421. Разложите на множители выражение:

а) $3+\sqrt{3}$; г) $a-5\sqrt{a}$; ж) $\sqrt{14}-\sqrt{7}$;

б) $10-2\sqrt{10}$; д) $\sqrt{a}-\sqrt{2a}$; з) $\sqrt{33}+\sqrt{22}$.

в) $\sqrt{x}+x$; е) $\sqrt{3m}+\sqrt{5m}$;

422. Сократите дробь:

а) $\dfrac{b^2-5}{b-\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$; д) $\dfrac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$;

б) $\dfrac{m+\sqrt{6}}{6-m^2}$; г) $\dfrac{b-9}{\sqrt{b}+3}$; е) $\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4x-9y}$.

423. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt{x}-5}{25-x}$; д) $\dfrac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{5}-a}{5-a^2}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$; е) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$.

424. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{x}{\sqrt{5}}$; г) $\dfrac{a}{b\sqrt{b}}$; ж) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{3}{\sqrt{b}}$; д) $\dfrac{4}{\sqrt{a+b}}$; з) $\dfrac{8}{3\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{2}{7\sqrt{y}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}$; и) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$.

425. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{m}{\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{3}{5\sqrt{c}}$; д) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$; е) $\dfrac{5}{4\sqrt{15}}$.

426. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; д) $\dfrac{33}{7-3\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; е) $\dfrac{15}{2\sqrt{5}+5}$.

427. Докажите, что значение выражения:

а) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}-4}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}+4}$ есть число рациональное;

б) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}-\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$ есть число иррациональное.

428. Между какими последовательными целыми числами заключено значение выражения:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$; г) $\dfrac{5+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$?

429. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{x}{x+\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; д) $\dfrac{9}{3-2\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{b}{a-\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{12}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; е) $\dfrac{14}{1+5\sqrt{2}}$.

430. Докажите, что:

а) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}=0{,}2\sqrt{15}$; б) $\sqrt{\dfrac{2}{a}}=\dfrac{1}{a}\sqrt{2a}$.

431. Докажите, что числа $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ являются взаимно обратными, а числа $2\sqrt{6}-5$ и $\dfrac{1}{2\sqrt{6}+5}$ — противоположными.

432. Среди чисел $15\sqrt{3}-4\sqrt{2}$, $6-\sqrt{12}$, $\sqrt{80}-5\sqrt{3}$, $\sqrt{75}-4\sqrt{5}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-6}$, $\dfrac{1}{\sqrt{675}-\sqrt{32}}$ есть пара взаимно обратных чисел и пара противоположных чисел. Найдите эти пары.

П

433. Упростите выражение $\dfrac{9-x^2}{4x}\cdot\dfrac{8x}{x^2+6x+9}-2$ и найдите его значение при $x=-2{,}5$.

434. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2-x}{3}+1=0$; б) $\dfrac{y-10}{6}-\dfrac{5-2y}{4}=2{,}5$.

435. Площадь кольца вычисляется по формуле $S = \pi(R^2 - r^2)$, где R — радиус внешнего круга, а r — радиус внутреннего круга. Выразите R через S и r.

436. Напишите для каждой прямой, изображённой на рисунке 21, уравнение, графиком которого является эта прямая.

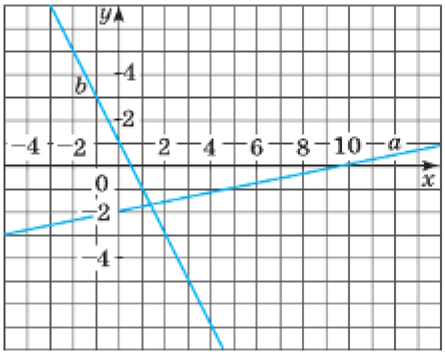


Рис. 21

Контрольные вопросы и задания

1. На примере выражения $3\sqrt{a}$ покажите, как можно внести множитель под знак корня.
2. На примере выражения $\sqrt{8a}$ покажите, как можно вынести множитель из-под знака корня.
3. На примере выражений $\frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ покажите, как можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Для тех, кто хочет знать больше

19. Преобразование двойных радикалов

Сторона a_5 правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса R, вычисляется по формуле

$$a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Выражение $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, входящее в эту формулу, имеет вид

$$\sqrt{a + b\sqrt{c}},$$

где a, b, c — некоторые рациональные числа. Выражение такого вида называют *двойным радикалом*.

