Вычислим произведение $36 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{18}\right)$.

▶ Множитель $\frac{1}{4} - \frac{5}{18}$ можно рассматривать как сумму чисел $\frac{1}{4}$ и $-\frac{5}{18}$. Используя распределительное свойство умножения, получим

$$36 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{18}\right) = 36 \cdot \frac{1}{4} - 36 \cdot \frac{5}{18} = 9 - 10 = -1. \lhd$$

Упражнения

89. Какие свойства действий позволяют, не выполняя вычислений, утверждать, что верно равенство:

а) $247 + 35 = 35 + 247$;
б) $84 \cdot 19 = 19 \cdot 84$;
в) $14 + (16 + 97) = (14 + 16) + 97$;
г) $25 \cdot (4 + 7) = 25 \cdot 4 + 25 \cdot 7$?

90. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $3{,}17 + 10{,}2 + 0{,}83 + 9{,}8$; в) $15{,}21 - 3{,}9 - 4{,}7 + 6{,}79$;
б) $4{,}11 + 15{,}5 + 0{,}89 + 4{,}4$; г) $-4{,}27 + 3{,}8 - 5{,}73 - 3{,}3$.

91. Найдите значение выражения:

а) $8{,}91 + 25{,}7 + 1{,}09$; в) $7{,}15 - 9{,}42 + 12{,}85 - 0{,}58$;
б) $6{,}64 + 7{,}12 + 2{,}88$; г) $18{,}9 - 6{,}8 - 5{,}2 - 4{,}1$.

92. Выполните действие и объясните, какие свойства сложения были при этом использованы:

а) $5\frac{1}{8} + 13\frac{3}{4}$; б) $19\frac{5}{6} + 10\frac{1}{3}$.

93. Найдите значение выражения:

а) $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{7} + 1\frac{1}{4} - 4\frac{6}{7}$; б) $8\frac{2}{3} - 6\frac{3}{5} - 2\frac{2}{5} + 1\frac{7}{9}$.

94. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $50 \cdot 1{,}34 \cdot 0{,}2$; в) $25 \cdot (-15{,}8) \cdot 4$;
б) $-75{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 20$; г) $0{,}47 \cdot 0{,}4 \cdot 25$.

95. Используя распределительное свойство умножения, выполните действие:

а) $3\frac{1}{8} \cdot 5$; б) $7 \cdot 2\frac{3}{7}$; в) $2\frac{2}{5} \cdot 10$; г) $6 \cdot 4\frac{5}{12}$.

96. Найдите значение выражения:

а) $3{,}5 \cdot 6{,}8 + 3{,}5 \cdot 3{,}2$; б) $12{,}4 \cdot 14{,}3 - 12{,}4 \cdot 4{,}3$.

97. Вычислите:

а) $15{,}7 \cdot 3{,}09 + 15{,}7 \cdot 2{,}91$; б) $4{,}03 \cdot 27{,}9 - 17{,}9 \cdot 4{,}03$.

98. Докажите, что:

а) сумма $24 \cdot 17 + 17 \cdot 6$ делится на 5;
б) сумма $34 \cdot 85 + 34 \cdot 36$ делится на 11.

П

99. Для детского сада купили 5 наборов карандашей и 10 альбомов для рисования. Набор карандашей стоит a рублей, а альбом стоит b рублей. Какова стоимость покупки?

100. Автомобиль двигался t ч со скоростью 60 км/ч и p ч со скоростью 50 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

101. Найдите координаты точек, отмеченных на координатной прямой (рис. 5).

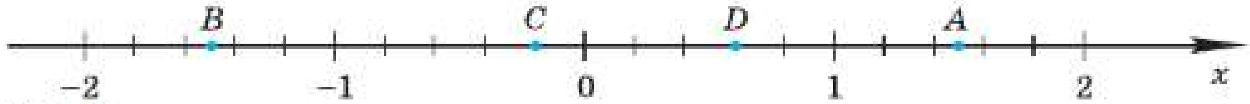


Рис. 5

П

102. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам 1,4; –1,7; 0,8; –1,2.

103. *(Для работы в парах.)* Расположите в порядке убывания числа:

а) $6\frac{1}{5}$; 6,3; $6\frac{1}{7}$;

б) 2,01; 2,001; $2\frac{1}{11}$;

в) –1,07; –1,7; 0;

г) –3,04; –3,02; –3,19.

Ответ запишите в виде двойного неравенства.

1) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.

2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.

3) Исправьте ошибки, если они допущены.

6. Тождества. Тождественные преобразования выражений

Найдём значения выражений $3(x + y)$ и $3x + 3y$ при $x = 5$, $y = 4$:

$$3(x + y) = 3(5 + 4) = 3 \cdot 9 = 27,$$
$$3x + 3y = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 15 + 12 = 27.$$

Мы получили один и тот же результат. Вообще, из распределительного свойства следует, что при любых значениях переменных значения выражений $3(x + y)$ и $3x + 3y$ равны.

Рассмотрим теперь выражения $2x + y$ и $2xy$. При $x = 1$, $y = 2$ они принимают равные значения:

$$2x + y = 2 \cdot 1 + 2 = 4,$$
$$2xy = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4.$$

Однако можно указать такие значения x и y, при которых значения этих выражений не равны. Например, если $x = 3$, $y = 4$, то

$$2x + y = 2 \cdot 3 + 4 = 10,$$
$$2xy = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

МУХАММЕД БЕН МУСА АЛЬ-ХОРЕЗМИ (787 — ок. 850) — среднеазиатский математик и астроном. Написал основополагающие трактаты по арифметике и алгебре, которые оказали большое влияние на развитие математики. Он впервые отделил алгебру от арифметики и стал рассматривать её как самостоятельный предмет.

Определение. Два выражения, значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными.

Выражения $3(x+y)$ и $3x+3y$ являются тождественно равными, а выражения $2x+y$ и $2xy$ не являются тождественно равными.

Равенство

$$3(x+y)=3x+3y$$

верно при любых значениях x и y. Такие равенства называются *тождествами*.

Определение. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством[1].

Тождествами считают и верные числовые равенства.

С примерами тождеств вы уже встречались. Так, тождествами являются равенства, выражающие основные свойства действий над числами:

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=a+(b+c),$$
$$ab=ba, \quad (ab)c=a(bc),$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Можно привести и другие примеры тождеств:

$$a+0=a, \quad a+(-a)=0, \quad a-b=a+(-b),$$
$$a\cdot 1=a, \quad a\cdot(-b)=-ab, \quad (-a)(-b)=ab.$$

Чтобы найти значение выражения $xy-xz$ при заданных значениях x, y и z, надо выполнить три действия. Например, при $x=2{,}3$, $y=0{,}8$, $z=0{,}2$ получаем

$$xy-xz=2{,}3\cdot 0{,}8-2{,}3\cdot 0{,}2=1{,}84-0{,}46=1{,}38.$$

Этот результат можно получить, выполнив лишь два действия, если воспользоваться выражением $x(y-z)$, тождественно равным выражению $xy-xz$:

$$x(y-z)=2{,}3(0{,}8-0{,}2)=2{,}3\cdot 0{,}6=1{,}38.$$

Мы упростили вычисления, заменив выражение $xy-xz$ тождественно равным выражением $x(y-z)$.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему выражением, называют *тождественным преобразованием* или просто *преобразованием* выражения.

[1] В дальнейшем понятия «тождественно равные выражения» и «тождество» будут уточнены.

Тождественные преобразования выражений с переменными выполняются на основе свойств действий над числами.

Одним из широко применяемых видов тождественных преобразований является *приведение подобных слагаемых.*

Подобными слагаемыми называют слагаемые алгебраической суммы, имеющие одинаковую буквенную часть.

Например, в сумме $3a - 2a + b - 2c + 4a$ слагаемые $3a$, $-2a$, $4a$ являются подобными.

Приведением подобных слагаемых называют замену алгебраической суммы подобных слагаемых одним выражением. При этом пользуются правилом:

чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

Пример 1. Приведём подобные слагаемые в сумме

$$5x + 2x - 3x.$$

▶ Воспользуемся правилом приведения подобных слагаемых:

$$5x + 2x - 3x = (5 + 2 - 3)x = 4x. \triangleleft$$

Это преобразование основано на распределительном свойстве умножения.

Часто встречается также такой вид преобразования выражений, как раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или знак «минус». Это преобразование выполняется по следующим правилам:

- если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки;
- если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки, на противоположный.

Пример 2. Раскроем скобки в выражении

$$2a + (b - 3c).$$

▶ Применим правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «плюс»:

$$2a + (b - 3c) = 2a + b - 3c. \triangleleft$$

Проведённое преобразование основано на сочетательном свойстве сложения.

П р и м е р 3. Раскроем скобки в выражении $a-(4b-c)$.

▶ Воспользуемся правилом раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «минус»:

$$a-(4b-c)=a-4b+c. \triangleleft$$

Выполненное преобразование основано на распределительном свойстве умножения и сочетательном свойстве сложения. Покажем это. Представим в данном выражении второе слагаемое $-(4b-c)$ в виде произведения $(-1)(4b-c)$:

$$a-(4b-c)=a+(-1)(4b-c).$$

Применив указанные свойства действий, получим

$$a-(4b-c)=a+(-1)(4b-c)=a+(-4b+c)=a-4b+c.$$

Упражнения

104. Какие свойства действий позволяют утверждать, что тождественно равны выражения:

а) $ab+16c$ и $16c+ab$;
б) $(a+2)+x$ и $a+(2+x)$;
в) $xy+3$ и $3+xy$;
г) $5(b+c)$ и $5b+5c$?

105. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $(2a)(7b)$ и $14ab$;
б) $-2a+2a$ и 0;
в) $x-y$ и $y-x$;
г) $(x-y)^2$ и $(y-x)^2$?

106. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $2+8ba$ и $8ab+2$;
б) $2x+7$ и $2(x+7)$;
в) $(a+b)\cdot 0$ и $a+b$;
г) $(a+b)\cdot 2$ и $2a+2b$?

107. Какие свойства действий позволяют утверждать, что данное равенство является тождеством:

а) $12(a-4)=12a-48$; б) $(x-x)a=0$?

108. Верно ли утверждение:

а) равенство $6(x-y)=6x-6y$ является тождеством;
б) равенство $3a-4=a+(2a-4)$ является тождеством;
в) равенство $25(a-a)=25$ является тождеством?

109. Упростите выражение, используя переместительное и сочетательное свойства умножения:

а) $-6{,}2a\cdot 5$; б) $4c\cdot(-1{,}25)$; в) $0{,}3x\cdot(-12y)$; г) $-0{,}1b\cdot(-2{,}3c)$.

110. Упростите выражение:

а) $1{,}6\cdot(-0{,}2n)$; б) $-6{,}4a\cdot(-5c)$.

111. Преобразуйте выражение в тождественно равное, используя распределительное свойство умножения:

а) $7(x-y)$;
б) $(a-4b)\cdot 3$;
в) $-23\cdot(2a-3b+1)$;
г) $1{,}5\cdot(-3x+4y-5z)$.

112. Замените выражение тождественно равным, используя распределительное свойство умножения:

а) $1{,}2 \cdot (5 - a)$;
б) $(m - 4x) \cdot (-6)$;
в) $2{,}5 \cdot (4x - 6y - 2)$;
г) $-0{,}1 \cdot (100a + 10b - c)$.

113. Среди выражений $2(b - a)$, $-2(a - b)$, $-2a - 2b$, $-2a + 2b$ найдите те, которые тождественно равны выражению $2b - 2a$.

114. Приведите подобные слагаемые:

а) $5a + 27a - a$;
б) $12b - 17b - b$;
в) $6x - 14 - 13x + 26$;
г) $-8 - y + 17 - 10y$.

115. Приведите подобные слагаемые:

а) $13a + 2b - 2a - b$;
б) $41x - 58x + 6y - y$;
в) $-5{,}1a - 4b - 4{,}9a + b$;
г) $7{,}5x + y - 8{,}5x - 3{,}5y$.

116. Приведите подобные слагаемые:

а) $8x - 6y + 7x - 2y$;
б) $27p + 14q - 16p - 3q$;
в) $3{,}5b - 2{,}4c - 0{,}6c - 0{,}7b$;
г) $1{,}6a + 4x - 2{,}8a - 7{,}5x$.

117. Раскройте скобки:

а) $x + (b + c + d - m)$;
б) $a - (b - c - d)$;
в) $x + y - (b + c - m)$;
г) $x + (a - b) - (c + d)$.

118. Запишите без скобок выражение:

а) $m + (a - k - b)$;
б) $m - (a - k - b)$;
в) $x + a + (m - 2)$;
г) $a - (b - c) + (m + n)$.

119. Упростите выражение:

а) $5 - (a - 3)$;
б) $7 + (12 - 2b)$;
в) $64 - (14 + 7x)$;
г) $38 + (12p - 8)$.

120. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $x + (2x + 0{,}5)$;
б) $3x - (x - 2)$;
в) $4a - (a + 6)$;
г) $6b + (10 - 4{,}5b)$.

121. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(5x - 1) - (2 - 8x)$ при $x = 0{,}75$;
б) $(6 - 2x) + (15 - 3x)$ при $x = -0{,}2$;
в) $12 + 7x - (1 - 3x)$ при $x = -1{,}7$;
г) $37 - (x - 16) + (11x - 53)$ при $x = -0{,}03$.

122. Упростите выражение:

а) $(x - 1) + (12 - 7{,}5x)$;
б) $(2p + 1{,}9) - (7 - p)$;
в) $(3 - 0{,}4a) - (10 - 0{,}8a)$;
г) $b - (4 - 2b) + (3b - 1)$;
д) $y - (y + 4) + (y - 4)$;
е) $4x - (1 - 2x) + (2x - 7)$.

123. Докажите, что при любом a значение выражения $3(a + 2) - 3a$ равно 6.

124. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $3(6-5x)+17x-10$;
б) $8(3y+4)-29y+14$;
в) $7(2z-3)+6z-12$;
г) $2(7,3-1,6a)+3,2a-9,6$;
д) $-5(0,3b+1,7)+12,5-8,5b$;
е) $-4(3,3-8c)+4,8c+5,2$.

125. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $0,6(p-3)+p+2$ при $p=0,5$;
б) $4(0,5q-6)-14q+21$ при $q=\frac{1}{3}$.

126. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

а) У Игоря 3 альбома с марками. В первом альбоме a марок, во втором — на 15 марок больше, чем в первом, а в третьем — втрое больше, чем во втором. Сколько марок в трёх альбомах?

б) Пётр приобрёл 8 билетов лотереи «Надежда» и 6 билетов лотереи «Удача». Билет лотереи «Удача» стоил a р., а лотереи «Надежда» был на 10% дороже. Найдите стоимость покупки.

П

127. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

а) $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{6}-\frac{1}{5}$;   б) $3,7\cdot\frac{1}{3}$ и $3,7:\frac{1}{3}$;
в) $5,6:2,5$ и $5,6\cdot 2,5$.

Ответ запишите в виде неравенства.

128. Техническое перевооружение цеха позволило выпускать в сутки 180 станков вместо 160. На сколько процентов повысился выпуск станков в сутки?

129. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам:

$$-3,9;\ 2,6;\ -0,7;\ 3,2;\ -1,5;\ 1,25.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, распределительное свойство умножения.
2. Какие выражения называются тождественно равными? Приведите пример тождественно равных выражений.
3. Какое равенство называется тождеством? Приведите пример тождества.
4. Какие слагаемые называют подобными? Что означает выражение «привести подобные слагаемые»? Приведите подобные слагаемые в сумме $-5x+4y-y-3x$.

§ 3 УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7. Уравнение и его корни

Рассмотрим задачу: «На нижней полке в 4 раза больше книг, чем на верхней. Если с нижней полки переставить на верхнюю 15 книг, то книг на полках станет поровну. Сколько книг на верхней полке?»

Обозначим буквой x число книг на верхней полке. Тогда число книг на нижней полке равно $4x$. Если с нижней полки переставить на верхнюю 15 книг, то на нижней полке останется $4x - 15$ книг, а на верхней будет $x + 15$ книг. По условию задачи после такой перестановки книг на полках окажется поровну. Значит,

$$4x - 15 = x + 15.$$

Чтобы найти неизвестное число книг, мы составили равенство, содержащее переменную. Такие равенства называют *уравнениями с одной переменной* или *уравнениями с одним неизвестным*.

Нам надо найти число, при подстановке которого вместо x в уравнение $4x - 15 = x + 15$ получается верное числовое равенство. Такое число называют *решением уравнения* или *корнем уравнения*.

> **Определение.** Корнем уравнения с одной переменной называется такое значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Из уравнения

$$4x - 15 = x + 15$$

находим, что

$$4x - x = 15 + 15,$$
$$3x = 30,$$
$$x = 10.$$

Уравнение $4x - 15 = x + 15$ имеет один корень — число 10.

Можно привести примеры уравнений, которые имеют два, три и более корней или не имеют корней.

Так, уравнение $(x - 4)(x - 5)(x - 6) = 0$ имеет три корня: 4, 5 и 6. Действительно, каждое из этих чисел обращает в нуль один из множителей произведения $(x - 4)(x - 5)(x - 6)$, а значит, и само произведение. При любом другом значении x ни один из множителей в нуль не обращается, а значит, не обращается в нуль и произведение. Уравнение $x + 2 = x$ не имеет корней, так как при любом значении x левая часть уравнения на 2 больше его правой части.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня — числа 2 и -2. Уравнение $(x-2)(x+2) = 0$ также имеет корни 2 и -2. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными уравнениями*. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

При решении уравнений используются следующие свойства:

- если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;
- если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, равносильны уравнения $5x = 2x + 7$ и $5x - 2x = 7$, равносильны также уравнения $6x = 2x + 8$ и $3x = x + 4$.

Указанные свойства уравнений можно доказать, опираясь на следующие свойства числовых равенств: если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится верное равенство.

Упражнения

130. Является ли число 3 корнем уравнения:
а) $5(2x-1) = 8x + 1$; б) $(x-4)(x+4) = 7$?

131. Какие из чисел -2, -1, 0, 2, 3 являются корнями уравнения:
а) $x^2 = 10 - 3x$; б) $x(x^2 - 7) = 6$?

132. Является ли корнем уравнения $x(x-5) = 6$ число: 1; -1; 6; -6?

133. Докажите, что каждое из чисел 7, -3 и 0 является корнем уравнения $x(x+3)(x-7) = 0$.

134. Докажите, что каждое из чисел 1,2 и $-1,2$ является корнем уравнения $x^2 = 1{,}44$.

135. Докажите, что:
а) корнем уравнения $1{,}4(y+5) = 7 + 1{,}4y$ является любое число;
б) уравнение $y - 3 = y$ не имеет корней.

136. Имеет ли корни уравнение: а) $2x + 3 = 2x + 8$; б) $2y = y$?

137. Какое из уравнений не имеет корней: $3x + 11 = 3(x + 4) + 1$ или $33x = 18x$?

138. Составьте какое-нибудь уравнение, корнем которого является число: а) 8; б) −12.

139. Имеет ли уравнение корни и, если имеет, то сколько:
а) $|x| = 1$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -5$; г) $|x| = 1{,}3$?

140. Замените:
а) уравнение $0{,}3x = -4$ равносильным уравнением с целыми коэффициентами;
б) уравнение $5x - 4 = 21$ равносильным уравнением вида $ax = b$, где a и b — некоторые числа.

П

141. Упростите выражение:
а) $0{,}4(7x - 2) - 1{,}6 + 1{,}7x$;
б) $(1{,}2a - 4) + (40 - 4{,}8a)$;
в) $2{,}5(4 - 3y) - y + 2{,}3$;
г) $(14 - 3{,}6b) - (12 + 10{,}4b)$.

142. Найдите значение выражения
$$8(3 - 3{,}5m) - 20 + 23m$$
при $m = 2{,}5$; $1{,}2$; 40.

143. На координатной плоскости (рис. 6) отмечены точки A, B, C, D, E и F. Найдите их координаты.

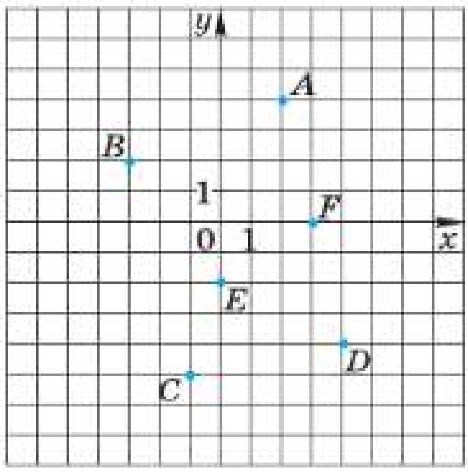


Рис. 6

144. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-4; -2)$, $B(0; -3)$, $C(3; -3)$, $D(-2; 0)$, $E(-1; 5)$, $F(0; 1)$.

8. Линейное уравнение с одной переменной

Каждое из уравнений $5x = -4$, $-0{,}2x = 0$, $-x = -6{,}5$ имеет вид $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа. В первом уравнении $a = 5$, $b = -4$, во втором $a = -0{,}2$, $b = 0$, в третьем $a = -1$, $b = -6{,}5$.

Такие уравнения называют *линейными уравнениями с одной переменной*.

Определение. Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной.

Выясним, сколько корней может иметь линейное уравнение с одной переменной.

Рассмотрим уравнение $ax = b$, в котором коэффициент a не равен нулю. Разделив обе части уравнения на a, получим $x = \frac{b}{a}$. Значит, линейное уравнение $ax = b$, в котором $a \neq 0$, имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

Рассмотрим уравнение $ax = b$, в котором коэффициент a равен нулю. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней, так как равенство $0x = b$ не является верным ни при каком x. Если $a = 0$ и $b = 0$, то любое значение x является корнем уравнения, так как равенство $0x = 0$ верно при любом x.

Линейное уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет один корень, при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней, при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней (любое число является его корнем).

Решение многих уравнений сводится к решению линейных уравнений.

Пример. Решим уравнение $4(x + 7) = 3 - x$.

▶ Раскроем скобки:

$$4x + 28 = 3 - x.$$

Перенесём слагаемое $-x$ в левую часть уравнения, а слагаемое 28 в правую часть, изменив при этом их знаки:

$$4x + x = 3 - 28.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$5x = -25.$$

Разделим обе части уравнения на 5:

$$x = -5.$$

Применяя свойства уравнений и выполняя тождественные преобразования, мы последовательно заменяли одно уравнение другим, равносильным ему. Значит, корнем уравнения $4(x + 7) = 3 - x$ является число -5. ◁

В этом примере исходное уравнение свелось к равносильному линейному уравнению, в котором коэффициент при переменной отличен от нуля. Если при решении уравнения мы придём к равносильному ему линейному уравнению вида $0x = b$, то в этом случае либо исходное уравнение не имеет корней, либо его корнем является любое число.

Решим, например, уравнение $2x + 5 = 2(x + 6)$:

$$2x + 5 = 2x + 12, \quad 2x - 2x = 12 - 5, \quad 0x = 7.$$

Пришли к уравнению $0x = 7$, не имеющему корней. Значит, и уравнение $2x + 5 = 2(x + 6)$ не имеет корней.