В преобразованиях выражений, содержащих двойные радикалы, стремятся освободиться от внешнего радикала. Это нетрудно сделать, когда выражение, стоящее под знаком радикала, можно представить в виде квадрата суммы или квадрата разности.

Пример 1. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{41-12\sqrt{5}}$.

▶ Попытаемся представить выражение $41-12\sqrt{5}$ в виде квадрата разности двух выражений. Для этого $12\sqrt{5}$ будем рассматривать как удвоенное произведение двух выражений, а 41 — как сумму их квадратов. Выражение $12\sqrt{5}$ можно представить, например, как $2\cdot 6\cdot \sqrt{5}$ или как $2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}$. Проверка убеждает нас, что именно в первом случае сумма квадратов множителей 6 и $\sqrt{5}$ равна 41. Значит,

$$\sqrt{41-12\sqrt{5}}=\sqrt{36-2\cdot 6\cdot \sqrt{5}+5}=\sqrt{(6-\sqrt{5})^2}=|6-\sqrt{5}|=6-\sqrt{5}.$$ ◁

Пример 2. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{61+28\sqrt{3}}$.

Покажем, как можно решить эту задачу, используя *метод неопределённых коэффициентов*.

▶ Пусть $\sqrt{61+28\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$, где a и b — некоторые числа.

Тогда $(a+b\sqrt{3})^2=61+28\sqrt{3}$ и $a+b\sqrt{3}\geqslant 0$. Значит,

$$a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2=61+28\sqrt{3}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} a^2+3b^2=61, \\ 2ab=28, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} a^2+3b^2=61, \\ ab=14. \end{cases}$$

Выпишем все пары целых чисел $(a;\ b)$, для которых $ab=14$: $(-14;\ -1)$, $(-7;\ -2)$, $(-2;\ -7)$, $(-1;\ -14)$, $(1;\ 14)$, $(2;\ 7)$, $(7;\ 2)$, $(14;\ 1)$. Из этих пар выберем те, которые удовлетворяют условиям

$$a^2+3b^2=61 \text{ и } a+b\sqrt{3}\geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что такая пара единственная — это пара $(7;\ 2)$. Значит,

$$\sqrt{61+28\sqrt{3}}=7+2\sqrt{3}.$$ ◁

В тех случаях, когда $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и разность a^2-b равна квадрату рационального числа, освободиться от внешнего радикала в выражении $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ можно с помощью *формулы двойного радикала*:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

В правой части этой формулы записано неотрицательное число. Покажем, что его квадрат равен $a \pm \sqrt{b}$:

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm \frac{2\sqrt{a^2-(a^2-b)}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} = a \pm \sqrt{b}.$$

Пример 3. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{57-\sqrt{2024}}$.

▶ По формуле двойного радикала имеем

$$\sqrt{57-\sqrt{2024}} = \sqrt{\frac{57+\sqrt{57^2-2024}}{2}} - \sqrt{\frac{57-\sqrt{57^2-2024}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{57+\sqrt{1225}}{2}} - \sqrt{\frac{57-\sqrt{1225}}{2}} = \sqrt{\frac{57+35}{2}} - \sqrt{\frac{57-35}{2}} = \sqrt{46} - \sqrt{11}. \ \triangleleft$$

Освобождение от внешнего радикала используется в преобразованиях выражений с переменными, содержащих двойные радикалы.

Пример 4. Упростим выражение

$$\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-4}} + \sqrt{a-2}, \text{ где } a > 2.$$

▶ Представим в двойном радикале подкоренное выражение в виде

$$(a+2) - 2\sqrt{a^2-4} + (a-2).$$

Получим

$$\sqrt{(a+2)-2\sqrt{a^2-4}+(a-2)} + \sqrt{a-2} = \sqrt{(\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2})^2} + \sqrt{a-2} =$$

$$= |\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}| + \sqrt{a-2} = \sqrt{a+2} - \sqrt{a-2} + \sqrt{a-2} = \sqrt{a+2}. \ \triangleleft$$

Упражнения

437. Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$;   б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

438. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;   б) $\sqrt{27-5\sqrt{8}} + \sqrt{2}$.

439. Освободитесь от внешнего радикала, пользуясь формулой двойного радикала:

а) $\sqrt{55+\sqrt{216}}$; в) $\sqrt{17+\sqrt{288}}$;

б) $\sqrt{86-\sqrt{5460}}$; г) $\sqrt{32-\sqrt{1008}}$.

440. Упростите выражение, вычислив предварительно значение a^2, если:

а) $a=\sqrt{11+\sqrt{85}}-\sqrt{11-\sqrt{85}}$;

б) $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

441. Является ли рациональным или иррациональным числом значение выражения:

а) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}+\sqrt{19+2\sqrt{34}}$?

442. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{4-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+\sqrt{11}}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}$.

443. Найдите значение выражения:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

444. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{9+\sqrt{12}-\sqrt{20}-\sqrt{60}}=1+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

445. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{b+1}{2}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{b+1}{2}+\sqrt{b}}$, где $b \geqslant 1$;

б) $\sqrt{\dfrac{c+4}{4}+\sqrt{c}}-\sqrt{\dfrac{c+4}{4}-\sqrt{c}}$, где $c \geqslant 4$.

446. Освободитесь от внешнего радикала в выражении:

а) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$, если $a \geqslant 1$;

б) $\sqrt{a+b+1+2\sqrt{a+b}}-\sqrt{a+b+1-2\sqrt{a+b}}$, если $a+b \geqslant 1$.

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 4

447. Известно, что числа a и b натуральные. Является ли натуральным число:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$?

448. Известно, что числа a и b целые. Является ли целым число:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

449. Известно, что числа a и b рациональные. Является ли рациональным число:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

450. Докажите, что если числа x и y чётные, то чётным будет число:

а) $x - y$; б) xy; в) $3x + y$.

451. Известно, что числа x и y нечётные. Будет ли чётным или нечётным числом:

а) сумма $x + y$;
б) разность $x - y$;
в) произведение xy?

452. Назовите:

а) пять положительных чисел, меньших 0,002;

б) пять отрицательных чисел, больших $-\frac{1}{11}$;

в) пять чисел, больших $\frac{1}{3}$ и меньших $\frac{1}{2}$.

453. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{23}{64}$; в) $\frac{11}{13}$; д) $\frac{2}{35}$; ж) $\frac{23}{30}$;

б) $-\frac{7}{25}$; г) $\frac{1}{27}$; е) $-\frac{7}{22}$; з) $\frac{12}{55}$.

454. Назовите два рациональных и два иррациональных числа, заключённых между числами 10 и 10,1.

455. Известно, что число a рациональное, а число b иррациональное. Будет ли рациональным или иррациональным число:

а) $a + b$; б) $a - b$?

456. Найдите значение выражения:

а) $0{,}3\sqrt{289}$; в) $\sqrt{\frac{9}{49}}-1$; д) $2\sqrt{0{,}0121}+\sqrt{100}$;

б) $-4\sqrt{0{,}81}$; г) $\frac{4}{\sqrt{256}}-\frac{1}{\sqrt{64}}$; е) $\frac{\sqrt{144}}{6}+\sqrt{2{,}89}$.

457. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{5x-10}$ при $x = 2;\ 2{,}2;\ 5{,}2;\ 22$;

б) $\sqrt{6-2y}$ при $y = 1;\ -1{,}5;\ -15;\ -37{,}5$;

в) $\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ при $x = 0;\ 1;\ 16;\ 0{,}25$;

г) $\sqrt{2a-b}$ при $a = 0,\ b = 0$; при $a = 4,\ b = 7$.

458. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{x}=3$; в) $\frac{1}{4\sqrt{x}}=2$; д) $1+\sqrt{2x}=10$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3x}}=1$; г) $\sqrt{x-5}=4$; е) $3\sqrt{x}-5=4$.

459. Решите уравнение $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$.

460. Может ли:

а) сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом;

б) произведение рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

461. Приведите пример уравнения вида $x^2 = a$, которое:

а) имеет два рациональных корня;

б) имеет два иррациональных корня;

в) не имеет корней.

462. Укажите допустимые значения переменной x в выражении:

а) $\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{x^2+1}$; д) $\sqrt{-x^2}$;

б) $\sqrt{x^4}$; г) $\sqrt{(4-x)^2}$; е) $\sqrt{-x^3}$.

463. При каких значениях a и b имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{ab}$; в) $\sqrt{a^2b}$; д) $\sqrt{-ab^2}$;

б) $\sqrt{-ab}$; г) $\sqrt{a^2b^2}$; е) $\sqrt{-a^2b^2}$?

464. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\frac{4}{\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; в) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$?

465. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0,16}+(2\sqrt{0,1})^2$; г) $(3\sqrt{3})^2+(-3\sqrt{3})^2$;

б) $(0,2\sqrt{10})^2+0,5\sqrt{16}$; д) $(5\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2$;

в) $\sqrt{144}-0,5(\sqrt{12})^2$; е) $(-3\sqrt{6})^2-3(\sqrt{6})^2$.

466. Расстояние между двумя точками координатной плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Вычислите расстояние между точками $A(-3,5;\ 4,3)$ и $B(7,8;\ 0,4)$ с помощью калькулятора.

467. Сравните числа:

а) $\sqrt{7,5}$ и $\sqrt{7,6}$; г) $\sqrt{2,16}$ и $\sqrt{2\frac{1}{6}}$; ж) $\sqrt{7}$ и 2,6;

б) $\sqrt{0,1}$ и $\sqrt{0,01}$; д) $\sqrt{\frac{5}{9}}$ и $\sqrt{\frac{6}{11}}$; з) 3,2 и $\sqrt{9,8}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{0,3}$; е) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{0,(3)}$; и) $\sqrt{1,23}$ и 1,1.

468. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь при различных значениях b уравнение:

а) $\sqrt{x}=x+b$; б) $\sqrt{x}=-x+b$.

К параграфу 5

469. Вычислите:

а) $\sqrt{196\cdot 0,81\cdot 0,36}$; в) $\sqrt{0,87\cdot 49+0,82\cdot 49}$;

б) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 5\frac{4}{9}\cdot 0,01}$; г) $\sqrt{1,44\cdot 1,21-1,44\cdot 0,4}$.

470. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$; в) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$;

б) $\sqrt{\frac{98}{176^2-112^2}}$; г) $\sqrt{\frac{145,5^2-96,5^2}{193,5^2-31,5^2}}$.

471. Вычислите:

а) $15\sqrt{20}\cdot 0{,}1\sqrt{45}$; в) $\frac{8\sqrt{5}}{0{,}4\sqrt{0{,}2}}$;

б) $0{,}3\sqrt{10}\cdot 0{,}2\sqrt{15}\cdot 0{,}5\sqrt{6}$; г) $\frac{\sqrt{0{,}48}}{5\sqrt{12}}$.