Уравнение $3(x + 2) + x = 6 + 4x$ сводится к уравнению $0x = 0$, корнем которого является любое число. Следовательно, корнем уравнения $3(x + 2) + x = 6 + 4x$ является любое число.

Упражнения

145. Найдите корень уравнения:

а) $5x = -60$; г) $6x = -50$; ж) $0,7x = 0$;
б) $-10x = 8$; д) $-9x = -3$; з) $-1,5x = 6$;
в) $7x = 9$; е) $0,5x = 1,2$; и) $42x = 13$.

146. Решите линейное уравнение:

а) $\frac{1}{3}x = 12$; в) $-4x = \frac{1}{7}$; д) $\frac{1}{6}y = \frac{1}{3}$; ж) $\frac{11}{7}x = 4\frac{5}{7}$;
б) $\frac{2}{3}y = 9$; г) $5y = -\frac{5}{8}$; е) $\frac{2}{7}x = 0$; з) $-\frac{17}{13}y = -2\frac{8}{13}$.

147. Найдите корень уравнения:

а) $5x - 150 = 0$; г) $12x - 1 = 35$; ж) $7 = 6 - 0,2x$;
б) $48 - 3x = 0$; д) $-x + 4 = 47$; з) $0,15x + 6 = 51$;
в) $-1,5x - 9 = 0$; е) $1,3x = 54 + x$; и) $-0,7x + 2 = 65$.

148. Решите уравнение:

а) $2x + 9 = 13 - x$; д) $1,7 - 0,3m = 2 + 1,7m$; и) $z - \frac{1}{2}z = 0$;
б) $14 - y = 19 - 11y$; е) $0,8x + 14 = 2 - 1,6x$; к) $x - 4x = 0$;
в) $0,5a + 11 = 4 - 3a$; ж) $15 - p = \frac{1}{3}p - 1$; л) $x = -x$;
г) $1,2n + 1 = 1 - n$; з) $1\frac{1}{3}x + 4 = \frac{1}{3}x + 1$; м) $5y = 6y$.

149. Решите уравнение:

а) $3x - 8 = x + 6$; д) $p - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}p$;
б) $7a - 10 = 2 - 4a$; е) $0,8 - y = 3,2 + y$;
в) $\frac{1}{6}y - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}y$; ж) $\frac{2}{7}x = \frac{1}{2}$;
г) $2,6 - 0,2b = 4,1 - 0,5b$; з) $2x - 0,7x = 0$.

150. Найдите корень уравнения:

а) $(y + 4) - (y - 1) = 6y$; в) $6x - (7x - 12) = 101$;
б) $3p - 1 - (p + 3) = 1$; г) $20x = 19 - (3 + 12x)$.

151. Найдите корень уравнения:

а) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x$;
б) $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$;

в) $1{,}6x - (x - 2{,}8) = (0{,}2x + 1{,}5) - 0{,}7$;
г) $(0{,}5x + 1{,}2) - (3{,}6 - 4{,}5x) = (4{,}8 - 0{,}3x) + (10{,}5x + 0{,}6)$.

152. Решите уравнение:

а) $5x + (3x - 3) = 6x + 11$;
б) $3a - (10 + 5a) = 54$;
в) $(x - 7) - (2x + 9) = -13$;
г) $0{,}6 + (0{,}5y - 1) = y + 0{,}5$.

153. При каком значении переменной значение выражения $8b - 27$ равно: а) 5; б) -11; в) 1,8; г) -1?

154. При каком значении переменной:

а) значения выражений $2m - 13$ и $m + 3$ равны;
б) значение выражения $3 - 5c$ на 1 меньше значения выражения $1 - c$;
в) значение выражения $2x + 1$ на 20 больше значения выражения $8x + 5$;
г) значение x в 3 раза меньше значения выражения $45 - 10x$;
д) значение выражения $9 - y$ в 2 раза больше значения y?

155. При каком значении y:

а) значения выражений $5y + 3$ и $36 - y$ равны;
б) значение выражения $7y - 2$ больше значения выражения $2y$ на 10;
в) значение выражения $1{,}7y + 37$ меньше значения выражения $9{,}3y - 25$ на 14?

156. Решите уравнение:

а) $2x + 5 = 2(x + 1) + 11$;
б) $5(2y - 4) = 2(5y - 10)$;
в) $3y - (y - 19) = 2y$;
г) $6x = 1 - (4 - 6x)$.

157. Решите уравнение:

а) $15(x + 2) - 30 = 12x$;
б) $6(1 + 5x) = 5(1 + 6x)$;
в) $3y + (y - 2) = 2(2y - 1)$;
г) $6y - (y - 1) = 4 + 5y$.

158. Решите уравнение:

а) $|x - 6| = 0$;
б) $|x - 1| = 5$;
в) $16 - 3|x| = 4$;
г) $26 + 6|x| = 144$.

159. Найдите корни уравнения:

а) $|x - 2| - 6 = 17$; б) $31 + 4 \cdot |4 - x| = 47$.

П

160. Выполните действия:

а) $\left(3\frac{7}{30} - 1\frac{5}{12}\right) : 18\frac{1}{6}$;
б) $\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}\right) : 1\frac{2}{3}$;
в) $\left(\frac{11}{18} - 1\frac{7}{12}\right) \cdot \left(2\frac{1}{6} + \frac{7}{30}\right)$;
г) $\left(3\frac{2}{5} - 5\right) \cdot \left(\frac{31}{48} + \frac{7}{24}\right)$.

161. а) Отметьте на координатной плоскости точки $A(-3; 4)$, $B(6; 5)$, $C(5; 0)$, $D(-3; 0)$.
б) Какой координатной четверти принадлежит точка: $A\ (-1;\ 100)$; $B\ (-1;\ -100)$; $C\ (100;\ -1)$; $D\ (100;\ 1)$?

162. Упростите выражение и найдите его значение:
а) $6{,}8c - (3{,}6c + 2{,}1)$ при $c = 2{,}5$;
б) $4{,}4 - (9{,}6 - 1{,}2m)$ при $m = -3{,}5$;
в) $5{,}4a - (8{,}3 - 12{,}5a)$ при $a = 3{,}8$;
г) $(10{,}7b - 12) - (13{,}2 - 0{,}6b)$ при $b = 1{,}1$.

9. Решение задач с помощью уравнений

При решении задач с помощью уравнений поступают следующим образом:

- обозначают некоторое неизвестное число буквой и, используя условие задачи, составляют уравнение;
- решают это уравнение;
- истолковывают полученный результат в соответствии с условием задачи.

Задача 1. В корзине было в 2 раза меньше яблок, чем в ящике. После того как из корзины переложили в ящик 10 яблок, в ящике их стало в 5 раз больше, чем в корзине. Сколько яблок было в корзине и сколько в ящике?

▶ Пусть в корзине было x яблок, тогда в ящике было $2x$ яблок. После того как из корзины переложили в ящик 10 яблок, в корзине стало $x - 10$ яблок, а в ящике стало $2x + 10$ яблок. Заполним таблицу, указав в ней количество яблок в корзине и в ящике до и после перекладывания.

Тара	Было	Стало
Корзина	x	$x - 10$
Ящик	$2\ x$	$2x + 10$

По условию задачи в ящике стало в 5 раз больше яблок, чем в корзине. Значит,

$$5(x - 10) = 2x + 10.$$

Решим составленное уравнение:

$$5x - 50 = 2x + 10,$$
$$5x - 2x = 10 + 50,$$
$$3x = 60,$$
$$x = 20.$$

Следовательно, в корзине было 20 яблок.

Так как $2x = 2 \cdot 20 = 40$, то в ящике было 40 яблок.

Ответ: 20 яблок и 40 яблок. ◁

Задача 2. Предназначенные для посадки 78 саженцев смородины решили распределить между тремя бригадами так, чтобы первой бригаде досталось саженцев в 2 раза меньше, чем второй, а третьей — на 12 саженцев больше, чем первой. Сколько саженцев надо выделить первой бригаде?

▶ Пусть первой бригаде решили выделить x саженцев. Тогда второй следует выделить $2x$ саженцев, а третьей $x + 12$ саженцев. Общее число саженцев $x + 2x + (x + 12)$, что по условию задачи равно 78.
Значит,

$$x + 2x + (x + 12) = 78.$$

Решим полученное уравнение:

$$x + 2x + x + 12 = 78,$$
$$4x = 78 - 12, \quad 4x = 66, \quad x = 16{,}5.$$

По смыслу задачи значение x должно быть натуральным числом, а корень уравнения — дробное число. Значит, распределить саженцы указанным способом нельзя.

Ответ: такое распределение саженцев невозможно. ◁

Упражнения

163. В одной кассе кинотеатра продали на 36 билетов больше, чем в другой. Сколько билетов продали в каждой кассе, если всего было продано 392 билета?

164. На Парковой и Молодёжной улицах восстановили разрушенные в половодье 19 домов. На Парковой было восстановлено на 3 дома меньше, чем на Молодёжной. Сколько домов было восстановлено на каждой из этих улиц?

165. Периметр треугольника равен 16 см. Две его стороны равны между собой, и каждая из них на 2,9 см больше третьей. Каковы стороны треугольника?

166. Протяжённость автомобильной трассы составляет 6940 м. Бо́льшую часть трассы занимают два тоннеля, длина одного из которых на 17 м больше длины другого. Найдите длину каждого тоннеля, если наземная часть трассы составляет 703 м.

167. *Старинная задача.* Из четырёх жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвёртый — вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132 рупии. Сколько дал каждый?

168. Двое рабочих изготовили 86 деталей, причём первый изготовил на 15% деталей больше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?

169. Прибыль, полученная фирмой за первые два квартала текущего года, составила 126 000 р., причём прибыль, полученная во втором квартале, была на 10% выше, чем в первом. Какую прибыль получила фирма в первом квартале?

170. Три школы получили 70 компьютеров. Вторая школа получила на 6 компьютеров больше первой, а третья — на 10 компьютеров больше второй. Сколько компьютеров получила каждая школа?

171. На свитер, шапку и шарф израсходовали 555 г шерсти, причём на шапку ушло в 5 раз меньше шерсти, чем на свитер, и на 5 г больше, чем на шарф. Сколько шерсти израсходовали на каждое изделие?

172. Можно ли расположить 158 книг на трёх полках так, чтобы на первой полке было на 8 книг меньше, чем на второй, и на 5 книг больше, чем на третьей?

173. Можно ли 59 банок консервов разложить в три ящика так, чтобы в третьем было на 9 банок больше, чем в первом, а во втором — на 4 банки меньше, чем в третьем?

174. На одном садовом участке в 5 раз больше кустов малины, чем на другом. После того как с первого участка пересадили на второй 22 куста, на обоих участках кустов малины стало поровну. Сколько кустов малины было на каждом участке?

175. За 9 ч по течению реки теплоход проходит тот же путь, что за 11 ч против течения. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч.

176. По шоссе идут две машины с одной и той же скоростью. Если первая увеличит скорость на 10 км/ч, а вторая уменьшит скорость на 10 км/ч, то первая за 2 ч пройдёт столько же, сколько вторая за 3 ч. С какой скоростью идут автомашины?

177. *Старинная задача.* Послан человек из Москвы в Вологду, и велено ему проходить во всякий день по 40 вёрст. На следующий день вслед ему был послан другой человек, и велено ему проходить по 45 вёрст в день. Через сколько дней второй догонит первого?

178. Для ремонта школы прибыла бригада, в которой было в 2,5 раза больше маляров, чем плотников. Вскоре прораб включил в бригаду ещё четырёх маляров, а двух плотников перевёл на другой объект. В результате маляров в бригаде оказалось в 4 раза больше, чем плотников. Сколько маляров и сколько плотников было в бригаде первоначально?

179. *(Для работы в парах.)* В классе учится ... учащихся. Отношение числа девочек к числу мальчиков равно $5:4$. Сколько девочек и сколько мальчиков учится в классе?

1) Выясните, какие числа, соответствующие смыслу задачи, можно поставить вместо многоточия.

2) Предложите друг другу закончить решение для одного из найденных чисел.

3) Обсудите полученные ответы.

180. В корзине было в 2 раза меньше винограда, чем в ящике. После того как в корзину добавили 2 кг, в ней стало винограда на 0,5 кг больше, чем в ящике. Сколько винограда было в корзине?

181. Один арбуз на 2 кг легче, чем другой, и в 5 раз легче, чем третий. Первый и третий арбузы вместе в 3 раза тяжелее, чем второй. Найдите массу каждого арбуза.

182. В двух мешках было по 50 кг сахара. После того как из одного мешка взяли в 3 раза больше сахара, чем из другого, в нём осталось в 2 раза меньше сахара, чем в другом. Сколько сахара осталось в каждом мешке?

П

183. Постройте в координатной плоскости точку, у которой:
а) абсцисса равна 3, а ордината противоположна абсциссе;
б) абсцисса равна -2, а ордината на единицу больше;
в) абсцисса равна 1,5, а ордината на единицу меньше;
г) абсцисса равна 6, а ордината — противоположному числу.

184. Постройте на координатной плоскости отрезок MN, зная координаты его концов: $M(-1; 4)$ и $N(2; -2)$. Найдите координаты точек пересечения этого отрезка с осью x и с осью y.

185. Найдите значение выражения $-0{,}5(7b-12a)-(8{,}4a-14b)$ при $a=-10$, $b=-6$.

186. Сравните с нулём значение выражения:

а) $-3{,}52\cdot1{,}7$;
б) $(-2{,}88):(-0{,}9)$;
в) $42\frac{3}{7}-53\frac{2}{3}$;
г) $\dfrac{6{,}4-6\frac{2}{5}}{8}$;
д) $\dfrac{17\frac{1}{3}-17\frac{5}{6}}{7}$;
е) $\dfrac{1-2\frac{1}{3}}{1+2\frac{1}{3}}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение корня уравнения. Является ли число 7 корнем уравнения: $6x = 42$; $0x = 11$; $(16 - 2 \cdot 8)x = 0$?
2. Что значит решить уравнение? Решите уравнение: $6x = -12$; $x - 2x \cdot 6 = 0$; $5x - 4x = 6 + x$.
3. Какие уравнения называются равносильными? Сформулируйте свойства уравнений. Приведите пример уравнения, равносильного уравнению: $5x - 1 = 3$; $0{,}2x = 1{,}1$; $3x - 4x + 6 = 0$.
4. Дайте определение линейного уравнения с одной переменной. Приведите примеры.
5. В каком случае уравнение $ax = b$ имеет единственный корень; имеет бесконечно много корней; не имеет корней? Приведите примеры.

Для тех, кто хочет знать больше

10. Формулы

В художественной литературе вам, вероятно, приходилось встречаться с непривычными единицами измерения. Так, в книге Жюля Верна «Дети капитана Гранта» читаем:

- «Это был ябиру — гигантский журавль английских колоний. Эта птица пяти футов ростом, с чёрным широким клювом конической формы, заостряющимся к концу, в длину он имел восемнадцать дюймов»;
- «Во время пробного плавания яхта «Дункан» показала скорость в семнадцать морских миль в час»;
- «Роберт узнал, что средняя годовая температура в провинции Виктория достигает $+74^\circ$ по Фаренгейту».

Для того чтобы этот текст был понятен, надо знать, как упомянутые здесь единицы измерения, выражающие приближённые значения величин, соотносятся с привычными для вас единицами.

Эти соотношения выражаются следующими формулами:

$b = 30{,}48a$, где a — длина в футах, b — соответствующая длина в сантиметрах;

$l = 2{,}54m$, где m — длина в дюймах, l — длина в сантиметрах;

$p = 1{,}853m$, где m — расстояние в морских милях, p — расстояние в километрах;

$c = \frac{5(f-32)}{9}$, где f — температура в градусах Фаренгейта, c — температура в градусах Цельсия.

Выполнив расчёты, найдём, что в приведённом тексте

$b = 30{,}48 \cdot 5 \approx 152$ (см); $\quad p = 1{,}853 \cdot 17 \approx 32$ (км);

$l = 2{,}54 \cdot 18 \approx 46$ (см); $\quad c = \frac{5(74-32)}{9} \approx 23^\circ$.

Заметим, что при выполнении вычислений удобно пользоваться калькулятором.

Значит, в книге Жюля Верна речь идёт о следующих приближённых значениях величин. Высота журавля равна 1,5 м, а длина его клюва — 0,5 м. Яхта «Дункан» шла со скоростью 32 км/ч, а среднегодовая температура в провинции Виктория была равна 23° Цельсия.

Приведём пример использования формул в задаче на проценты.

Пример 1. Найдём, на сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если его длину и ширину увеличить на 10%.

▶ Пусть длина прямоугольника равна a см, ширина — b см, а площадь — S см^2.

По формуле площади прямоугольника находим, что $S = ab$. После увеличения длины и ширины прямоугольника на 10% длина будет равна $a + 0{,}1a = 1{,}1a$ см, а ширина $b + 0{,}1b = 1{,}1b$ см. Тогда площадь будет равна $1{,}1a \cdot 1{,}1b = 1{,}21ab$ см^2, т. е. увеличится на

$$1{,}21ab - ab = 0{,}21ab \text{ см}^2.$$

Имеем $\frac{0{,}21ab}{ab} \cdot 100\% = 21\%$. Значит, площадь увеличится на 21%. ◁

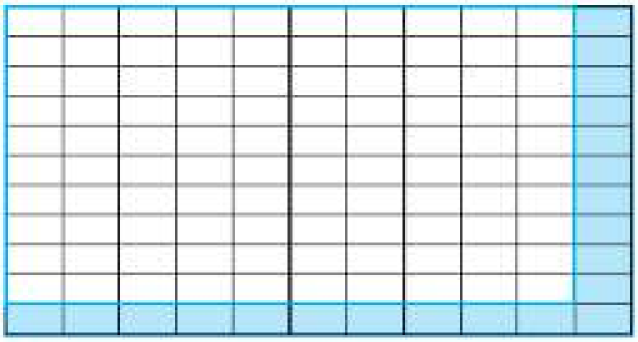


Рис. 7

Этот ответ хорошо поясняет рисунок 7. Из рисунка видно, что к имеющимся 100 малым прямоугольникам, площадь каждого из которых составляет 1% от площади прямоугольника, добавляется ещё 21 малый прямоугольник.

Свойства равенств позволяют из одной формулы, связывающей две или более переменные, получать новые формулы.

Пример 2. Из формулы $c = \frac{5(f-32)}{9}$, где f — температура в градусах Фаренгейта, c — температура в градусах Цельсия, выразим переменную f через c.

▶ Умножив обе части равенства $c = \frac{5(f-32)}{9}$ на 9, получим

$$9c = 5(f - 32).$$

Отсюда

$$9c = 5f - 160, \quad 5f = 9c + 160.$$

Значит, $f = \frac{9c + 160}{5}$, т. е. $f = 1{,}8c + 32$. ◁

Мы получили формулу, позволяющую переходить от температуры в градусах Цельсия к температуре в градусах Фаренгейта.

Упражнения

187. Пользуясь формулой $b = 1{,}067a$, где a — расстояние в вёрстах, b — расстояние в километрах, выразите в километрах расстояние, равное:

а) 6 верстам; б) 12,5 версты; в) 104 верстам.

188. Выразите в килограммах массу, равную 3 пудам, 20,5 пуда, воспользовавшись формулой $p = 16{,}38m$, где m — масса в пудах, p — масса в килограммах.

189. Пользуясь формулой $c = 0{,}454f$, где f — масса в фунтах, c — масса в килограммах, выразите в килограммах массу, равную:

а) 8 фунтам; б) 30,5 фунта.

190. Подсчитать приближённо пройденное человеком расстояние можно, используя формулу $s = nl$, где s — пройденное расстояние в метрах, n — число шагов, l — длина шага. Сколько километров прошёл человек, если длина его шага 60 см, а сделал он 1800 шагов?

191. Как изменится площадь прямоугольника, если:
а) его длину и ширину уменьшить на 10%;
б) его длину увеличить на 30%, а ширину уменьшить на 30%?

192. Как изменится объём куба, если длину его ребра увеличить на 20%?

193. Цену на товар сначала повысили на 15%, а затем снизили на 15%, так как товар перестал пользоваться спросом. Первоначальная цена товара составляла a р., а окончательная — b р. Сравните числа a и b (выберите верный ответ).

1. $a > b$ 2. $a < b$ 3. $a = b$
4. Сравнить нельзя, так как неизвестно значение a

194. На распродаже цену на костюм снизили на 20%. На сколько процентов надо повысить новую цену, чтобы вернуться к первоначальной?

195. Найдите:
а) какой температуре по Фаренгейту соответствует $4^\circ C$; $-15^\circ C$; $0^\circ C$;
б) какой температуре по Цельсию соответствует $20^\circ F$; $-16^\circ F$; $0^\circ F$.

196. Может ли температура быть:
а) положительной по Цельсию и отрицательной по Фаренгейту;
б) положительной по Фаренгейту и отрицательной по Цельсию?

197. Выразите из формулы:

а) $s = at$ переменную t;

б) $v = v_0 + at$ переменную a;

в) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ переменную b.

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

198. Найдите число, обратное:

а) сумме чисел $\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{3}$;
б) разности чисел 6,2 и 5,8;
в) произведению чисел $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{16}$;
г) частному чисел 4,9 и 3,5.

199. Найдите число, противоположное:
а) сумме чисел 2,86 и −4,3;

б) разности чисел $-\frac{4}{9}$ и $\frac{5}{6}$;

в) произведению чисел −5,75 и 1,6;

г) частному чисел 46 и $-7\frac{2}{3}$.

200. Представьте бесконечные периодические дроби в виде обыкновенных дробей.

Образец: Пусть $x = 0,(7) = 0,7777...$. Тогда $10x = 7,777...$, а $10x - x = 7$. Таким образом, $9x = 7$, откуда $x = \frac{7}{9}$. Значит, $0,(7) = \frac{7}{9}$.

а) 0,(3); б) 0,(5); в) 0,(12); г) 0,(48).

201. Найдите сумму всех целых чисел от −102 до 104.

202. Найдите произведение всех целых чисел от −11 до 13.

203. Найдите значение выражения:

а) $\frac{m}{m-1}$ при $m = -\frac{1}{3}$; б) $\frac{2a+1}{a-4}$ при $a = 3{,}5$.

204. Известно, что при некоторых значениях a и b значение выражения $2(a + b)$ равно $-8{,}1$. Найдите при тех же значениях a и b значение выражения:

а) $3(a + b)$; б) $-0{,}5(a + b)$; в) $4a + 4b$; г) $-5a - 5b$.

205. При каких значениях переменных не имеет смысла выражение:

а) $\frac{5}{2x-4}$; б) $\frac{3}{4y+2}$; в) $\frac{a}{a-b}$; г) $\frac{b}{a+b}$?

206. Составьте выражение для решения задачи:

а) Периметр прямоугольника 16 см, одна из его сторон m см. Какова площадь прямоугольника?

б) Площадь прямоугольника 28 м^2, а одна из его сторон равна a м. Чему равен периметр прямоугольника?

в) Из двух городов, расстояние между которыми s км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Скорость одного из них v_1 км/ч, а скорость другого v_2 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

г) Через какое время мотоциклист догонит велосипедиста, если расстояние между ними s км, скорость велосипедиста v_1 км/ч, а скорость мотоциклиста v_2 км/ч?

207. От прямоугольного листа картона со сторонами a см и b см отрезали по углам квадраты со сторонами x см (рис. 8). Из оставшейся части сделали открытую коробку. Запишите формулу для вычисления объёма V коробки. Вычислите по формуле объём коробки, если $a = 35$, $b = 25$, $x = 5$. Какие значения может принимать переменная x при указанных значениях a и b?

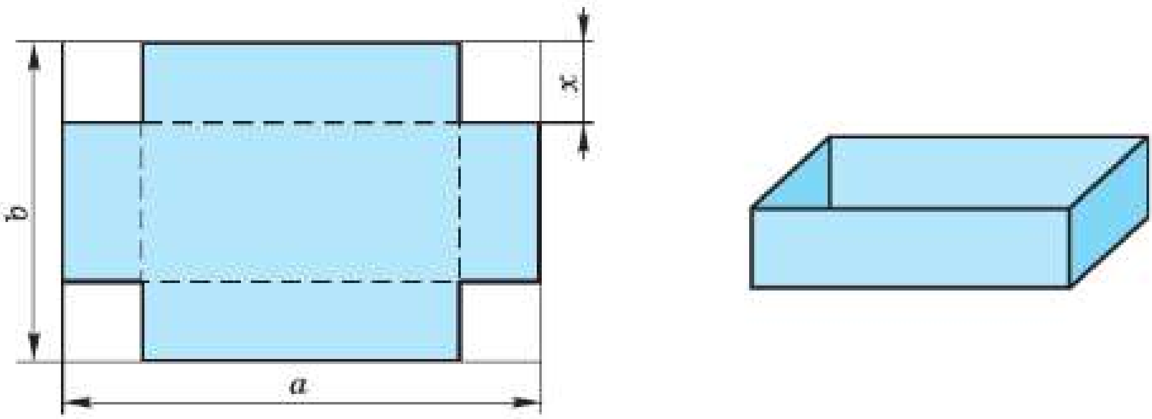


Рис. 8

208. Составьте формулу числа: а) кратного 11; б) кратного 21.

209. Чтобы выразить в километрах расстояние, измеренное в морских милях, пользуются формулой $y = 1{,}853x$, где x — расстояние в милях, а y — то же расстояние в километрах. Выразите в километрах следующие расстояния: 10 миль, 50 миль, 250 миль.

210. Сравните:

а) $3{,}48 - 4{,}52$ и $-8{,}93 + 0{,}16$;
в) $4{,}7 - 9{,}65$ и $4{,}7 - 9{,}9$;
б) $6{,}48 \cdot \frac{1}{8}$ и $6{,}48 : \frac{1}{8}$;
г) $\frac{3}{4} \cdot 16{,}4$ и $16{,}4 : \frac{3}{4}$.

211. Верно ли, что:
а) если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$;
б) если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$?

212. Верно ли, что для любых чисел a и b:
а) $|a + b| = |a| + |b|$; б) $|ab| = |a| \cdot |b|$?

213. Известно, что $|x| = |y|$. Верно ли, что $x = y$?

214. а) Известно, что $|a| < |b|$. Верно ли, что $a < b$?
б) Известно, что $|a| > |b|$. Возможно ли, чтобы было $a < b$?

215. В таблице приведены цены на молочные товары в трёх магазинах.

Товар	«Бурёнкино»	«Деревенский»	«Коровка»
Молоко, 1л	120 р.	150 р.	135 р.
Творог, 1 кг	324 р.	305 р.	280 р.
Сметана, 0,5 кг	90 р.	85 р.	97 р.

Надежда Михайловна хочет купить 2 л молока, 800 г творога и 1,2 кг сметаны. В каком магазине стоимость её покупки будет наименьшей, если в магазине «Бурёнкино» творог продаётся по акции со скидкой 10%, а в магазине «Деревенский» скидка на все товары составляет 5%? В ответе укажите стоимость этой покупки.

216. Витя, Женя, Полина и Вика на уроке математики соревновались в скорости выполнения заданий. Учительница поставила пятёрку тем из них, кто выполнил все задания быстрее чем за 6,5 мин. Проанализируйте результаты, приведённые в таблице, и сделайте вывод, кто из ребят смог получить пятёрку.

Витя	Женя	Полина	Вика
7 мин 40 с	5 мин 30 с	6 мин 45 с	6 мин 20 с

217. Класс в школе, в которой учится Вася, имеет длину, равную 9 м, а ширину — на 3,75 м меньше. В классе три одинаковых окна высотой 2,1 м и шириной 1,5 м.

Комната Васи в квартире, в которой он живёт, имеет ширину 4 м, а длину — 4,5 м. В комнате два квадратных окна размером $1{,}5 \times 1{,}5$ м.

Выясните, в каком помещении лучше естественное освещение.

Для этого:

1) Найдите площадь всех окон класса (световую площадь).

2) Вычислите площадь класса.

3) Узнайте, сколько процентов составляет световая площадь класса по отношению к площади пола.

4) Вычислите площадь комнаты Васи.

5) Подсчитайте световую площадь комнаты и узнайте, сколько процентов составляет световая площадь комнаты по отношению к площади пола.

6) Что больше: световая площадь комнаты Васи или световая площадь класса, в котором он учится, и на сколько процентов?

7) Ответьте на вопрос задачи.

К параграфу 2

218. Найдите значение выражения:

а) $5{,}9 \cdot 2{,}6 + 5{,}9 \cdot 3{,}2 + 5{,}8 \cdot 4{,}1$;

б) $6{,}8 \cdot 8{,}4 - 1{,}6 \cdot 8{,}4 + 5{,}2 \cdot 1{,}6$.

219. Вычислите:

а) $(1{,}25 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}8 - 1{,}7) \cdot 3{,}45$;

б) $3{,}947 : (3{,}6 - 2{,}6 \cdot 4 \cdot 0{,}25)$.

220. Объясните, почему равенство является тождеством:

а) $|x| = |-x|$; б) $|x - y| = |y - x|$; в) $|2c| = 2|c|$.

221. Является ли тождеством равенство:

а) $|a + 5| = a + 5$; в) $|a - b| - |b - a| = 0$;

б) $|a^2 + 4| = a^2 + 4$; г) $|a + b| - |a| = |b|$?

222. Докажите, что:

а) если к сумме двух чисел прибавить их разность, то получится удвоенное первое число;

б) если из суммы двух чисел вычесть их разность, то получится удвоенное второе число.

223. Докажите, что выражение тождественно равно нулю:

а) $(a + b)x + (a - b)x - 2ax$; б) $8(x - y) + 8(y - x)$.

224. Докажите, что:

а) выражение $x(-1) + x(-2) + x(-3) + 6x$ тождественно равно нулю;

б) выражение $a(-5) + a \cdot 4 + a(-3) + a \cdot 2$ тождественно равно $-2a$.

225. Найдите значение выражения $8a - (4b + 3a) - (4a - 3b)$:

а) при $a = 6{,}8$, $b = 7{,}3$; б) при $a = -8{,}9$, $b = -9{,}9$.

226. Докажите, что значение выражения не зависит от a:

а) $a + (2a - (3a - 5))$; б) $a - (6a - (5a - 8))$.

227. Докажите, что если одно из чисел кратно 3, а другое кратно 5, то их произведение кратно 15.

К параграфу 3

228. Является ли корнем уравнения $(2x - 3{,}8)(4{,}2 + 3x) = 0$ число:

а) 1,9; б) 2; в) −1,4; г) −3?

229. Какие из чисел −4, −3, −1, 3, 4 являются корнями уравнения:

а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; б) $x^2 + x = 12$?

230. Имеет ли корни уравнение:

а) $3x + 7 = (9 + x) + 2x$; в) $x^2 = x$;

б) $5x - 1 = 4(x + 2) - (9 - x)$; г) $x + 1 = x - 1$?

231. Почему не имеет корней уравнение:

а) $|x| = -1$; б) $|x| + 3 = 0$?

232. Решите уравнение:

а) $|x| = 5$; б) $|a| - 17 = 0$; в) $6 - |b| = 0$.

233. При каких значениях коэффициента m уравнение $mx = 5$ имеет единственный корень? Существует ли такое значение m, при котором это уравнение не имеет корней; имеет бесконечно много корней?

234. При каких значениях коэффициента p уравнение $px = 10$ имеет корень, равный −5; 1; 20?

235. Решите уравнение:

а) $3{,}8x - (1{,}6 - 1{,}2x) = 9{,}6 + (3{,}7 - 5x)$;

б) $(4{,}5y + 9) - (6{,}2 - 3{,}1y) = 7{,}2y + 2{,}8$;

в) $0{,}6m - 1{,}4 = (3{,}5m + 1{,}7) - (2{,}7m - 3{,}4)$;

г) $(5{,}3a - 0{,}8) - (1{,}6 - 4{,}7a) = 2a - (a - 0{,}3)$.

236. Может ли иметь положительный корень уравнение:

а) $(x + 5)(x + 6) + 9 = 0$; б) $x^2 + 3x + 1 = 0$?

237. Решите уравнение:

а) $0{,}15(x-4)=9{,}9-0{,}3(x-1)$;
б) $1{,}6(a-4)-0{,}6=3(0{,}4a-7)$;
в) $(0{,}7x-2{,}1)-(0{,}5-2x)=0{,}9(3x-1)+0{,}1$;
г) $-3(2-0{,}4y)+5{,}6=0{,}4(3y+1)$.

238. При каком значении переменной:

а) сумма выражений $2x+7$ и $-x+12$ равна 24;
б) разность выражений $-5y+1$ и $-3y-2$ равна -9;
в) сумма выражений $15x-1$ и $6x-8$ равна их разности;
г) разность выражений $25p+1$ и $p-12$ равна их сумме?

239. Найдите все целые значения a, при которых корень уравнения $ax=6$ является целым числом.

240. Не решая уравнения $7(2x+1)=13$, докажите, что его корень не является целым числом.

241. На ферме 1000 кроликов и кур, у них 3150 ног. Сколько кроликов и сколько кур на ферме?

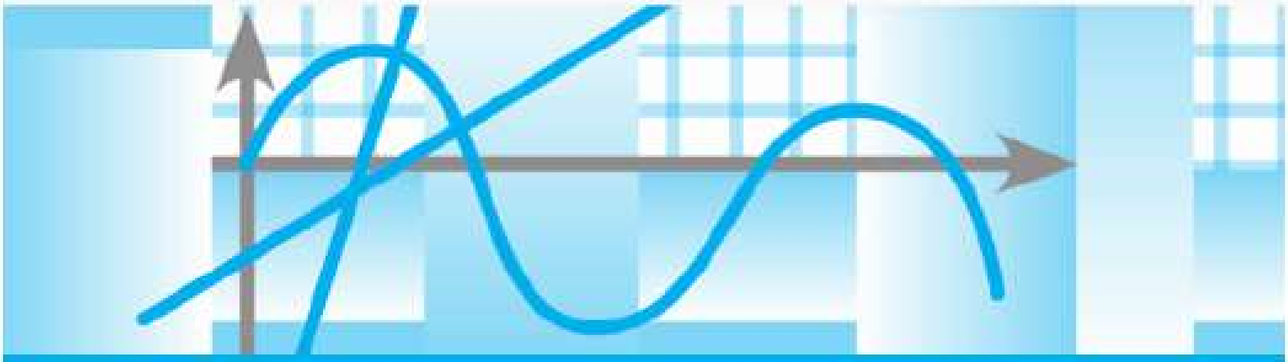
242. На первом участке было посажено на 9 кустов смородины больше, чем на втором. Если со второго участка пересадить на первый 3 куста, то на первом участке станет в 1,5 раза больше кустов смородины, чем на втором. Сколько кустов смородины на первом участке?

243. У Миши в 4 раза больше марок, чем у Андрея. Если Миша отдаст Андрею 8 марок, то у него станет марок вдвое больше, чем у Андрея. Сколько марок у каждого мальчика?

244. Чтобы сдать в срок книгу в библиотеку, ученик должен был читать ежедневно по 40 страниц, но он читал в день на 15 страниц меньше и сдал книгу на 6 дней позже срока. За сколько дней ученик должен был прочитать книгу?

245. Чтобы сделать вовремя заказ, артель стеклодувов должна была изготовлять в день по 40 изделий. Однако она изготовляла ежедневно на 20 изделий больше и, благодаря этому, выполнила заказ на 3 дня раньше срока. Каков был срок выполнения заказа?

246. Если к задуманному числу прибавить 7, полученную сумму умножить на 3 и из произведения вычесть 47, то получится задуманное число. Какое число задумано?



Глава II ФУНКЦИИ

В этой главе вы познакомитесь с различными видами числовых промежутков, а также узнаете, что называется функцией и графиком функции. С этими понятиями вы постоянно будете встречаться не только на уроках математики, но и на уроках физики, химии, информатики. Вы узнаете, что с помощью графиков можно получить наглядные представления о свойствах функций, познакомитесь со свойствами линейной функции и её частного вида, прямой пропорциональности. Вас, безусловно, заинтересует возможность использования компьютера при решении некоторых задач, связанных с понятиями функции и графика функции. Вы узнаете, что на практике для вычерчивания графиков различных функций часто используются специальные приборы. Например, с помощью кардиографа получают графическое описание работы сердца, а с помощью сейсмографа — графическое описание колебаний земной поверхности.

§ 4 ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

11. Числовые промежутки

Рис. 9

Пусть a и b — некоторые числа, причём $a < b$. Отметим на координатной прямой точки с координатами a и b (рис. 9). Возьмём точку, расположенную между ними. Ей соответствует число x, которое больше a и меньше b. Верно и обратное: если число x больше a и меньше b, то оно изображается точкой, лежащей между точками с координатами a и b. Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$, изображается на координатной прямой отрезком, ограниченным точками с координатами a и b (рис. 10 на с. 52). Это множество называют *числовым отрезком* или просто *отрезком* и обозначают так: $[a; b]$ (читают: отрезок от a до b).

Множество чисел, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называют *интервалом* и обозначают так: $(a; b)$ (читают: интервал от a до b). Это множество изображено на рисунке 11 на с. 52. Светлые кружки означают, что числа a и b не принадлежат этому множеству.

Рис. 10

Рис. 11

Рис. 12

Рис. 13

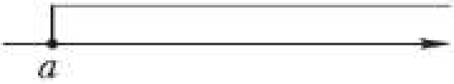


Рис. 14

Рис. 15

Рис. 16

Множества чисел x, для которых выполняются двойные неравенства $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, называют *полуинтервалами* и обозначают соответственно $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$ (читают: полуинтервал от a до b, включая a; полуинтервал от a до b, включая b). Эти полуинтервалы изображены на рисунках 12 и 13.

Числовые отрезки, интервалы и полуинтервалы называют *числовыми промежутками*.

Приведём примеры других числовых промежутков.

Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$, изображается лучом с началом в точке с координатой a, расположенным вправо от неё (рис. 14). Это множество называют *замкнутым лучом*. Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > a$, тоже изображаются лучом, но точка с координатой a в этом случае не включается (рис. 15). Его называют *открытым лучом*. На рисунке 16 изображены множества чисел x, для которых выполняются неравенства $x \leqslant a$ и $x < a$.

Из курса математики 5—6 классов вам известно, что на координатной прямой расстояние от произвольной точки с координатой x до начала отсчёта (т. е. до точки с координатой 0) равно $|x|$.

При решении задач часто приходится находить расстояние между двумя точками координатной прямой.

Возьмём произвольные точки $A(a)$ и $B(b)$.

Возможны два варианта расположения точек $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой: A левее B и A правее B, т. е. $a < b$ и $a > b$. Пусть точка $A(a)$ расположена левее точки $B(b)$. Рассмотрим три случая такого расположения (рис. 17):

1) если $a > 0$ и $b > 0$, то $AB = OB - OA = |b| - |a| = b - a$;

2) если $a < 0$ и $b > 0$, то $AB = OA + OB = |a| + |b| = -a + b = b - a$;

3) если $a < 0$ и $b < 0$, то $AB = OA - OB = |a| - |b| = -a - (-b) = b - a$.

Итак, если $a < b$, то $AB = b - a$.

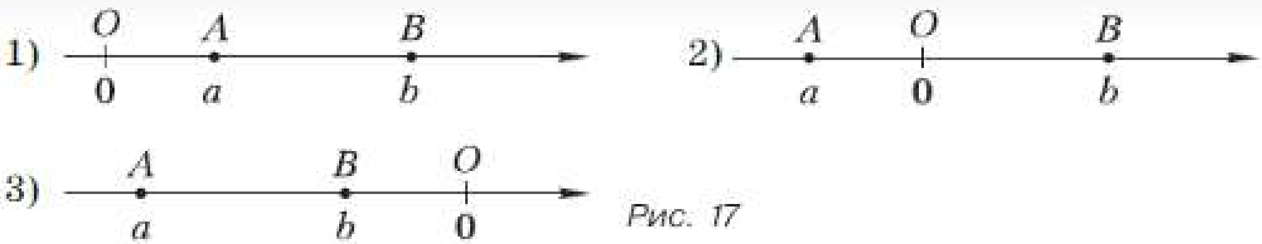


Рис. 17

Точно так же можно показать, что если $a > b$, то $AB = a - b$.

Так как $b - a$ и $a - b$ — числа противоположные, то, объединяя эти два случая, приходим к формуле $AB = |b - a|$. ○

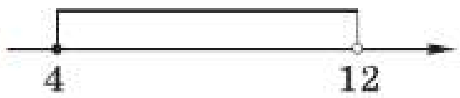
Эту формулу читают так: *расстояние между двумя точками координатной прямой равно модулю разности их координат*.

Упражнения

247. Задайте неравенством числовой промежуток, изображённый на рисунке:

а) 

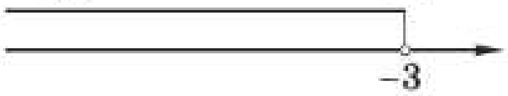
б) 

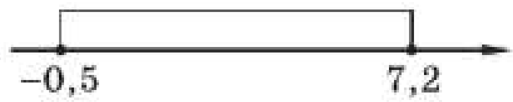
в) 

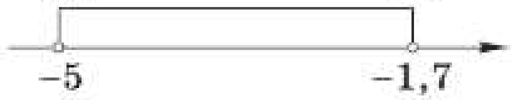
г) 

248. Задайте неравенством числовой промежуток, изображённый на рисунке:

а) 

б) 

в) 

г) 

249. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток, заданный неравенством:
а) $x \geqslant -2$; б) $-3 < x \leqslant 4$; в) $-2 \leqslant x \leqslant 5$; г) $-5 < x < -2$.

250. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток, заданный неравенством:
а) $x < -3$; б) $-3 \leqslant x < 6$; в) $-3 \leqslant x \leqslant 2$; г) $-4 < x < 2$.

251. Найдите расстояние между точками:
а) S (7,45) и D (1,15); в) K (9,43) и L (–9,43);
б) R (–5,3) и T (–8,93); г) $A\left(-5\frac{1}{3}\right)$ и $B\left(3\frac{2}{3}\right)$.

252. На координатной прямой отмечены точки $A(-5)$, $B(-3)$, $C(1)$ и $D(6)$. Найдите расстояние между серединами отрезков AD и BC.

253. На координатной прямой отмечены точки $A(-6)$, $B(3)$, $C(6)$ и $D(4)$. Найдите расстояние между серединами отрезков AD и BC.

254. Между какими из приведённых ниже чисел находится число: $\frac{11}{17}$; $\frac{15}{19}$; $\frac{14}{23}$; $\frac{31}{59}$?

1. 0,4 и 0,5 2. 0,5 и 0,6 3. 0,6 и 0,7 4. 0,7 и 0,8

255. Из чисел $\frac{35}{23}$, $\frac{54}{23}$, $\frac{83}{23}$, $\frac{101}{23}$ выберите число, которое лежит между числами 4 и 5.

П

256. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам: $-3\frac{1}{3}$; 0,7; 1,5; $2\frac{6}{7}$; $-2{,}25$.

257. Составьте формулу для нахождения площади покраски стен складского помещения, длина которого равна a м, ширина — b м, а высота — c м. Заполните таблицу:

Длина, м	Ширина, м	Высота, м	Площадь покраски, м^2
6	5	3	
10	15	5	

Сколько для этого в каждом случае понадобится банок краски, если одной банки хватает на покраску 12 м^2?

12. Что такое функция

На практике мы часто встречаемся с зависимостями между различными величинами. Например, площадь круга зависит от его радиуса, масса металлического бруска зависит от его объёма и плотности металла, объём прямоугольного параллелепипеда зависит от его длины, ширины и высоты.

В дальнейшем мы будем изучать зависимость между двумя величинами.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Площадь квадрата зависит от длины его стороны.

▶ Пусть сторона квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2. Для каждого значения переменной a можно найти соответствующее ему значение переменной S. Так, например:

если $a = 3$, то $S = 3^2 = 9$; если $a = 15$, то $S = 15^2 = 225$;
если $a = 0{,}08$, то $S = 0{,}08^2 = 0{,}0064$.

Зависимость переменной S от переменной a обозначается $S(a)$ (читают: «эс от а») и выражается формулой

$$S = a^2$$

(по смыслу задачи $a > 0$),

при этом $S(3) = 9$; $S(15) = 225$; $S(0{,}08) = 0{,}0064$. ◁

Переменную a, значения которой выбираются произвольно, называют *независимой переменной*, а переменную S, значения которой определяются выбранными значениями a, называют *зависимой переменной*.

П р и м е р 2. Путь, пройденный автомобилем со скоростью 50 км/ч, зависит от времени движения.

▶ Обозначим время движения автомобиля (в часах) буквой t, а пройденный путь (в километрах) буквой s. Для каждого значения переменной t, где $t \geqslant 0$, можно найти соответствующее значение переменной s. Например:
если $t = 0{,}5$, то $s = 50 \cdot 0{,}5 = 25$; если $t = 2$, то $s = 50 \cdot 2 = 100$;
если $t = 3{,}5$, то $s = 50 \cdot 3{,}5 = 175$.

Зависимость переменной s от переменной t обозначается $s(t)$ (читают: «эс от тэ») и выражается формулой $s(t) = 50t$. ◁

В этом примере t является независимой переменной, а s — зависимой переменной. Чтобы найти значение переменной s, соответствующее значению переменной t, равному, например, 4, надо в формулу вместо переменной t подставить число 4. Получим $s(4) = 50 \cdot 4 = 200$.

П р и м е р 3. На рисунке 18 изображён график температуры воздуха в течение суток.

▶ С помощью этого графика для каждого момента времени t (в часах), где $0 \leqslant t \leqslant 24$, можно найти соответствующую температуру p (в градусах Цельсия). Например:
если $t = 7$, то $p = -4$; если $t = 17$, то $p = 3$;
если $t = 12$, то $p = 2$; если $t = 22$, то $p = 0$.

Здесь t является независимой переменной, а p — зависимой переменной.

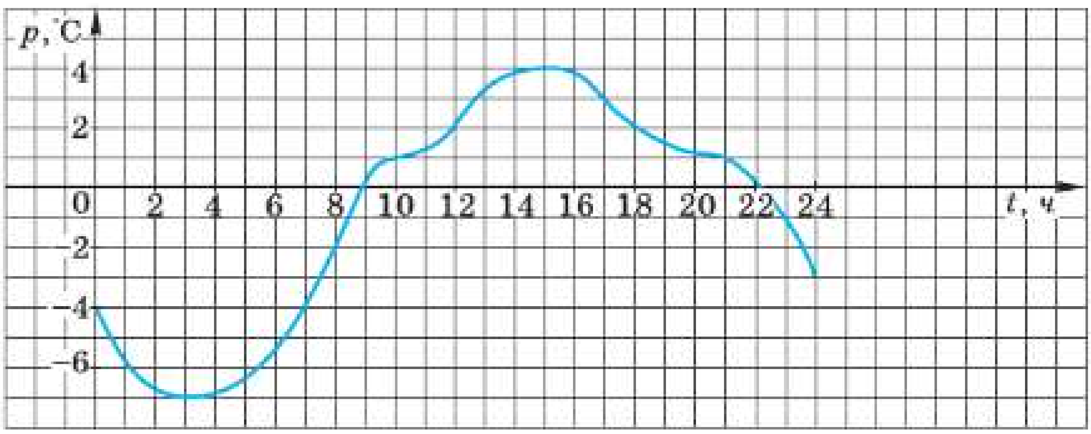


Рис. 18

Пример 4. Стоимость проезда в пригородном поезде зависит от номера зоны, к которой относится станция. Эта зависимость для некоторого региона показана в таблице (буквой n обозначен номер зоны, а буквой m — стоимость проезда в рублях):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	26	52	78	104	130	156	182	208	234

По этой таблице для каждого значения n, где $n = 1, 2, \ldots, 9$, можно найти соответствующее значение m. Так, если $n = 2$, то $m = 52$; если $n = 6$, то $m = 156$; если $n = 9$, то $m = 234$.
В этом случае n является независимой переменной, а m — зависимой переменной.

В рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Такую зависимость одной переменной от другой называют *функциональной зависимостью* или *функцией*.

В примере 2 эта зависимость задана аналитически, в примере 3 — графически, а в примере 4 — с помощью таблицы.

Независимую переменную иначе называют *аргументом*, а о зависимой переменной говорят, что она является *функцией* от этого аргумента. Так, площадь квадрата является функцией от длины его стороны; путь, пройденный автомобилем с постоянной скоростью, является функцией от времени движения. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*. Например, область определения функции в примере 1 состоит из всех положительных чисел, а в примере 3 — из всех чисел от 0 до 24.

Упражнения

258. Площадь прямоугольника со сторонами 9 см и x см равна S см^2. Выразите формулой зависимость $S(x)$. Для значения x, равного 4; 6,5; 15, найдите соответствующее значение функции S.

259. Поезд, двигаясь со скоростью 70 км/ч, проходит за t ч расстояние s км. Задайте формулой зависимость $s(t)$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 2,4; 3,8.

260. Объём куба зависит от длины его ребра. Пусть a см — длина ребра куба, а V см^3 — его объём. Задайте формулой зависимость $V(a)$. Возьмите два каких-либо значения аргумента и вычислите соответствующие им значения функции.

261. По озеру плавала яхта. Расстояние s (в километрах), на которое удалялась яхта от базы, менялось с течением времени движения t (в минутах). Изменение s в зависимости от t показано на рисунке 19. На каком расстоянии от базы находилась яхта через 20 мин; через 1 ч 20 мин; через 2 ч 30 мин? Какова область определения рассматриваемой функции?

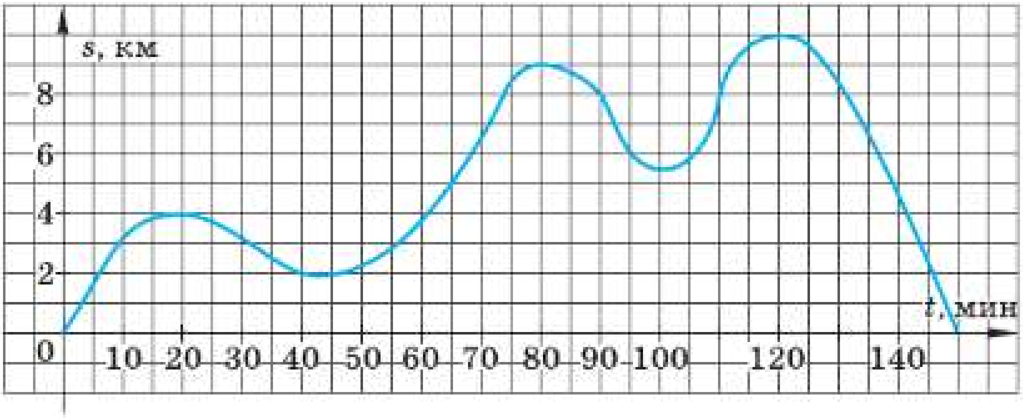


Рис. 19

262. На рисунке 20 показано изменение высоты сосны y (в метрах) в зависимости от её возраста x (в годах). Найдите:
а) высоту сосны в возрасте 10; 40; 90; 120 лет;
б) на сколько выросла сосна за промежуток времени от 20 до 60 лет; от 70 до 120 лет.

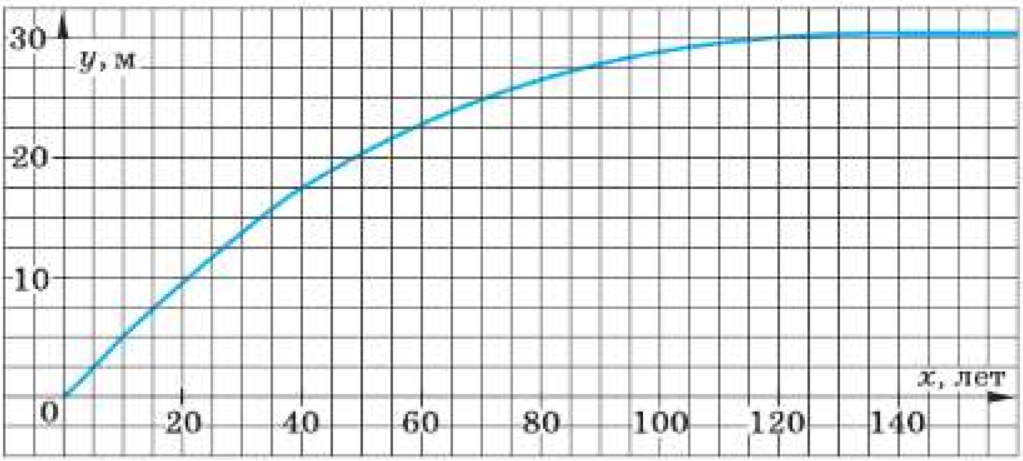


Рис. 20

263. Каждому натуральному числу n ставится в соответствие остаток r от деления этого числа на 4.
а) Найдите r, если n равно 13, 34, 43, 100.
б) В рассматриваемой функциональной зависимости укажите аргумент.
в) Какова область определения этой функции?
г) Какие числа служат значениями функции?

264. В таблице, составленной в результате измерений, показана зависимость атмосферного давления p от высоты h:

h, км	0	0,5	1	2	3	4	5
p, мм рт. ст.	760,0	716,0	614,0	596,7	525,7	462,2	404,8

а) Каково атмосферное давление на высоте 1 км; 4 км?
б) На какой высоте атмосферное давление равно 596,7 мм рт. ст.; 404,8 мм рт. ст.?
в) Как изменяется давление в зависимости от высоты?

П

265. В одном резервуаре 380 м^3 воды, а в другом 1500 м^3. В первый резервуар каждый час поступает 80 м^3 воды, а из второго каждый час выкачивают 60 м^3. Через сколько часов воды в резервуарах станет поровну?

266. Отметьте точки $A(4; -3)$ и $B(-2; 6)$. Проведите прямую AB и найдите координаты точек пересечения этой прямой с осью x и осью y.

13. Вычисление значений функции по формуле

Функции, которые мы рассматривали в предыдущем пункте, задавались различными способами. Наиболее распространённым способом является задание функции с помощью формулы (аналитически). Формула позволяет для любого значения аргумента находить соответствующее значение функции путём вычислений.

Пример 1. Пусть функция задана формулой

$$y(x) = \frac{3x - 1}{2}, \text{ где } -3 \leqslant x \leqslant 3.$$

▶ Найдём значения y, соответствующие целым значениям x:

если $x = -3$, то $y(-3) = \dfrac{3 \cdot (-3) - 1}{2} = -5$;

если $x = -2$, то $y(-2) = \dfrac{3 \cdot (-2) - 1}{2} = -3{,}5$ и т. д. ◁

Результаты вычислений удобно записать в виде таблицы, поместив в верхней строке значения аргумента, а в нижней строке соответствующие значения функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	$-3{,}5$	-2	$-0{,}5$	1	$2{,}5$	4

Мы выбирали каждый раз значение x на 1 больше предыдущего. Говорят, что составлена таблица значений функции с шагом 1.

В рассмотренном примере была указана область определения функции. Если функция задана формулой и область определения этой функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл.

Например, область определения функции, заданной формулой $y = x(x + 5)$, состоит из всех чисел, а область определения функции, заданной формулой $y = \frac{1}{x-2}$, состоит из всех чисел, кроме числа 2.

С помощью формулы, задающей функцию, решают также задачу отыскания значений аргумента, которым соответствует данное значение функции.

Пример 2. Функция задана формулой $y = 12x - 3{,}6$. Найдём, при каком значении x значение функции равно 2,4.

▶ Подставим в формулу $y = 12x - 3{,}6$ вместо y число 2,4. Получим уравнение с переменной x: $2{,}4 = 12x - 3{,}6$.
Решив его, найдём, что $x = 0{,}5$.
Значит, $y = 2{,}4$ при $x = 0{,}5$, то есть $y(0{,}5) = 2{,}4$. ◁

Заметим, что мы смогли решить эту задачу, так как она свелась к уравнению, способ решения которого нам известен.

Упражнения

267. Функция задана формулой $y = 2x + 7$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 1; −20; 43.

268. Функция задана формулой $y = 0{,}1x + 5$. Для значения аргумента, равного 10; 50; 120, найдите соответствующее значение функции.

ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНИЦ (1646—1716) — немецкий философ, математик, физик и языковед. Он и английский учёный И. Ньютон создали (независимо друг от друга) основы важного раздела математики — математического анализа. Лейбниц ввёл многие понятия и символы, употребляемые в математике и сейчас, в частности, им введён термин «функция».

269. Функция задана формулой $y = \frac{12}{x}$. В таблице указаны некоторые значения аргумента. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу, вычислив соответствующие значения функции.

x	−6	−4	−3	2	5	6	12
y							

270. Функция задана формулой $y = x^2 - 9$. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу.

x	−5	−4	−3	0	2	3	6
y							

271. Составьте таблицу значений функции, заданной формулой $y = x(x - 3{,}5)$, где $0 \leqslant x \leqslant 4$, с шагом 0,5.

272. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + 8$; б) $y = \frac{1}{x - 7}$; в) $y = \frac{2}{3 + x}$; г) $y = \frac{4x - 1}{5}$.

273. Формула $y = -5x + 6$ задаёт некоторую функцию. При каком значении аргумента значение функции равно 6; 8; 100?

274. Функция задана формулой $y = \frac{2}{3}x$. Заполните пустые клетки таблицы, перечертив её в тетрадь.

x	−0,5			4,5	9
y		−2	0		

275. Функция задана формулой $y = 0{,}3x - 6$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно −6; −3; 0.

276. Задайте формулой зависимость массы куска пробки от его объёма, если известно, что плотность пробки равна 0,18 г/см^3. Найдите по формуле:
а) массу куска пробки, объём которого равен 240 см^3;
б) объём куска пробки, масса которого равна 64,8 г.

277. Двигаясь со скоростью v км/ч в течение 6 ч, автомобиль прошёл путь s км. Задайте формулой зависимость $s(v)$. Пользуясь этой формулой:
а) найдите s, если $v = 65$; б) найдите v, если $s = 363$.

278. С турбазы на станцию, удалённую на расстояние 60 км, отправился велосипедист со скоростью 12 км/ч. Задайте формулой зависимость переменной s от переменной t, где s — расстояние велосипедиста до станции (в километрах), а t — время его движения (в часах). Найдите по формуле:
а) s, если $t = 3{,}5$; б) t, если $s = 30$.

279. У мальчика было 80 р. Он купил x карандашей по 10 р. за штуку. Обозначив число рублей, оставшихся у мальчика, буквой y, задайте формулой зависимость y от x. Какова область определения этой функции в соответствии с условием задачи?

П

280. Для сельской библиотеки ученики шестых и седьмых классов собрали 315 книг. Сколько книг собрали семиклассники, если известно, что они собрали на 10% книг больше, чем шестиклассники? Покажите на круговой диаграмме соотношение между количеством книг (в процентах), собранных учениками шестых и седьмых классов.

281. Отметьте в координатной плоскости точки $M(0; -4)$ и $N(6; 2)$ и соедините их отрезком. Найдите координаты точки пересечения этого отрезка с осью x.

282. Отметьте в координатной плоскости точки $A(-2; -3)$ и $B(4; 5)$ и соедините их отрезком. Найдите координаты середины отрезка AB.

14. График функции

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = \frac{6}{x+3}$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

По этой формуле для любого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции.

В таблице указаны некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции:

x	−2	−1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Каждую из найденных пар значений x и y изобразим точкой в координатной плоскости, считая значение x абсциссой, а соответствующее значение y ординатой (рис. 21 на с. 62). Выбирая другие значения x из промежутка от −2 до 3 и вычисляя соответствующие им значения y по формуле $y = \frac{6}{x+3}$, будем получать другие пары значений x и y. Каждой из этих пар также соответствует некоторая точка координатной плоскости. Все такие точки образуют *график функции*, заданной формулой $y = \frac{6}{x+3}$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 22).

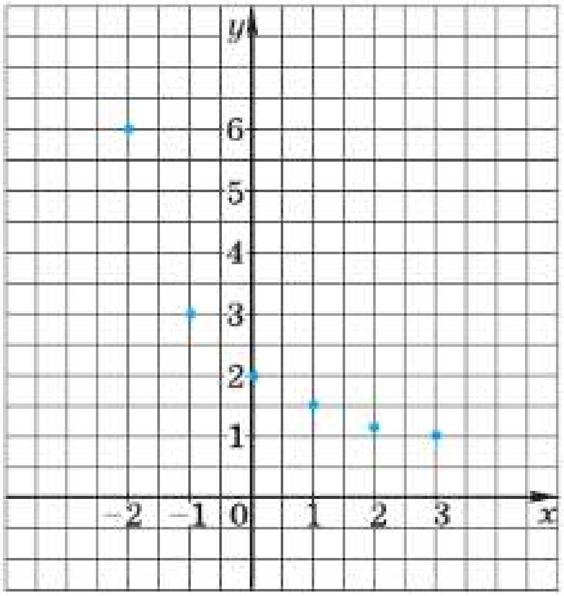


Рис. 21

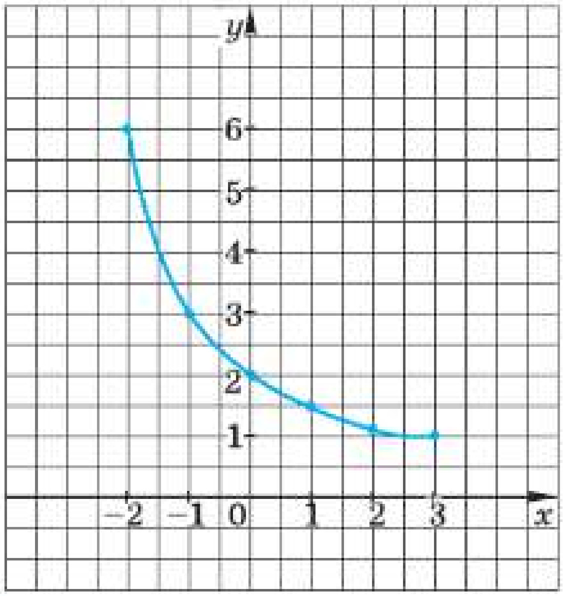


Рис. 22

Определение. Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Пример 1. Построим график функции, заданной формулой
$$y = x(6 - x), \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 5.$$

▶ Составим таблицу соответственных значений аргумента и функции:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-7	0	5	8	9	8	5

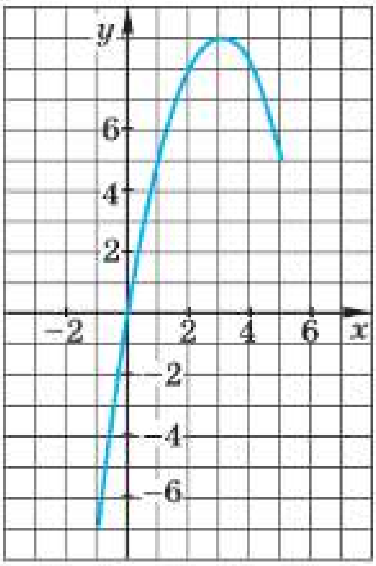


Рис. 23

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Соединим их плавной линией (рис. 23). Получим график функции, заданной формулой
$$y = x(6 - x), \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 5. \triangleleft$$

Чем больше отметим точек, принадлежащих графику, и чем плотнее они будут расположены, тем точнее будет построен график функции.

С помощью графика функции по значению аргумента можно найти соответствующее значение функции. Можно также решить обратную задачу: по значению функции найти те значения аргумента, которым оно соответствует.

П р и м е р 2. По графику функции, изображённому на рисунке 24, найдём: а) значение функции при $x = 3$; б) значения x, при которых значение функции равно 7.

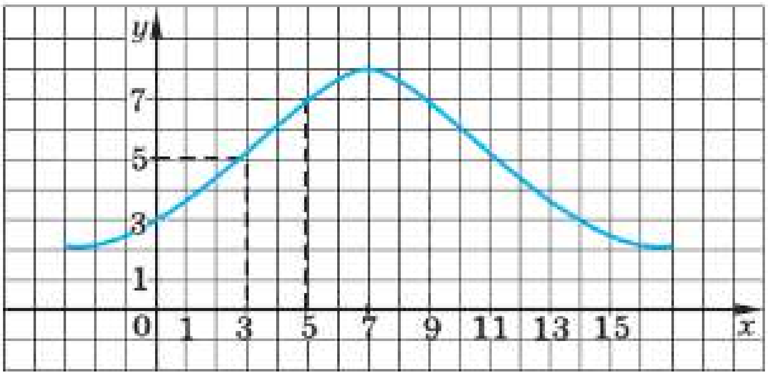


Рис. 24

▶ а) Через точку оси x с абсциссой, равной 3, проведём перпендикуляр к оси x. Точка пересечения этого перпендикуляра с графиком функции имеет координаты (3; 5). Значит, при $x = 3$ значение функции равно 5.

б) Проведём через точку оси y с ординатой, равной 7, прямую, параллельную оси x. Эта прямая пересекает график в двух точках: с координатами (5; 7) и (9; 7). Значит, функция принимает значение, равное 7, при $x = 5$ и при $x = 9$. ◁

Если известна формула, которая задаёт функцию, то узнать, принадлежит ли заданная точка графику этой функции, можно путём вычислений. Для этого достаточно подставить соответствующие координаты точки в формулу, задающую функцию. Если в результате получится верное числовое равенство, то указанная точка принадлежит графику данной функции, в противном случае — не принадлежит.

П р и м е р 3. Функция задана формулой $y = 3 - 2x$. Принадлежат ли графику этой функции точки $M(0;\ 3)$ и $N(2;\ 5)$?

▶ Подставим координаты первой точки в формулу $y = 3 - 2x$:

$$3 = 3 - 2 \cdot 0 = 3.$$

Полученное равенство является верным, значит, точка $M(0;\ 3)$ принадлежит графику данной функции.

Подставим координаты второй точки в формулу $y = 3 - 2x$:

$$5 = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Полученное равенство не является верным, значит, точка $N(2;\ 5)$ не принадлежит графику данной функции. ◁

График даёт наглядное представление о зависимости между величинами. Так, по графику температуры воздуха можно узнать, когда температура равнялась нулю, была выше нуля, ниже нуля, возрастала, убывала и т. д. Например, с помощью графика, изображённого на рисунке 18 (см. с. 55), можно определить, что температура была равна 0°С в 9 ч и в 22 ч; была положительной с 9 до 22 ч; возрастала с 3 до 15 ч.

На практике часто используются приборы для автоматической регистрации хода того или иного процесса (изменения в течение суток атмосферного давления, изменения в течение суток уровня моря, изменения давления пара в цилиндре двигателя в зависимости от положения поршня). Эти приборы вычерчивают графики соответствующих функциональных зависимостей.

Упражнения

283. Функция задана формулой $y = x(x - 3)$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Перечертите в тетрадь таблицу, заполните и постройте график функции.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y									

284. Принадлежат ли точки $A(4; 2)$, $B(1; -4)$ и $C(1; 4)$ графику функции, заданной формулой $y = 2x - 6$? Укажите ещё две точки, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.

285. Кривая, изображённая на рисунке 25, — график некоторой функции. Найдите по графику значение функции, соответствующее значению аргумента -2; -1; 0; 1; 5.

286. Используя график функции (рис. 26), заполните таблицу, перечертив её в тетрадь.

x	-3	$-1{,}5$	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$3{,}5$
y						

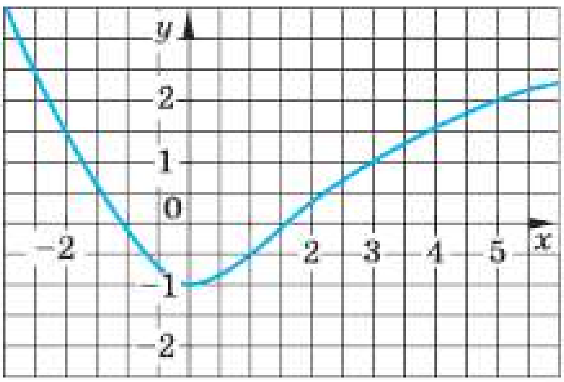


Рис. 25

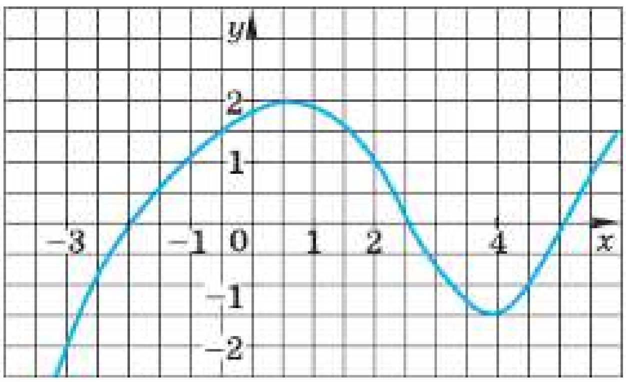


Рис. 26

Укажите пять каких-либо значений аргумента, которым соответствуют положительные значения функции, и пять каких-либо значений аргумента, которым соответствуют отрицательные значения функции.

287. *(Для работы в парах.)* Кривая, изображённая на рисунке 27, — график некоторой функции. Используя график, найдите:

а) значения y при $x = -3$; -2; 0; 2; 4;

б) значения x, которым соответствуют $y = -2$; 0; 2; 3.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения задания.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.
4) Обсудите возможность существования двух искомых значений в случае а) и в случае б).

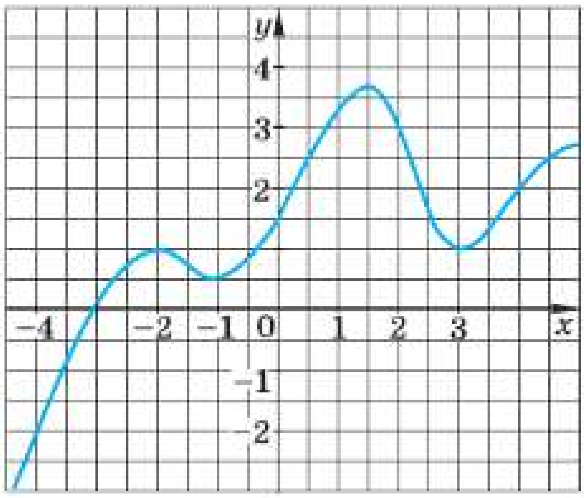


Рис. 27

288. Пользуясь графиком функции, изображённым на рисунке 27, укажите два значения аргумента, при которых функция принимает: положительные значения; отрицательные значения.

289. Измеряя в течение десяти лет каждый год в день рождения рост ребёнка, построили график зависимости роста от возраста ребёнка (рис. 28). Пользуясь графиком, найдите:

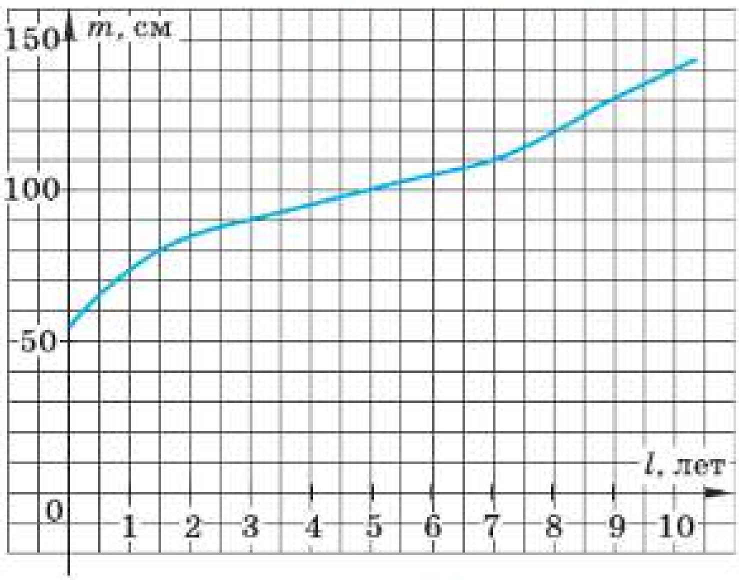


Рис. 28

а) каков был рост ребёнка в 3 года; в 6 лет; в 9 лет;
б) на сколько сантиметров вырос ребёнок за первые пять лет жизни; за последующие пять лет жизни.

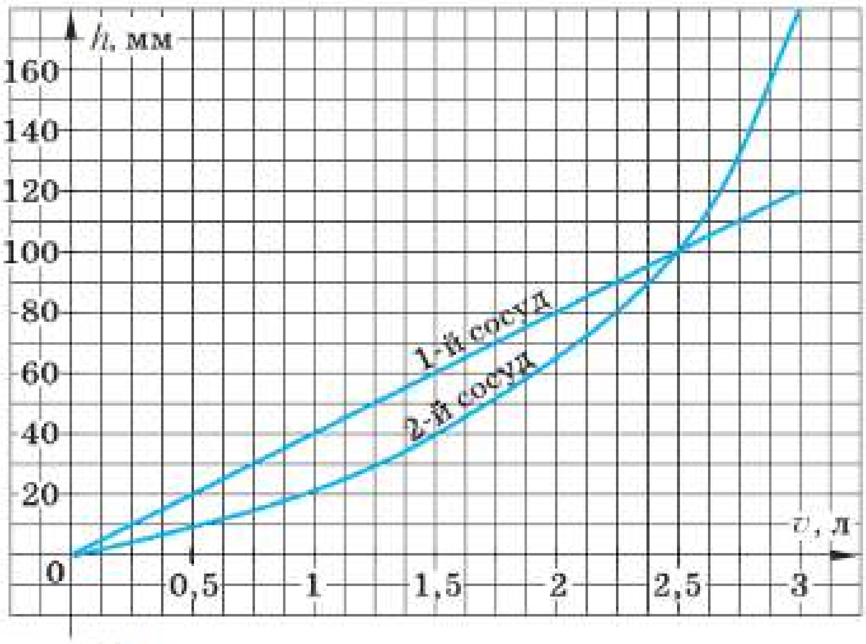


Рис. 29

290. *(Для работы в парах.)* На рисунке 29 изображены графики зависимости высоты уровня жидкости от её объёма в двух сосудах различной формы, но одной и той же ёмкости — 3 л. Пользуясь графиками, найдите:

а) какое количество жидкости надо налить в каждый сосуд, чтобы уровень жидкости в них был одинаков;
б) сколько жидкости надо налить во второй сосуд, чтобы получить высоту уровня такую же, как в первом сосуде, когда в него налито 1,5 л жидкости.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Объясните друг другу, как вы рассуждали при выполнении задания, и изобразите схематически, какую примерно форму имеют эти сосуды.

291. Время, за которое маятник совершает полное колебание, т. е. из положения OA переходит в положение OC, а затем снова возвращается в положение OA (рис. 30), называется периодом колебания маятника. Изучая зависимость периода колебания маятника T от длины нити l, составили таблицу:

l, см	30	50	60	80	100
T, с	1,0	1,4	1,6	1,8	2,0

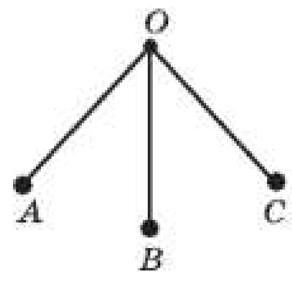


Рис. 30

Постройте график зависимости периода колебания маятника T от длины нити l.

292. Измеряя через каждую минуту температуру воды в баке в процессе нагревания, составили таблицу:

x, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y, °C	14	28	41	54	66	76	85	93	98	100	100

Постройте график зависимости $y(x)$ (масштаб: 1 см на оси x соответствует 1 мин, 1 см на оси y соответствует 10 °C). Используя график, ответьте на вопросы:

а) Какую температуру имела вода через 4 мин; через 5,5 мин, через 9 мин, через 9,7 мин после начала нагревания?

б) Через сколько минут после начала нагревания температура воды стала равной 41 °C; 60 °C; 99 °C?

в) В какой промежуток времени процесс нагревания происходил интенсивнее всего?

г) Через сколько минут после начала нагревания вода закипела?

д) Сколько секунд кипела вода?

е) В какое время температура воды стала равна 98 °C?

293. *(Для работы в парах.)* На рисунке 31 изображены графики зависимости тормозного пути автомобиля от скорости его движения на сухом асфальте (кривая OA), на мокром асфальте (кривая OB), при гололёде (кривая OC). Для каждого случая ответьте на вопросы:

а) чему равен тормозной путь автомобиля при скорости 50 км/ч;

б) с какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы его тормозной путь не превышал 60 м?

1) Выполните каждый задания а) и б).

2) Сравните полученные ответы. Исправьте ошибки, если они допущены.

3) Обсудите, насколько велико различие в тормозном пути на сухом и мокром асфальте.

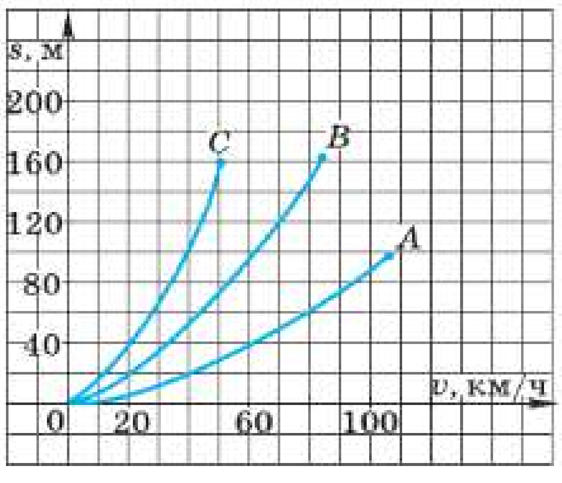


Рис. 31

П

294. Решите уравнение:

а) $3{,}7x - 2 = -2x + 3{,}13$;

б) $4{,}2x + 8 = 8 - 7x$;

в) $-27x = 5 - 54x$;

г) $x - 1 = 0{,}4x - 2{,}5$.

295. В автопарке было в 1,5 раза больше грузовых машин, чем легковых. После того как автопарк получил ещё 45 легковых автомашин, а 12 грузовых машин передал фермерам, в нём стало легковых машин на 17 больше, чем грузовых. Сколько всего автомашин было в автопарке?

296. Верно ли, что:

а) $6\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 6 > 0$;

б) $\left(5\frac{1}{6} - 5\frac{1}{12}\right) \cdot 12 - 6\frac{1}{3} : 3 > 0$;

в) $7 + 2424 : (11{,}8 + 0{,}2) + 2{,}3 < 200$;

г) $(3{,}08 - 2{,}16) : 8 - 0{,}17 \cdot 3 < 0$?

Контрольные вопросы и задания

1 Перечислите виды числовых промежутков.

2 Как найти расстояние между двумя точками? Приведите примеры.

3 Приведите пример функциональной зависимости одной переменной от другой. Укажите независимую и зависимую переменные, а также область определения функции.

4 Объясните на примере функции, заданной формулой $y = 6x + 12$: а) как по значению аргумента найти соответствующее значение функции; б) как найти значения аргумента, которым соответствует указанное значение функции.

5 Что называется графиком функции?

6 Покажите, как с помощью графика функции можно найти: а) значение функции, соответствующее заданному значению аргумента; б) значения аргумента, которым соответствует данное значение функции. Используйте для этого график функции, изображённый на рисунке 25 (см. с. 64).

§ 5 ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

15. Прямая пропорциональность и её график

Рассмотрим пример. Пусть V — объём железного бруска в кубических сантиметрах, m — его масса в граммах. Так как плотность железа равна 7,8 г/см^3, то $m = 7{,}8V$. Зависимость массы железного бруска от его объёма является примером функции, которая задаётся формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — число, отличное от нуля.

Такую функцию называют *прямой пропорциональностью*.

> **Определение.** Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — не равное нулю число.

Число k в формуле $y = kx$ называется коэффициентом прямой пропорциональности.

Из формулы $y = kx$, где $k \neq 0$, находим, что если x_1 и x_2 — значения аргумента, причём $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции, то $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$. Отсюда

$$\frac{y_1}{x_1} = k,\ \frac{y_2}{x_2} = k,\ \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2},$$

т. е. верна пропорция

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

С этим и связано название «прямая пропорциональность» в отличие от «обратной пропорциональности», с которой вы познакомитесь позже.

В повседневной жизни мы часто встречаемся с зависимостями между переменными, которые являются прямыми пропорциональностями.

Например, путь s км, пройденный автомобилем за t ч с постоянной скоростью 70 км/ч, вычисляется по формуле $s = 70t$, где $t > 0$, т. е. зависимость $s(t)$ является прямой пропорциональностью.

Например, стоимость p товара в рублях по цене 250 р. за килограмм вычисляется по формуле

$$p = 250x,$$

где x — масса товара в килограммах. Зависимость $p(x)$ также является прямой пропорциональностью.

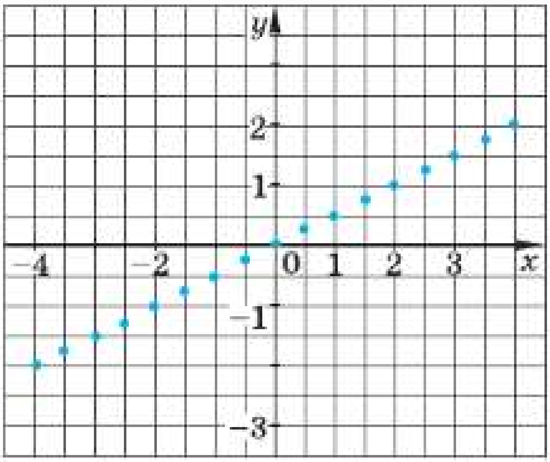


Рис. 32

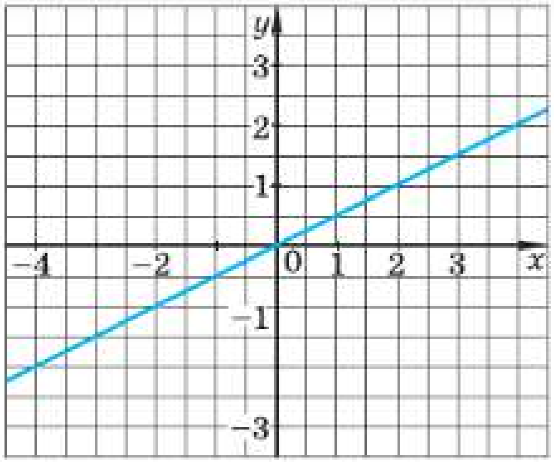


Рис. 33

Ещё один пример: длина окружности C вычисляется по формуле

$$C = 2\pi r,$$

где r — радиус окружности, π — число, приближённо равное 3,14.

Значит, зависимость $C(r)$ является прямой пропорциональностью (коэффициент пропорциональности здесь равен 2π).

Выясним, что представляет собой график прямой пропорциональности.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 0{,}5x$ и построим график этой функции.

▶ Область определения функции $y = 0{,}5x$ — множество всех чисел. Составим таблицу соответственных значений переменных x и y для некоторых значений аргумента x:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2

x	−0,5	−1	−1,5	−2	−2,5	−3	−3,5	−4
y	−0,25	−0,5	−0,75	−1	−1,25	−1,5	−1,75	−2

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице (рис. 32). Если приложить линейку, то можно заметить, что все отмеченные точки принадлежат некоторой прямой, проходящей через начало координат. Проведём эту прямую. Получим график функции $y = 0{,}5x$ (рис. 33). ◁

Рассуждая аналогично, можно построить, например, график функции $y = -1{,}5x$ (рис. 34). Этот график, так же как и график функции $y = 0{,}5x$, является прямой и проходит через начало координат.

Вообще,

> график прямой пропорциональности представляет собой прямую, проходящую через начало координат.

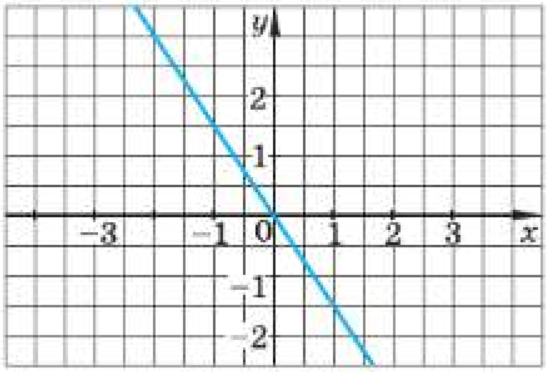


Рис. 34

Чтобы построить график функции $y = kx$, достаточно найти координаты какой-нибудь точки графика этой функции, отличной от начала координат, отметить эту точку и через неё и начало координат провести прямую.

П р и м е р 2. Построим график функции $y = 1{,}5x$.

▶ Пусть $x = 2$, тогда $y = 3$. Построим точку $A(2; 3)$ и через неё и начало координат проведём прямую. Эта прямая является графиком функции $y = 1{,}5x$ (рис. 35). ◁

Расположение графика функции $y = kx$ в координатной плоскости зависит от коэффициента k. Из формулы $y = kx$ находим, что если $x = 1$, то $y = k$. Значит, график функции $y = kx$ проходит через точку $(1; k)$. При $k > 0$ эта точка расположена в первой координатной четверти, а при $k < 0$ — в четвёртой. Отсюда следует, что при $k > 0$ график прямой пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ — во второй и четвёртой.

На рисунке 36 построены графики прямой пропорциональности при различных значениях k.

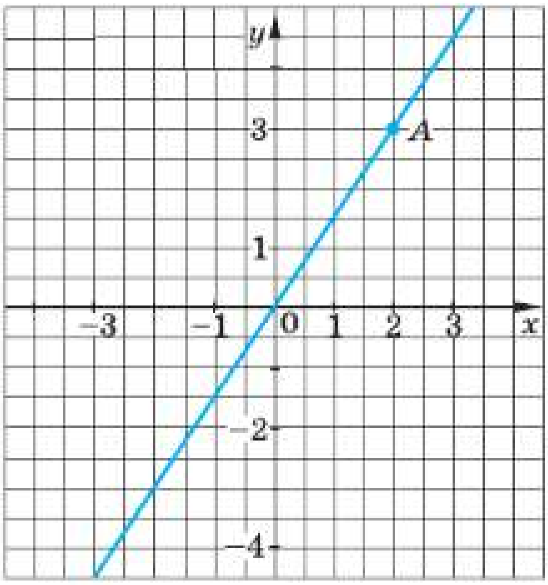


Рис. 35

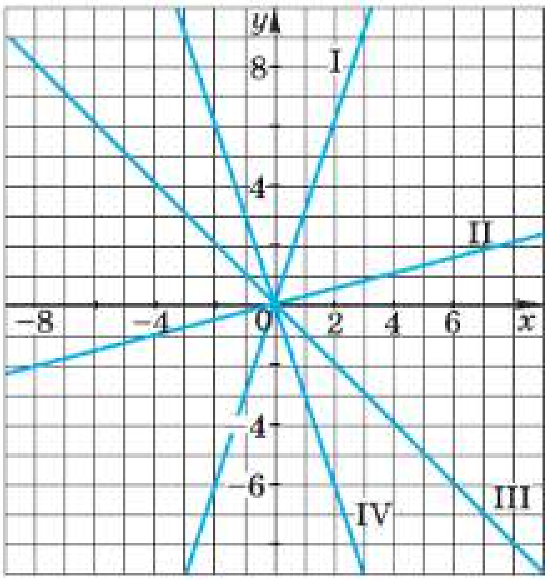


Рис. 36

Упражнения

297. Велосипедист движется равномерно со скоростью 12 км/ч. Напишите формулу, выражающую зависимость пройденного пути s (в километрах) от времени движения t (в часах). Является ли эта зависимость прямой пропорциональностью?

298. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

а) $y = -5x$; б) $y = 5x^2$; в) $y = \frac{x}{5}$; г) $y = x + 5$?

299. Прямая пропорциональность задана формулой $y = -\frac{1}{6}x$. Найдите значение y, соответствующее x, равному -9; 0; 1; 4.

300. Постройте график прямой пропорциональности, заданной формулой:

а) $y = 3x$; в) $y = x$; д) $y = 2{,}5x$;
б) $y = -1{,}5x$; г) $y = -x$; е) $y = -4{,}5x$.

301. *(Для работы в парах.)* Задайте формулой прямую пропорциональность, график которой симметричен графику функции $y = 9x$:

а) относительно оси x; б) относительно оси y.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения задания.

302. Постройте график функции, заданной формулой $y = -0{,}5x$. С помощью графика найдите:

а) значение y, соответствующее x, равному -2; 4; 1;
б) при каком x значение y равно -1; 0; $2{,}5$.

Существует ли такое x, при котором $y = -150$? Если существует, то вычислите его.

303. Принадлежат ли графику функции $y = -0{,}5x$ точки $A(0; 1)$, $B(-1; 0{,}5)$, $C(2; -1)$, $D(4; -2)$?

304. Известно, что график прямой пропорциональности проходит через точку $A(3; 21)$. Проходит ли этот график через точку $B(-7; -49)$; точку $C(-5; 3{,}5)$; точку $D(0{,}8; -5{,}6)$?

305. *(Для работы в парах.)* Покажите схематически, как расположен график функции, заданной формулой:

а) $y = 1{,}7x$; в) $y = 0{,}9x$; д) $y = kx$, где $k > 0$;
б) $y = -3{,}1x$; г) $y = -2{,}3x$; е) $y = kx$, где $k < 0$.

1) Распределите, кто выполняет задания а), б), а кто — задания в), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.
3) Обсудите, какой вид имеет график функции $y = kx$ в заданиях д) и е).

306. Для каждого графика прямой пропорциональности на рисунке 36 на с. 71 напишите соответствующую формулу.

307. Турист вышел из города и через x ч находился на расстоянии y км от него. Зависимость y от x показана в таблице:

x	0	0,5	1	2	2,5	3	3,5	4
y	0	2,1	4,0	7,9	10,1	12,1	14	16,1

В координатной плоскости отметьте эти точки и покажите с помощью линейки, что они расположены почти на прямой. Составьте формулу, которая приближённо выражает зависимость y от x.

308. На рисунке 37 построены графики движения пешехода (отрезок OB) и велосипедиста (отрезок OA). С помощью графиков ответьте на вопросы:

а) какое время был в пути пешеход и какое время — велосипедист;

б) какой путь проделал пешеход и какой путь проехал велосипедист;

в) с какой скоростью двигался пешеход и с какой — велосипедист;

г) во сколько раз путь, который проехал за 2 ч велосипедист, больше пути, пройденного за то же время пешеходом?

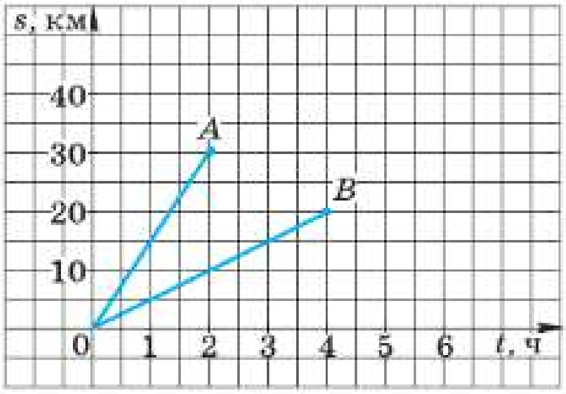


Рис. 37

309. На рисунке 38 изображён график зависимости удлинения y стальной проволоки от силы F, под действием которой проволока растягивается. Укажите границы изменения силы F, при которых зависимость удлинения проволоки от силы F является прямой пропорциональностью.

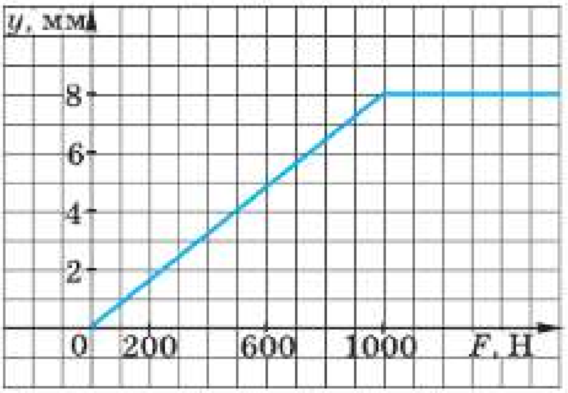
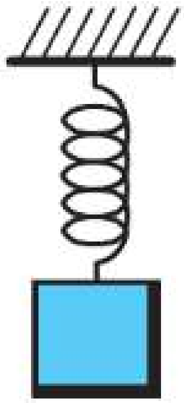


Рис. 38



310. Решите уравнение:

а) $1 - 1{,}7x - (0{,}8x + 2) = 3{,}4$; б) $5 - 0{,}2y = 0{,}3y - 39$.

311. Упростите выражение:

а) $-21(4 - 10a) - 54a$; б) $28 - 10d + 4(d + 18)$.

312. На координатной прямой (рис. 39) отмечено число a. Расположите в порядке возрастания числа $5a$; $-10a$; $a + 6$; $-a$; $\frac{a}{2}$; $-\frac{4}{a}$.

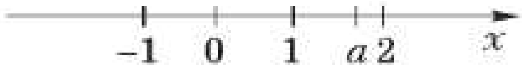


Рис. 39

16. Линейная функция и её график

Рассмотрим примеры функций.

Пример 1. На шоссе расположены пункты A и B, удалённые друг от друга на 20 км (рис. 40). Мотоциклист выехал из пункта B в направлении, противоположном A, со скоростью 50 км/ч. За t ч мотоциклист проедет $50t$ км и будет находиться от A на расстоянии $50t + 20$ км. Если обозначить буквой s расстояние (в километрах) мотоциклиста до пункта A, то зависимость этого расстояния от времени движения можно выразить формулой

$$s(t) = 50t + 20, \text{ где } t \geqslant 0.$$

Рис. 40

Пример 2. Ученик купил тетради по 30 р. за штуку и ручку за 50 р. Обозначим число купленных тетрадей буквой x, а стоимость покупки (в рублях) буквой y. Получим

$$y(x) = 30x + 50,$$

где x — натуральное число.

В обоих примерах мы встретились с функциями, заданными формулами вида

$$y = kx + b,$$

где x — независимая переменная, k и b — числа.

Такие функции называют *линейными функциями*.

Определение. Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

Прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. Действительно, при $b = 0$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = kx$, а этой формулой при $k \neq 0$ задаётся прямая пропорциональность.

Выясним, какой вид имеет график линейной функции.

Рассмотрим, например, функцию $y = 0{,}5x + 2$. Сравним значения функций

$$y = 0{,}5x + 2 \ \text{ и } \ y = 0{,}5x$$

при одних и тех же значениях x.

x	-4	-2	0	2	4	6
$0{,}5x$	-2	-1	0	1	2	3
$0{,}5x + 2$	0	1	2	3	4	5

Из приведённой таблицы и формул $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 2$ ясно, что для любого значения аргумента x значение функции $y = 0{,}5x + 2$ на 2 единицы больше значения функции $y = 0{,}5x$. Если график функции $y = 0{,}5x$ сдвинуть на 2 единицы вверх (т. е. в направлении оси y), то каждая точка $(x_0; y_0)$ графика функции $y = 0{,}5x$ перейдёт в точку $(x_0; y_0 + 2)$ графика функции $y = 0{,}5x + 2$. При этом любая точка графика функции $y = 0{,}5x + 2$ получается из соответствующей точки графика функции $y = 0{,}5x$.

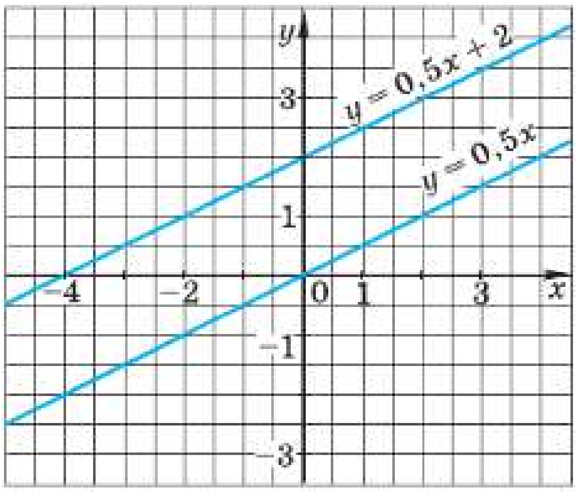


Рис. 41

Следовательно, график функции $y = 0{,}5x + 2$ есть прямая, параллельная графику функции $y = 0{,}5x$, проходящая через точку (0; 2) (рис. 41).

Аналогично можно показать, что графиком функции $y = 0{,}5x - 3$ является прямая, параллельная прямой $y = 0{,}5x$ и проходящая через точку (0; −3) (рис. 42 на с. 76). Вообще

график функции $y = kx + b$, где $k \neq 0$, есть прямая, параллельная прямой $y = kx$.

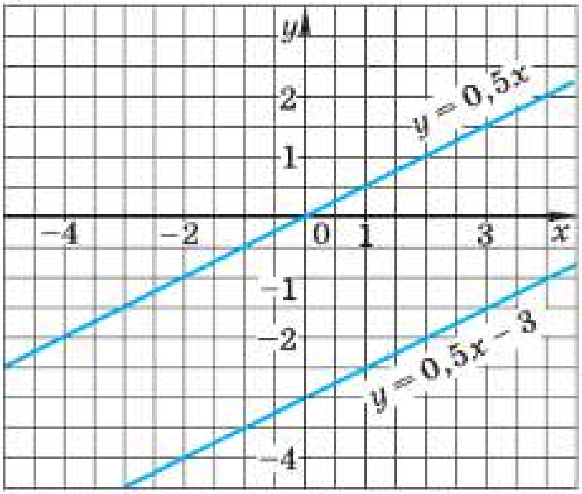


Рис. 42

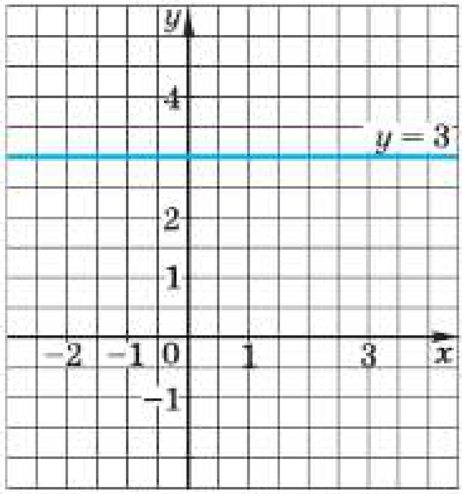


Рис. 43

Формула $y = kx + b$ при $k = 0$ принимает вид $y = b$. В этом случае графиком функции $y = kx + b$ является прямая, параллельная оси x при $b \neq 0$ или сама ось x при $b = 0$.

На рисунке 43 построен график функции $y = 3$.

Таким образом,

графиком линейной функции является прямая.

Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую.

Пример 3. Построим график функции $y = 2x + 3$.

▶ Функция $y = 2x + 3$ линейная, поэтому её графиком является прямая. Используя формулу $y = 2x + 3$, найдём координаты двух точек графика:
если $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$;
если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.
Отметим точки $A(-2; -1)$ и $B(1; 5)$. Проведём через эти точки прямую (рис. 44).

Прямая AB — график функции $y = 2x + 3$. ◁

При построении графика линейной функции часто бывает удобно в качестве одной из точек брать точку с абсциссой 0.

Пример 4. Построим график функции $y = -0,8x + 1$.

▶ Найдём координаты двух точек графика:
если $x = 0$, то $y = -0,8 \cdot 0 + 1 = 1$;
если $x = 5$, то $y = -0,8 \cdot 5 + 1 = -3$.
Отметим точки $M(0; 1)$ и $K(5; -3)$ и проведём через них прямую (рис. 45).
Прямая MK — график функции $y = -0,8x + 1$. ◁

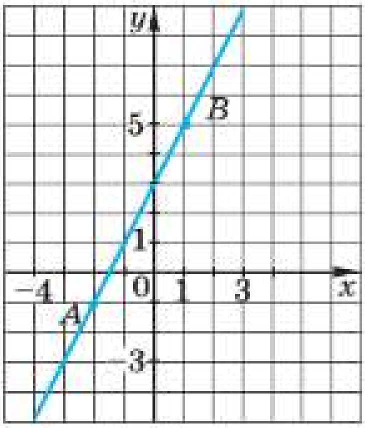


Рис. 44

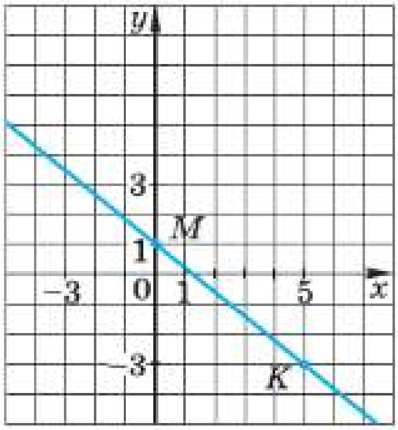


Рис. 45

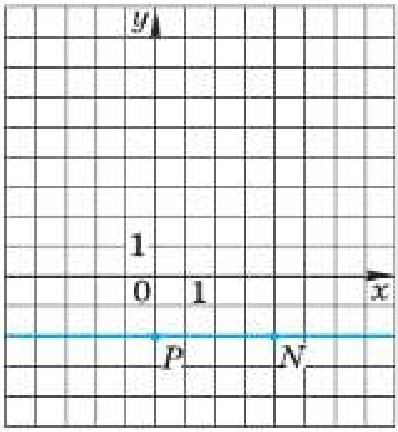


Рис. 46

П р и м е р 5. Построим график функции $y = -2$.

▶ Любому значению x соответствует одно и то же значение y, равное -2. Отметим две какие-нибудь точки с ординатой -2, например $P(0; -2)$ и $N(4; -2)$, и проведём через них прямую (рис. 46). Прямая PN — график линейной функции $y = -2$. ◁

Расположение графика функции $y = kx + b$ на координатной плоскости зависит от значений коэффициентов k и b.

На рисунке 47 изображены прямые, которые являются графиками линейных функций, заданных формулами вида $y = kx + b$ с одинаковыми коэффициентами при x и различными значениями b. Все эти прямые параллельны и наклонены к оси x под одним и тем же углом. Этот угол зависит от коэффициента k.

Число k называют *угловым коэффициентом прямой* — графика функции $y = kx + b$. Если $k > 0$, то угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x острый; если $k < 0$, то этот угол тупой. На рисунке 48 для каждого случая этот угол показан с помощью стрелки.

> Если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками двух линейных функций, различны, то эти прямые пересекаются, а если угловые коэффициенты одинаковы, то прямые параллельны.

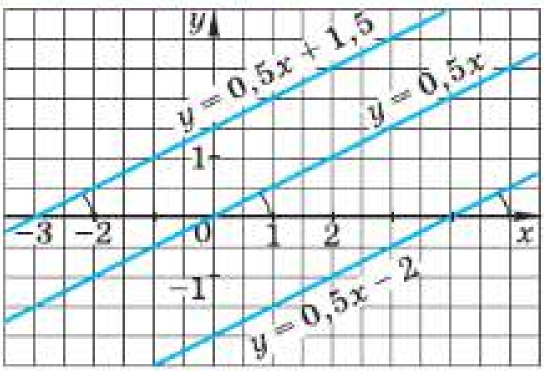


Рис. 47

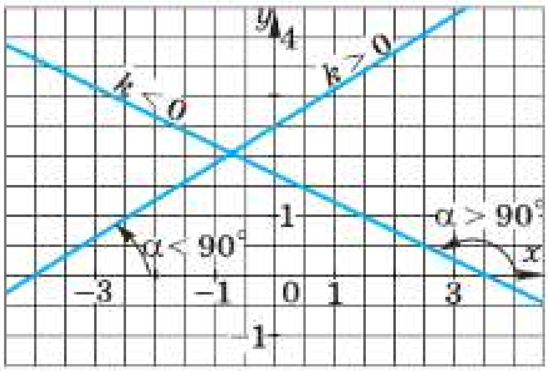


Рис. 48

Пример 6. Найдём координаты точки пересечения графиков функций $y = 2x - 3$ и $y = 9 - 4x$.

▶ Вычислим абсциссу точки пересечения графиков. Для этого решим уравнение $2x - 3 = 9 - 4x$. Получим $2x + 4x = 9 + 3$, $x = 2$. Чтобы найти ординату точки пересечения графиков функций, можно подставить $x = 2$ в любую из формул $y = 2x - 3$ или $y = 9 - 4x$. Подставим $x = 2$, например, в формулу $y = 2x - 3$, получим $y = 1$. Таким образом, графики функций $y = 2x - 3$ и $y = 9 - 4x$ пересекаются в точке $(2; 1)$. ◁

Из формулы $y = kx + b$ следует, что при $x = 0$ значение y равно b. Значит, график функции $y = kx + b$ пересекает ось y в точке с координатами $(0; b)$. На рисунке 49 изображены прямые, которые являются графиками функций, заданных формулами вида $y = kx + b$ с различными k и одним и тем же значением b. Все эти прямые пересекаются в одной точке, лежащей на оси y.

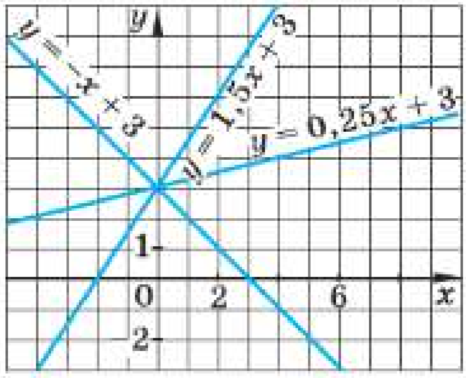


Рис. 49

Заметим, что если область определения линейной функции состоит не из всех чисел, то её график представляет собой соответствующую часть прямой. Например, это может быть полупрямая или отрезок.

Полученные знания помогут при построении более сложного графика, а именно, графика функции $y = |x|$.

Так как выражение $|x|$ имеет смысл при любом x, то областью определения этой функции является множество всех чисел. По определению $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Поэтому функцию $y = |x|$ можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График рассматриваемой функции при $x \geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y = x$, а при $x < 0$ — с графиком функции $y = -x$ (рис. 50).

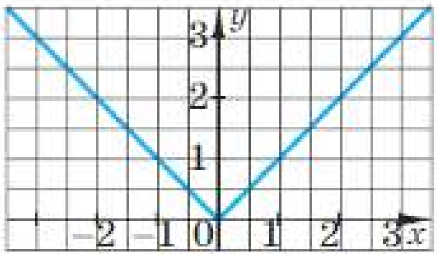


Рис. 50

Упражнения

313. Каждую секунду в бассейн поступает 0,5 м^3 воды. Сколько кубометров воды станет в бассейне через x с, если сейчас в нём 120 м^3 воды? Задайте формулой зависимость объёма воды в бассейне от времени его наполнения. Является ли эта зависимость линейной функцией?

314. Длина прямоугольника x см, а ширина на 3 см меньше. Задайте формулами зависимость периметра прямоугольника от его длины и зависимость площади прямоугольника от длины. Какая из этих зависимостей является линейной функцией?

315. Ученик имел 85 р. На эти деньги он купил x почтовых марок по 10 р. После покупки у него осталось y р. Задайте формулой зависимость y от x. Является ли эта зависимость линейной функцией?

316. Является ли линейной функция, заданная формулой:

а) $y = 2x - 3$;
в) $y = \frac{x}{2} + 1$;
д) $y = x^2 - 3$;
б) $y = 7 - 9x$;
г) $y = \frac{2}{x} + 1$;
е) $y = \frac{10x - 7}{5}$?

317. Линейная функция задана формулой $y = 0{,}5x + 6$. Найдите значение y, соответствующее $x = -12$; 0; 34. При каком x значение y равно -16; 0; 8?

318. Линейная функция задана формулой $y = -3x + 1{,}5$. Найдите:
а) значение y, если $x = -1{,}5$; 2,5; 4;
б) значение x, при котором $y = -4{,}5$; 0; 1,5.

319. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = -2x + 1$;
в) $y = -x + 4{,}5$;
д) $y = \frac{1}{2}x - 3$;
б) $y = 0{,}2x + 5$;
г) $y = x + 1{,}5$;
е) $y = -x - 3{,}5$.

320. *(Задача-исследование.)* Дана линейная функция $y = kx + 4$. При каком значении k график этой функции:
а) параллелен графику прямой пропорциональности $y = -x$;
б) не пересекает ось абсцисс;
в) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 3;
г) проходит через точку пересечения графиков функций $y = 12 - x$ и $y = x + 4$?
Обсудите ответы на поставленные вопросы.

321. Постройте график функции $y = -10x + 40$, выбрав масштаб: по оси x — в 1 см одна единица, по оси y — в 1 см 10 единиц. Найдите по графику:
а) значение y, соответствующее $x = -2{,}5$; 0,8; 3,5;
б) значение x, которому соответствует $y = 70$; -10; -30.

322. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = -2{,}4x + 9{,}6$;
в) $y = 1{,}2x + 6$;
б) $y = -0{,}7x - 28$;
г) $y = -5x + 2$.

323. В какой точке пересекает ось x график функции, заданной формулой:

а) $y = 0{,}4x - 12$; б) $y = -\frac{1}{3}x + 8$?

324. Не выполняя построения графика функции $y = 1{,}2x - 7$, выясните, проходит ли этот график через точку:
а) $A(100;\ 113)$; б) $B(-15;\ -25)$; в) $C(-10;\ 5)$.

325. В одной и той же координатной плоскости постройте графики функций $y = 6$, $y = 3{,}2$, $y = -1$, $y = -5$, $y = 0$.

326. В одной и той же координатной плоскости постройте графики функций $y = -2$, $y = -1{,}9$, $y = 1{,}6$, $y = 2$.

327. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:
а) $y = 10x - 8$ и $y = -3x + 5$; в) $y = 14x$ и $y = x + 26$;
б) $y = 14 - 2{,}5x$ и $y = 1{,}5x - 18$; г) $y = -5x + 16$ и $y = -6$.

328. График функции $y = -1{,}4x + b$ проходит через точку $(-4;\ 10)$. Найдите число b.

329. График функции $y = 5{,}2x + b$ проходит через точку $(-5;\ 1)$. Найдите число b.

330. График функции $y = kx + 2\frac{5}{8}$ проходит через точку $\left(8; -\frac{3}{8}\right)$. Найдите коэффициент k.

331. График функции $y = kx - 2\frac{3}{4}$ проходит через точку $\left(5; 1\frac{1}{4}\right)$. Найдите коэффициент k.

332. На рисунке 51 изображён график одной из линейных функций. Укажите эту функцию.
1. $y = -2x + 6$ 3. $y = x - 7$
2. $y = x + 7$ 4. $y = -x + 7$

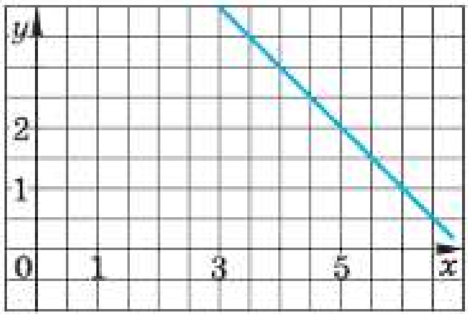
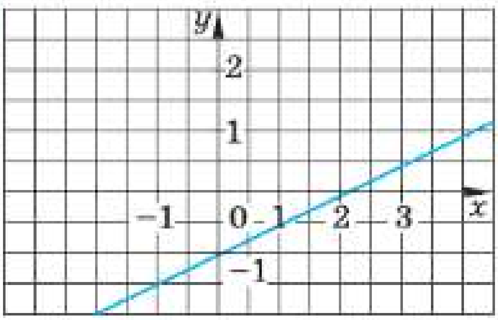
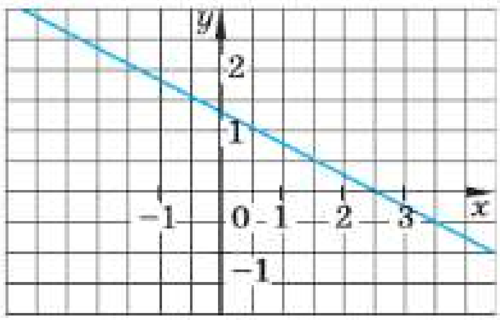


Рис. 51

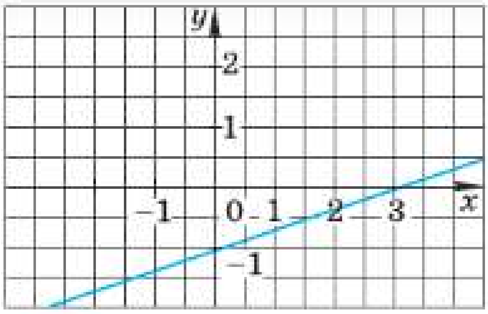
333. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.
а) $y = -x + 1$; в) $y = \frac{1}{2}x - 1$;

б) $y = \frac{1}{3}x - 1$; г) $y = -\frac{1}{2}x + 1{,}25$.

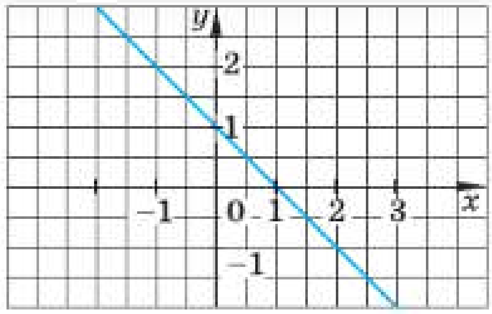
1.


2.


3.



4.



334. *(Для работы в парах.)* На рисунке 52 изображён график зависимости массы бидона с жидкостью от объёма жидкости. Найдите по графику:

а) массу пустого бидона;
б) массу бидона с одним литром жидкости;
в) массу одного литра жидкости;
г) объём жидкости в бидоне, если общая масса бидона с жидкостью равна 3 кг.

1) Выполните каждый задания а) и б).
2) Сравните полученные ответы. Исправьте ошибки, если они допущены.
3) Обсудите, как с помощью графика можно выполнить задания в) и г).

335. Из бака ёмкостью 12 л, наполненного доверху водой, равномерно вытекает вода. График зависимости V от t, где V — объём воды в баке (в литрах), а t — время вытекания воды (в минутах), построен на рисунке 53. Пользуясь графиком, найдите:

а) объём воды в баке через 3 мин;
б) время, через которое в баке осталось 4 л воды;
в) за какое время вытекла вся вода.

336. Дачник отправился из дома на автомобиле в посёлок. Сначала он ехал по шоссе, а затем по просёлочной дороге, сбавив при этом скорость. График движения дачника изображён на рисунке 54. Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:

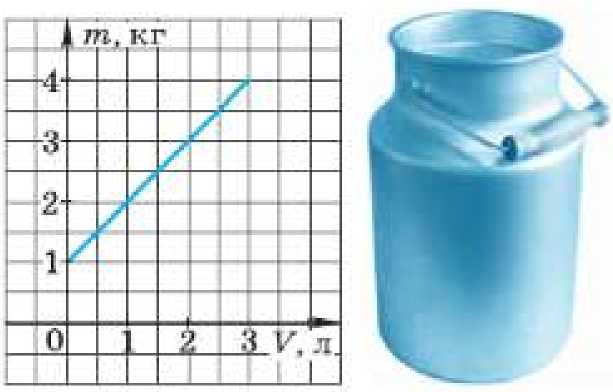


Рис. 52

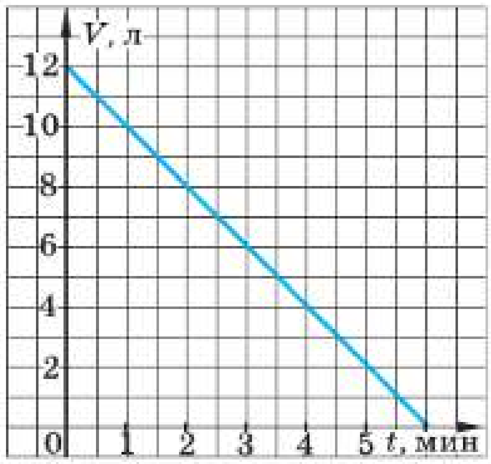


Рис. 53

а) сколько времени ехал дачник по шоссе и сколько километров по шоссе он проехал; какая скорость автомобиля была на этом участке пути;
б) сколько времени ехал дачник по просёлочной дороге и сколько километров он проехал по этой дороге; какова была скорость автомобиля на этом участке пути;
в) за какое время дачник проехал весь путь от дома до посёлка?

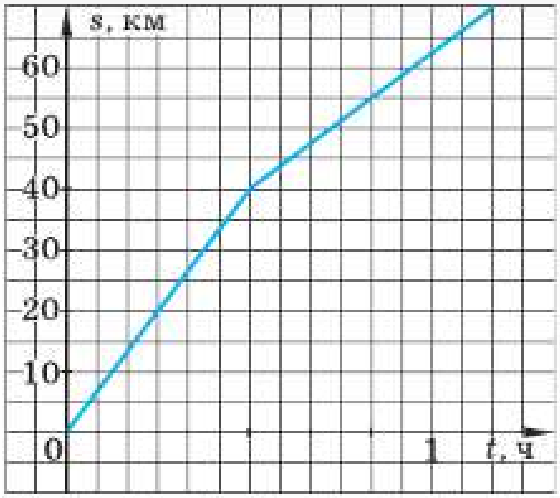


Рис. 54

337. В бак налили воду, температура которой 10 °С, и нагревали её до 100 °С, причём через каждую минуту температура повышалась на 1,5 °С. Задайте формулой зависимость температуры воды T (в градусах Цельсия) от времени нагревания t (в минутах). Постройте график этой зависимости. Узнайте по графику:

а) какую температуру имела вода через 5 мин; через 10 мин после начала нагревания;
б) через какое время вода нагрелась до 85 °С.

338. Группа туристов отправилась со станции на турбазу. Первые 2 ч они шли со скоростью 4,5 км/ч. Затем сделали привал на 1 ч. На оставшуюся часть пути они затратили полтора часа, проходя её со скоростью 6 км/ч. Постройте график движения.

339. *(Для работы в парах.)* На рисунке 55 изображены графики движения двух машин, следующих из города A в город B, расстояние между которыми 200 км. С помощью этих графиков ответьте на вопросы:

а) какое время была в пути первая машина; вторая машина;
б) какая машина начала своё движение раньше;
в) с какой скоростью двигалась каждая машина;
г) какая машина прибыла в город B раньше?

1) Распределите, кто отвечает на вопросы а), в), а кто — на вопросы б), г), и ответьте на них.
2) Проверьте друг у друга правильность ответов на поставленные вопросы.
3) Обсудите, что означает точка пересечения графиков.

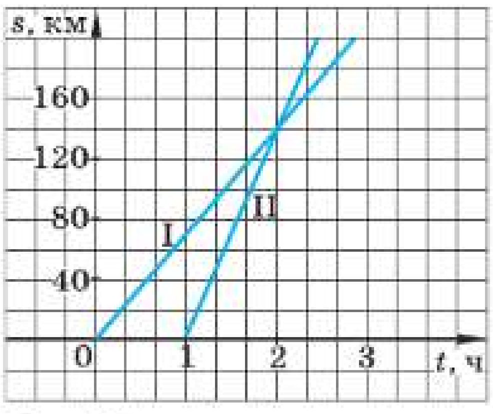


Рис. 55

П

340. Решите уравнение:
а) $3(0{,}9x - 1) - (x + 0{,}6) = -0{,}2$; б) $7 - (3{,}1 - 0{,}1y) = -0{,}2y$.

341. Три бригады изготовили 65 деталей. Первая бригада изготовила на 10 деталей меньше, чем вторая, а третья — 30% того числа деталей, которые изготовили первая и вторая бригады вместе. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

342. Запишите в виде выражения сумму трёх последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно: а) n; б) $n - 1$; в) $n + 4$. Упростите записанное выражение.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение прямой пропорциональности.
2. Что является графиком прямой пропорциональности? Как построить график прямой пропорциональности?
3. Как расположен в координатной плоскости график функции $y = kx$ при $k > 0$ и при $k < 0$?
4. Дайте определение линейной функции.
5. Что является графиком линейной функции? Как построить график линейной функции?
6. В каком случае графики двух линейных функций пересекаются и в каком случае они являются параллельными прямыми?
7. В какой точке график функции $y = kx + b$ пересекает ось ординат?
8. В каких координатных четвертях расположен график функции: $y = 6x$; $y = 0{,}5x + 4$; $y = 3x - 1$; $y = -3$?

Для тех, кто хочет знать больше

17. Кусочно-заданные функции

Ранее вы рассматривали только такие случаи, когда функция на всей области определения задавалась одной формулой. Однако нередко встречаются ситуации, когда область определения разбивается на промежутки и на каждом из них функция задаётся какой-либо формулой. О такой функции принято говорить, что это *кусочно-заданная функция*. Приведём примеры.

Пример 1. Турист первую часть пути от дома до станции шёл полтора часа со скоростью 6 км/ч. Затем полчаса он отдыхал, а после отдыха оставшуюся часть пути до станции он прошёл за один час со скоростью 5 км/ч.

Расстояние s (в километрах) от дома до места нахождения туриста является функцией времени t (в часах). Покажем, что эту функцию можно задать тремя формулами.

Когда время t изменяется от 0 до 1,5 ч, расстояние от туриста до дома равно $6t$ км, т. е. $s = 6t$, если $0 \leqslant t < 1{,}5$.

В период от 1,5 до 2 ч расстояние от туриста до дома остаётся неизменным — 9 км, т. е. $s = 9$, если $1{,}5 \leqslant t \leqslant 2$.

Когда время t изменяется от 2 до 3 ч, расстояние от туриста до дома равно $9 + 5(t - 2)$ км, т. е.

$$s = 5t - 1, \text{ если } 2 < t \leqslant 3.$$

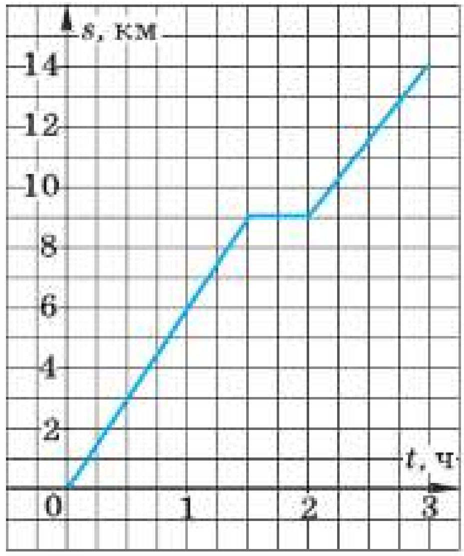


Рис. 56

Это можно записать короче:

$$s = \begin{cases} 6t, \text{ если } 0 \leqslant t < 1{,}5, \\ 9, \text{ если } 1{,}5 \leqslant t \leqslant 2, \\ 5t - 1, \text{ если } 2 < t \leqslant 3. \end{cases}$$

На рисунке 56 изображён график этой функции.

Пример 2. Построим график функции $y = x + 0{,}5|x|$.

▶ Освободимся от знака модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит,

$$y = x - 0{,}5x = 0{,}5x \text{ при } x < 0.$$

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$. Значит,

$$y = x + 0{,}5x = 1{,}5x \text{ при } x \geqslant 0.$$

Итак, данную функцию можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x < 0, \\ 1{,}5x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

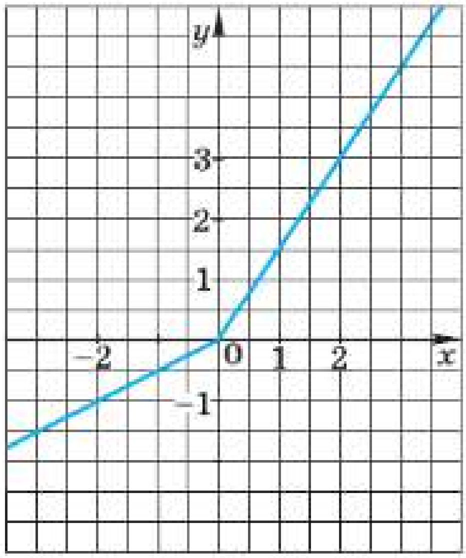


Рис. 57

На рисунке 57 изображён график этой функции. Он состоит из двух лучей. ◁

Пример 3. На рисунке 58 изображён равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, гипотенуза $AB = 4$ см. Отрезок MN, перпендикулярный AB,

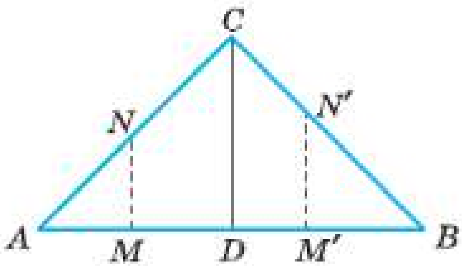


Рис. 58

движется так, что точка M перемещается от точки A до точки B. При этом длина отрезка AM, равная x см, изменяется от 0 до 4 см. Покажем, что площадь y (в квадратных сантиметрах) отсекаемой отрезком MN фигуры (треугольника AMN или четырёхугольника $AM'N'C$) является функцией длины отрезка, зададим эту функцию формулами и построим её график. При этом воспользуемся формулой площади треугольника $S=\frac{1}{2}ah$, где a — основание треугольника, h — его высота.

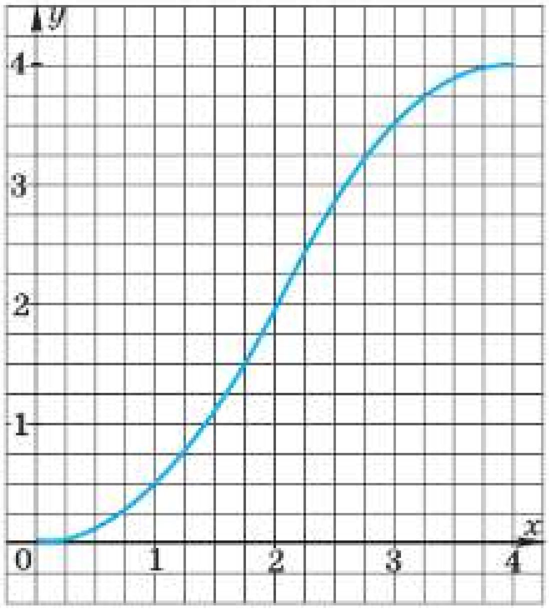


Рис. 59

▶Если переменная x изменяется от 0 до 2 (точка M перемещается от точки A до точки D), то отсекаемая фигура представляет собой треугольник AMN, площадь которого равна $\frac{1}{2}AM\cdot MN$, т. е. $y=\frac{1}{2}x^2$. Если же переменная x изменяется от 2 до 4 (точка M' перемещается от точки D до точки B), то отсекаемая фигура представляет собой четырёхугольник $AM'N'C$, площадь которого равна разности площади треугольника ABC и площади треугольника $M'N'B$, т. е. $y=4-\frac{1}{2}(4-x)^2$.

Легко понять, что каждому значению x, где $0\leqslant x\leqslant 4$, соответствует единственное значение y, т. е. зависимость y от x является функцией. Эту функцию можно задать следующим образом:

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4-\frac{1}{2}(4-x)^2, \text{ если } 2< x\leqslant 4.\end{cases}$$

Для построения графика составим таблицу:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
y	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	2	$2\frac{7}{8}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{8}$	4

Построив в координатной плоскости точки, координаты которых записаны в таблице, и соединив эти точки плавной линией, получим график рассматриваемой функции (рис. 59). ◁

З а м е ч а н и е. Задавая функцию $y = f(x)$ несколькими формулами, необходимо следить за тем, чтобы каждому значению x соответствовало единственное значение y. В противном случае такая зависимость не будет являться функцией. Например, зависимость

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 3, \\ 2x, & \text{если } x \geqslant 3 \end{cases}$$

не является функцией, так как в этом случае число 3 — общее значение переменной как для формулы $y = x$, так и для формулы $y = 2x$. Поэтому значению $x = 3$ соответствует не одно, а два значения y: $y_1 = 3$ и $y_2 = 6$.

П р и м е р 4. Построим график функции

$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leqslant 1, \\ x - 2, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

и определим, при каких значениях m, где m — некоторое число, прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки.

▶ График данной функции состоит из двух лучей (рис. 60). Из рисунка видно, что прямая $y = m$, которая на рисунке изображена пунктиром, имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при значениях m, удовлетворяющих неравенству: $-1 < m \leqslant 2$. ◁

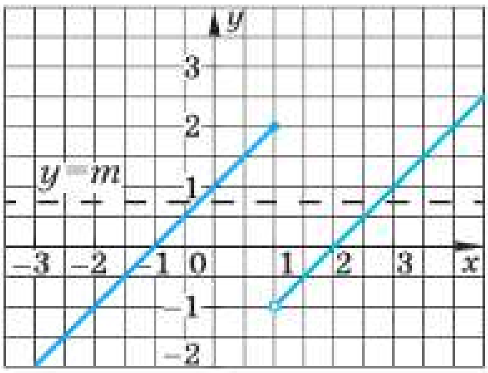


Рис. 60

Упражнения

343. Функция задана графиком (рис. 61). Задайте эту функцию аналитически, т. е. одной или несколькими формулами.

344. Из бака ёмкостью 20 л, заполненного водой (рис. 62), через открытый кран равномерно вытекает вода со скоростью 2 л в ми-

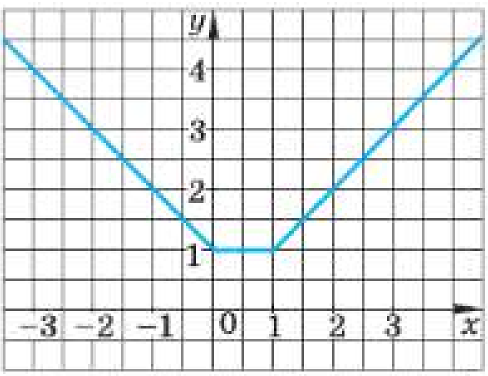


Рис. 61

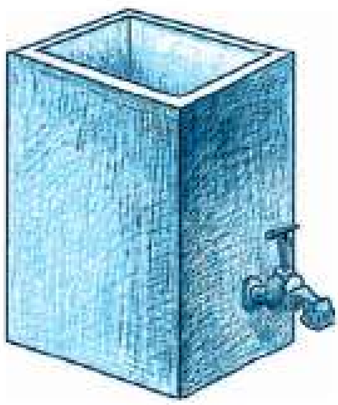


Рис. 62

нуту. Через кран может вытечь 0,9 всего объёма воды в баке, так как кран расположен выше дна бака. Объём воды V (в литрах) в баке зависит от времени x (в минутах), когда кран открыт. Задайте зависимость V от x аналитически, если известно, что кран был открыт в течение 12 мин.

345. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x < -1, \\ x, \text{ если } x \geqslant -1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } -1 \leqslant x < 1, \\ 3 - x, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$

346. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x-2, \text{ если } x < -1, \\ 2x+1, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ и график данной функции:

а) не имеют общих точек;

б) имеют ровно одну общую точку;

в) имеют ровно две общие точки.

347. Постройте график функции $y = \begin{cases} -x+1, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x-3, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ и график данной функции:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки.

348. Постройте график функции:

а) $y = 0,25|x| + 1$; б) $y = |x| + 0,5x$; в) $y = \dfrac{|x|}{x}(x-2)$.

349. Функция задана следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x + 2, \text{ если } x < 0, \\ x + 2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Задайте эту функцию одной формулой, используя знак модуля.

350. На рисунке 63 изображён график функции, область определения которой есть множество таких значений x, что $-2 \leqslant x \leqslant 6$. Задайте эту функцию аналитически.

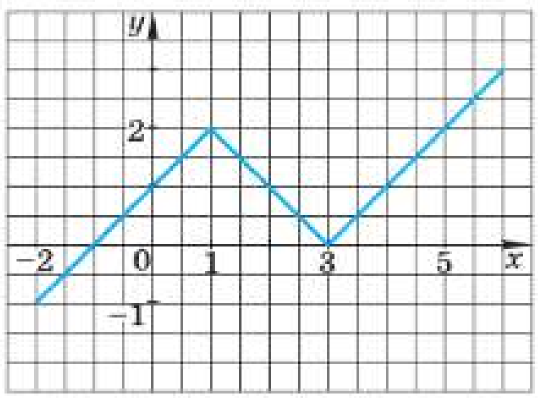


Рис. 63

351. Изменение температуры T (в градусах Цельсия) воды в баке описано с помощью формул:

$$T = \begin{cases} 4t + 20, \text{ если } 0 \leqslant t < 20, \\ 100, \text{ если } 20 \leqslant t \leqslant 30, \\ -\frac{1}{3}t + 110, \text{ если } 30 < t \leqslant 90. \end{cases}$$

Найдите значение T при $t = 10$; 20; 30; 45; 60; 90. Какой физический смысл имеет рассматриваемый процесс, когда $0 \leqslant t < 20$; когда $20 \leqslant t \leqslant 30$; когда $30 < t \leqslant 90$?

352. Пешеход, отправившийся из дома на прогулку, оказался через t ч на расстоянии s км от дома. Зависимость s от t задана тремя формулами:

$$s = \begin{cases} 6t, \text{ если } 0 \leqslant t < \frac{5}{6}, \\ 5, \text{ если } \frac{5}{6} \leqslant t \leqslant 1, \\ -5t + 10, \text{ если } 1 < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Найдите расстояние s при t, равном

0; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; 1; 1,5; 2.

353. На рисунке 64 изображён график движения автомобиля из пункта A в пункт B. Задайте эту функцию аналитически. С какой скоростью двигался автомобиль до остановки? С какой скоростью двигался автомобиль после остановки?

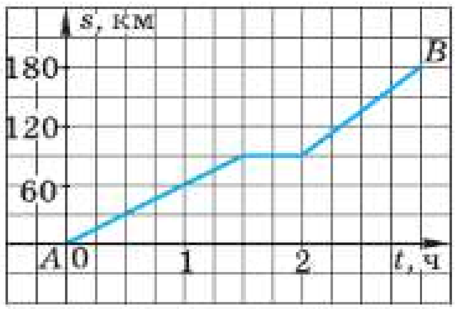


Рис. 64

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 4

354. Масса одного кубического сантиметра ртути равна 13,6 г. Масса V см^3 ртути равна m г. Задайте формулой зависимость:
а) $m(V)$; б) $V(m)$.

355. При делении числа y на число x в частном получается 5, а в остатке 10. Задайте формулой функцию $y(x)$. Какова область определения этой функции? Найдите две пары соответственных значений x и y.

356. Турист вышел с турбазы A в направлении железнодорожной станции B. На рисунке 65 дан график зависимости пути, пройденного туристом, от времени движения. Выясните: а) какое время затратил турист на путь из A в B; б) с какой средней скоростью двигался турист; в) сколько минут он затратил на первый привал и сколько затратил на второй привал; г) сколько километров турист прошёл за первый час движения и сколько за последний; д) какое время было затрачено туристом на первые 8 км и какое на последующие 8 км.

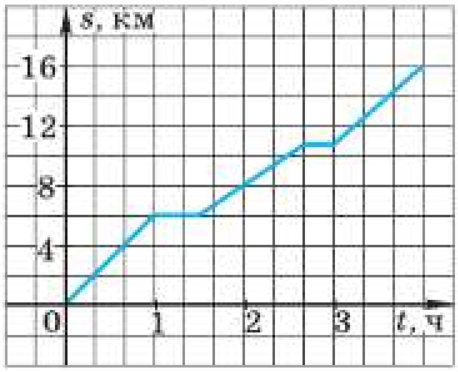


Рис. 65

357. Какова область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{7}{x^2 - 4}$; б) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$?

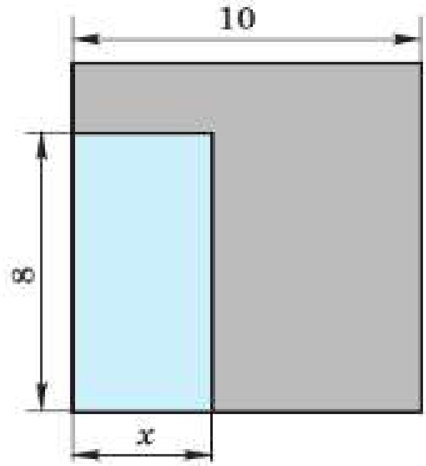


Рис. 66

358. Бригада по плану должна изготовить 150 деталей за смену. Однако она перевыполнила план на $x\%$. Составьте формулу, выражающую зависимость y от x, где y — число изготовленных бригадой деталей. Найдите по формуле:

а) значение y, если $x = 10$;
б) значение x, при котором $y = 180$.

359. Из квадрата со стороной 10 см вырезали прямоугольник со сторонами 8 см и x см (рис. 66). Обозначив площадь оставшейся части квадрата (в квадратных сантиметрах) буквой y, выразите зависимость $y(x)$ формулой. Найдите:

а) значение y, если $x = 2{,}5$; 4;
б) значение x, если $y = 20$; 36.

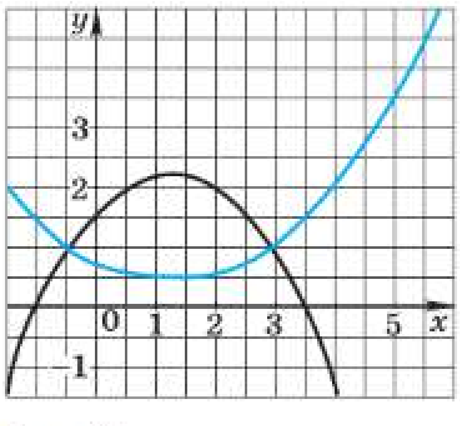


Рис. 67

360. На рисунке 67 чёрной линией изображён график первой функции, а цветной — график второй функции. При каких значениях аргумента значение первой функции:

а) равно значению второй;
б) больше значения второй;
в) меньше значения второй?

361. Рыболов пошёл из дома на озеро, где ловил рыбу. Затем он возвратился обратно. График движения рыболова показан на рисунке 68. Узнайте по графику:

а) каково расстоние от дома до озера;

б) сколько часов шёл рыблов до озера и сколько часов он затратил на обратный путь;

в) сколько часов рыболов был на озере;

г) на каком расстоянии от дома был рыболов через 1 ч после выхода из дома;

д) через сколько часов после выхода рыболов был на расстоянии 6 км от дома;

е) какова средняя скорость рыболова на пути к озеру и какова на обратном пути.

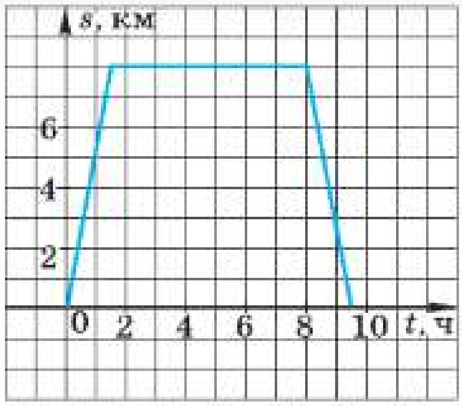


Рис. 68

362. Изучая зависимость объёма V жидкости в сосуде от высоты h её уровня, получили таблицу:

h, см	3	6	9	12	15	18
V, л	1,2	3,1	5,6	9,7	14,7	21

Постройте график функции V от h. Узнайте по графику:

а) сколько литров жидкости налили в сосуд, если высота уровня стала равной 5 см; 10 см;

б) какой будет высота уровня жидкости в сосуде, если в него налить 4 л; 10 л.

363. Из анализа журнала посещаемости бассейна в утреннее время с 8 до 12 часов в течение недели была получена следующая информация. В понедельник было 19 посетителей, а во вторник на 11 человек больше. В среду было на 10% больше, чем во вторник. В четверг было 25 посетителей, а в пятницу на 20% больше, чем в четверг. В воскресенье число посетителей было на 6 человек больше, чем в субботу, и равнялось 30. По данному описанию постройте график зависимости числа посетителей бассейна по дням недели, соединив соседние точки отрезками.

364. Токарь в течение семи дней выполнял заказ по изготовлению деталей в соответствии с заданием, выданным ему бригадиром

в начале первого рабочего дня. В понедельник он потратил часть рабочего времени на изучение чертежей и изготовил всего 47 деталей, что было наименьшим показателем за все оставшиеся рабочие дни. Во вторник он изготовил на 13 деталей больше, а в среду на 15% больше, чем во вторник. В четверг часть рабочего времени была потрачена им на заточку резцов, поэтому деталей было изготовлено на 8 меньше, чем в среду. В пятницу был сокращённый рабочий день, и токарь изготовил на 4 детали меньше, чем в четверг. В следующий понедельник было сделано на 8 деталей больше, чем в пятницу, а во вторник он выполнил заказ полностью, изготовив максимальное количество деталей за все семь рабочих дней, — на 15 деталей больше, чем в пятницу.
По описанию постройте график зависимости числа изготовленных деталей от номера рабочего дня. Соседние точки соедините отрезками.

К параграфу 5

365. Постройте график функции, выбрав соответствующий масштаб:
а) $y = 100x$; б) $y = 0{,}02x$.

366. Какое расстояние y (в километрах) проедет велосипедист за x ч, если будет двигаться равномерно со скоростью 15 км/ч? Постройте график зависимости y от x (масштаб по оси x: в 1 см — 15 км; по оси y: в 1 см — 1 ч). С помощью графика ответьте на вопросы:
а) какой путь проедет велосипедист за 3 ч; за 3 ч 40 мин;
б) сколько времени затратит велосипедист на путь в 50 км?

367. Является ли линейной функция, заданная формулой:
а) $y = \dfrac{4x - 7}{2}$;
б) $y = 3(x + 8)$;
в) $y = x(6 - x)$;
г) $y = x(9 - x) + x^2$?

368. Функция задана формулой $y = 0{,}2x - 4$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -25; -12; 45; 60. При каком значении аргумента значение функции равно 0; 1? Существует ли такое значение x, при котором:
а) значение функции равно значению аргумента;
б) значение функции противоположно значению аргумента?

369. Зная, что зависимость y от x является линейной функцией, заполните таблицу, перечертив её в тетрадь.

а)

x	-2	0	2	4	6
y		-8	12		

б)

x		-10	0	10	30	
y	-15		5	6		15

370. В таблице указаны некоторые значения аргумента и соответствующие им значения линейной функции. Подберите формулу, которой можно задать эту функцию.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	11	21	31	41	51	61	71

371. Масса одного гвоздя равна 5 г, а масса пустого ящика равна 400 г. Какова масса m (в граммах) ящика, в котором лежит x гвоздей? Составьте формулу, выражающую зависимость m от x. Является ли функция, заданная этой формулой, линейной?

372. При каком значении a точка $A(a; -1{,}4)$ принадлежит графику прямой пропорциональности $y = 3{,}5x$?

373. Функция задана формулой $y = \frac{1}{4}x + 3$, где $-4 \leqslant x \leqslant 8$. Постройте график этой функции. Какие целые значения может принимать эта функция?

374. Скорость распространения звука в воздухе в зависимости от температуры воздуха может быть найдена приближённо по формуле $v = 331 + 0{,}6t$, где v — скорость (в метрах в секунду), t — температура (в градусах Цельсия). Найдите, с какой скоростью распространяется звук в зимний день с температурой $-35\,^\circ$C и в летний день с температурой $+30\,^\circ$C.

375. Пересекает ли ось x график линейной функции и если пересекает, то в какой точке:

а) $y = 100 - 25x$; в) $y = 200x$; д) $y = -15$;
б) $y = 7x + 49$; г) $y = -75x$; е) $y = 15$?

376. Постройте схематически график функции $y = kx + b$, если:

а) $k > 0$; $b > 0$; в) $k < 0$; $b > 0$;
б) $k > 0$; $b < 0$; г) $k < 0$; $b < 0$.

377. Покажите схематически в одной координатной плоскости, как расположены графики функций $y = ax$ и $y = bx$, если:

а) $a > 0$, $b > 0$ и $a > b$;
б) $a < 0$, $b < 0$ и $|a| < |b|$.

378. График линейной функции, заданной формулой вида $y = kx + 1$, параллелен графику функции $y = -0{,}4x$. Найдите значение коэффициента k и выясните, принадлежит ли этому графику точка $M(50; -19)$.

379. Задайте формулой линейную функцию, графиком которой служит прямая, проходящая через точку $A(2; 3)$ и параллельная графику функции $y = 1{,}5x - 3$. Постройте её график.

380. График линейной функции — прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $M(5; 8)$. Задайте эту функцию формулой.

381. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = 4x + 9$ и $y = 6x - 5$;

б) $y = 16x - 7$ и $y = 21x + 8$;

в) $y = 10x - 7$ и $y = 5$;

г) $y = 0{,}1x$ и $y = 14$.

382. Графики линейных функций $y = 3x + 2$, $y = -2x + 3$ и $y = 0{,}5x - 2$ ограничивают треугольник. Лежит ли начало координат внутри этого треугольника?

383. На рисунке 69 изображены прямые AB и CD — графики двух линейных функций.

а) Из трёх точек $M(-2; 3)$, $N(-4; 2)$, $P(-2; 5)$ выберите ту, через которую прямая AB проходить заведомо не может.

б) Даны точки $K(-6; 5)$, $P(-3; 1)$, $Q(3; 4)$, $M(4; 0)$, $N(0; 1)$, $F(2; 2)$, $L(-6; 1)$. Выберите из них те, которые лежат выше прямой AB и ниже прямой CD.

в) Укажите приближённо координаты точки пересечения прямых AB и CD.

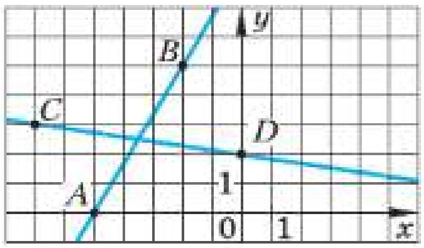


Рис. 69

384. На рисунке 70 изображены прямые AB и CD — графики двух линейных функций. Найдите:

а) координаты трёх точек, которые лежат ниже прямой AB;

б) координаты трёх точек, которые лежат выше прямой CD;

в) координаты точки пересечения прямых AB и CD.

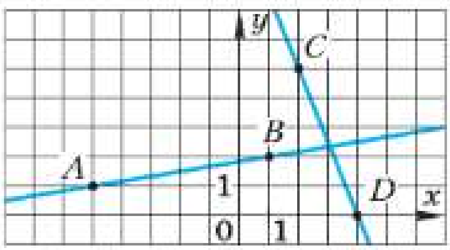


Рис. 70

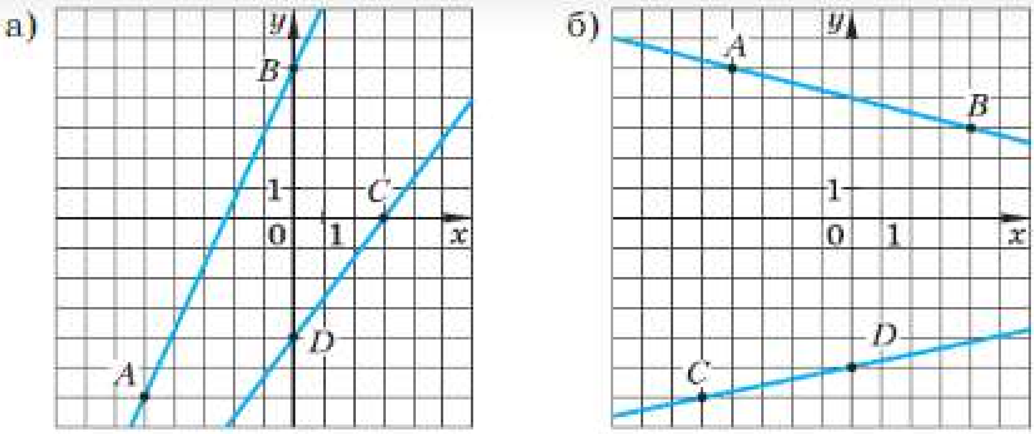


Рис. 71

385. На рисунке 71, *а* и *б* изображены прямые — графики двух линейных функций. Каким из приведённых ниже уравнений задаётся прямая AB, а каким — прямая CD?

1. $y = 2{,}2x + 5$ 2. $y = 0{,}6x - 3$

3. $y = \frac{4}{3}x - 4$ 4. $y = -0{,}25x + 4$

5. $y = 2x - 7$ 6. $y = 0{,}2x - 5$

Глава III СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вы уже знакомы с понятием степени с натуральным показателем. Теперь вы изучите свойства степеней с натуральными показателями, научитесь выполнять умножение и деление степеней, возведение степени в степень. В повседневной жизни вам пригодится умение выполнять возведение в степень с помощью калькулятора. В этой главе вы впервые встретитесь с понятием одночлена, правилами умножения одночленов и возведения одночлена в степень. Вы продолжите изучение функций — познакомитесь со свойствами и графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$, получите первые представления о графическом способе решения уравнений.

§ 6 СТЕПЕНЬ И ЕЁ СВОЙСТВА

18. Определение степени с натуральным показателем

Произведение нескольких одинаковых множителей можно записать в виде выражения, называемого степенью. Например:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7.$$

Повторяющийся множитель называют *основанием степени*, а число повторяющихся множителей — *показателем степени*.

Так, в выражении 5^7 число 5 — основание степени, а число 7 — показатель степени.

Определение. Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a. Степенью числа a с показателем 1 называется само число a.

Запись a^n читается так: «a в степени n», «n-я степень числа a». По определению степени

$$a^1 = a, \quad a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad a^4 = aaaa.$$

Вообще $a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}}$.

Нахождение значения степени называют *возведением в степень*. Приведём примеры возведения в степень:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81; \quad 0^2 = 0.$$
$$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216; \quad 9^1 = 9.$$

Использование степеней делает выражение более компактным, «обозримым». Например, в справочниках можно увидеть, что масса Земли равна $5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг. Если бы мы не использовали в записи степень, то вынуждены были бы записать необозримое число с очень большим количеством цифр:

5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг.

При возведении в степень положительного числа получается положительное число; при возведении в степень нуля получается нуль.

При возведении в степень отрицательного числа может получиться как положительное число, так и отрицательное. Например:

$$(-2)^1 = -2;$$
$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4;$$
$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8;$$
$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16.$$

Степень отрицательного числа с чётным показателем — положительное число.
Степень отрицательного числа с нечётным показателем — отрицательное число.

Действительно, произведение чётного числа отрицательных множителей положительно, а произведение нечётного числа отрицательных множителей отрицательно.

Квадрат любого числа есть положительное число или нуль, т. е. $a^2 \geqslant 0$ при любом a.

При вычислении значений числовых выражений, не содержащих скобки, принят следующий порядок действий: сначала выполняют возведение в степень, затем умножение и деление, далее сложение и вычитание.

Вычислим значения выражений, содержащих степени.

Пример 1. Найдём значение выражения $4 \cdot 10^3$.

▶ 1) $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$; 2) $4 \cdot 1000 = 4000$.
Значит, $4 \cdot 10^3 = 4000$. ◁

Пример 2. Найдём значение выражения $-2^6 + (-3)^4$.

▶ 1) $2^6 = 64$; 2) $-2^6 = -64$; 3) $(-3)^4 = 81$; 4) $-64 + 81 = 17$.
Значит, $-2^6 + (-3)^4 = 17$. ◁

Рассмотрим теперь, как находят значение степени с помощью калькулятора.

Пример 3. Найдём с помощью калькулятора значение степени $2{,}7^5$.

▶ Так как степень $2{,}7^5$ есть произведение пяти множителей, каждый из которых равен 2,7, то вычисления можно провести по схеме

$$2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{=}.$$

Однако калькулятор позволяет вычислять значение степени проще, не набирая повторно основание степени и знак умножения. В нашем примере достаточно ввести число 2,7, нажать клавишу $\boxed{\times}$ и 4 раза нажать клавишу $\boxed{=}$. Получим более удобную схему вычислений:

$$2{,}7 \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=}.$$

В результате вычислений найдём, что $2{,}7^5 = 143{,}48907$. ◁

Упражнения

386. Запишите произведение в виде степени:

а) $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9$; г) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{25\ \text{раз}}$; ж) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$;

б) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$; д) $ccccccc$; з) $(a - b)(a - b)$;

в) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; е) $\underbrace{yy \ldots y}_{12\ \text{раз}}$; и) $(xy)(xy)(xy)(xy)$.

387. Назовите основание и показатель степени:

а) $3{,}5^4$; б) $(-0{,}1)^3$; в) $(-100)^4$; г) $(-a)^6$; д) $\left(\frac{1}{2}x\right)^5$.

Используя определение степени, представьте степень в виде произведения.

СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ЛЕБЕДЕВ (1902—1974) — советский учёный в области электротехники и вычислительной техники, академик. Под его руководством созданы первая в СССР ЭВМ и лучшие советские ЭВМ серии БЭСМ.

388. Выполните возведение в степень:

а) 2^4; в) 5^3; д) $(7,8)^2$; ж) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; и) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$;

б) 4^2; г) 3^5; е) $(-1,5)^3$; з) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$; к) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$.

389. Найдите значение степени:

а) 25^2; в) 7^3; д) $(-0,9)^3$; ж) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; и) $-0,9^3$;

б) 8^4; г) 7^5; е) $(-2,4)^2$; з) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$; к) $-2,4^2$.

390. Вычислите с помощью калькулятора:

а) $4,15^3$; б) $(-0,98)^5$; в) $1,42^6$; г) $2,08^3 : 1,56$; д) $1,67^4 \cdot 8,3$.

391. Найдите с помощью калькулятора значение выражения:

а) $8,49^4$; б) $(-1,062)^3$; в) $2,73^5 \cdot 27,4$; г) $(1,39 + 7,083)^3$.

392. Перечертите в тетрадь таблицу и заполните её.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

393. Представьте:

а) в виде квадрата число: 0,81; 0,16; 144; $\frac{25}{169}$; $1\frac{24}{25}$; 0,0004;

б) в виде куба число: 64; −216; 0,008; $-\frac{1}{64}$; $4\frac{17}{27}$;

в) в виде степени десяти число: 10; 100; 1000; 1 000 000;

г) в виде степени пяти число: 125; 625; 15 625.

394. Представьте в виде квадрата или куба число:

а) 8; б) 81; в) 125; г) 64; д) 0,001; е) $3\frac{3}{8}$; ж) $1\frac{11}{25}$.

395. Сравните:

а) 71^2 и 0; в) $(-5,9)^3$ и $(-5,9)^2$;
б) $(-25)^3$ и 0; г) $(-2,3)^{12}$ и $(-8,6)^{19}$.

396. Выполните действия:

а) $7 \cdot 5^2$; в) $(-0,4)^3$; д) $-3 \cdot 2^5$;
б) $(7 \cdot 5)^2$; г) $-0,4^3$; е) $-6^2 \cdot (-12)$.

397. Найдите значение выражения, используя таблицу квадратов:

а) $34^2 - 175$; в) $42^2 \cdot 9$; д) $75^2 + 25^2$;
б) $605 + 78^2$; г) $18^2 : 27$; е) $59^2 - 36^2$.

398. Вычислите:

а) $9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$; в) $(-10)^6$; д) $4 \cdot 5^3$; ж) $-2^4 \cdot 15$;

б) $\left(9 \cdot \frac{5}{6}\right)^2$; г) -10^6; е) $-5 \cdot 2^5$; з) $2700 \cdot (-0,1)^3$.

399. Выполните действия:

а) $7^2 + 3^3$; в) $(6+8)^2$; д) $(10-3)^2$; ж) $11 - 3^4$;

б) $6^2 + 8^2$; г) $10^2 - 3^2$; е) $2^4 - 3^2$; з) $(6-8)^5$.

400. Вычислите:

а) $-1^3 + (-2)^3$; г) $10 - 5 \cdot 2^4$; ж) $3^4 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$;

б) $-6^2 - (-1)^4$; д) $2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 2^4$; з) $0,2 \cdot 3^3 - 0,4 \cdot 2^4$;

в) $-8^3 + (-3)^3$; е) $2 \cdot 5^3 + 5 \cdot 2^3$; и) $8 \cdot 0,5^3 + 25 \cdot 0,2^2$.

401. Найдите значение выражения:

а) $3 \cdot 10^4$; б) $5 \cdot 10^6$; в) $1,345 \cdot 10^{12}$; г) $23,49 \cdot 10^9$.

402. Представьте число в виде произведения числа, большего 1, но меньшего 10, и степени с основанием 10:

а) 200 000 000 000; в) 650 000 000 000 000 000 000 000;

б) 53 000 000 000 000 000 000; г) 234 570 000 000 000 000 000 000.

403. Заполните пропуски в таблице.

Площадь бассейна реки Амур	1 856 000 км^2	$1,856 \cdot 10^6$ км^2
Площадь поверхности Земли		$5,101 \cdot 10^8$ км^2
Расстояние от Земли до Луны	384 400 км	
Объём воды в Чёрном море		$5,55 \cdot 10^5$ км^3
Масса Марса	618 000 000 000 000 000 000 000 кг	

404. Найдите значение выражения:

а) $0,01y^4$ при $y = -2$; 2; -3; 3; -10; 10;

б) $2c^2 + 3$ при $c = -11$; 11; 0; -15; 15.

405. Чему равны значения выражений:

а) x^2; $-x^2$; $(-x)^2$ при $x = -9$; 9; -6; 6; -2; 2;

б) x^3; $-x^3$; $(-x)^3$ при $x = -4$; 4; -3; 3; -1; 1?

406. Вычислите значение выражения $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ при $x = -1$; 0; 10.

Рис. 72

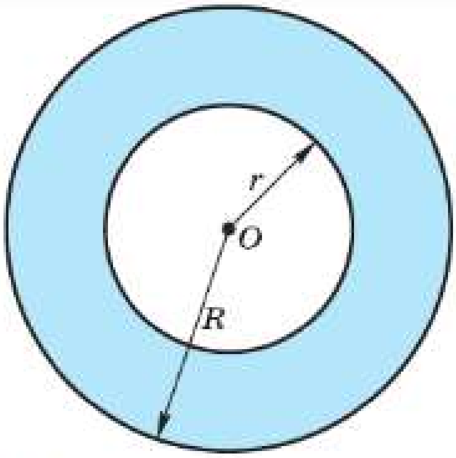


Рис. 73

407. Окно в старинном особняке имеет форму прямоугольника, завершающегося полукругом (рис. 72). Составьте формулу для вычисления его площади S (в квадратных сантиметрах), если известно, что основание прямоугольника равно a см, высота прямоугольника в полтора раза больше основания. Найдите площадь окна, если $a = 80$. (Указание. Площадь круга равна πr^2, где r — радиус круга, $\pi \approx 3{,}14$.)

408. Составьте формулу для вычисления площади кольца, изображённого на рисунке 73. Найдите площадь кольца, если $R = 6{,}4$ см, $r = 3{,}6$ см.

409. *(Задача-исследование.)* Найдите всевозможные значения a, где a — натуральное число, при которых число 90 является наименьшим общим кратным чисел 15 и a.

1) Разложите на простые множители каждое из чисел 90 и 15.
2) Обсудите, какие множители должны входить в разложение числа a.
3) Сделайте вывод о значениях числа a.

410. Представьте произведение в виде степени с основанием a:
а) a^3a; б) a^4a^2; в) a^3a^6; г) $a^{20}a^{12}$.

411. Объясните, почему при любых значениях переменной x значения выражений $4x^2$ и $(x - 8)^2$ являются неотрицательными числами.

412. *(Для работы в парах.)* Даны выражения:

$$a^2 + 1, \quad -a^4, \quad 3 + (5 - a)^2, \quad -a - a^3, \quad -a^2 + 8,$$
$$3a + 4, \quad a^4 + a^2 + 8, \quad -a^6 - 4a^8 - 1, \quad -7a - 4, \quad -a^8 - 9.$$

Какие из этих выражений принимают:
а) только положительные значения;
б) только отрицательные значения?