472. Известно, что $a < 0$ и $b < 0$. Представьте выражение:

а) $\sqrt{ab}$ в виде произведения корней;

б) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ в виде частного корней.

473. Найдите значение выражения (если оно имеет смысл):

а) $\sqrt{(-12)^2}$; в) $\sqrt{-10^2}$; д) $\sqrt{-(-15)^2}$;

б) $-\sqrt{10^2}$; г) $-\sqrt{(-11)^2}$; е) $-\sqrt{(-25)^2}$.

474. Вычислите:

а) $3\sqrt{(-2)^6}$; г) $0{,}1\sqrt{2^{10}}$; ж) $-\sqrt{(-2)^{12}}$;

б) $-2\sqrt{10^4}$; д) $0{,}1\sqrt{(-3)^8}$; з) $2{,}5\sqrt{(-0{,}1)^4}$.

в) $-3\sqrt{5^4}$; е) $100\sqrt{0{,}1^{10}}$;

475. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{4^3}$; г) $\sqrt{25^3}$; ж) $\sqrt{750\cdot 270}$;

б) $\sqrt{9^5}$; д) $\sqrt{8\cdot 162}$; з) $\sqrt{194\cdot 776}$.

в) $\sqrt{16^5}$; е) $\sqrt{96\cdot 486}$;

476. При каких значениях x верно равенство $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$?

477. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $\sqrt{y^4}=y^2$; в) $\sqrt{x^6}=x^3$; д) $\sqrt{a^{14}}=-a^7$;

б) $\sqrt{x^{12}}=x^6$; г) $\sqrt{c^{10}}=-c^5$; е) $\sqrt{b^8}=b^4$?

478. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$; в) $y=x\sqrt{x^2}$;

б) $y=\frac{-2\sqrt{x^2}}{x}$; г) $y=-x\sqrt{x^2}$.

479. Постройте график функции $y = \sqrt{|x|}$.

480. Преобразуйте выражение:

а) $\sqrt{a^4b^4}$;

б) $\sqrt{b^6c^8}$, где $b \geqslant 0$;

в) $\sqrt{16x^4y^{12}}$;

г) $\sqrt{0{,}25p^2y^6}$, где $p \geqslant 0$, $y \leqslant 0$;

д) $\sqrt{\frac{p^4}{a^8}}$;

е) $\sqrt{\frac{16a^{12}}{b^{10}}}$, где $b > 0$;

ж) $\sqrt{\frac{4x^2}{y^6}}$, где $x < 0$, $y < 0$;

з) $\sqrt{\frac{c^6}{9a^2}}$, где $c < 0$, $a > 0$.

481. *(Задача-исследование.)* Верно ли, что при любом натуральном n значение выражения $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$ является натуральным числом?

1) Выберите произвольное значение n и проверьте, является ли натуральным числом соответствующее значение корня.
2) Подумайте, как удобно сгруппировать множители в произведении $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$, чтобы представить подкоренное выражение в виде квадрата.
3) Выполните преобразования и дайте ответ на вопрос задачи.

482. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(-a)^2}$; б) $\sqrt{(-a)^2(-b)^4}$.

К параграфу 6

483. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $0{,}5\sqrt{60a^2}$; в) $0{,}1\sqrt{150x^3}$; д) $a\sqrt{18a^2b}$;

б) $2{,}1\sqrt{300x^4}$; г) $0{,}2\sqrt{225a^5}$; е) $-m\sqrt{48am^4}$.

484. Сравните числа:

а) $0{,}2\sqrt{200}$ и $10\sqrt{8}$; в) $0{,}5\sqrt{108}$ и $9\sqrt{3}$;

б) $7\sqrt{\frac{32}{49}}$ и $0{,}8\sqrt{50}$; г) $\frac{5}{2}\sqrt{63}$ и $4{,}5\sqrt{28}$.

485. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$, $\sqrt{30}$ и $7\sqrt{2}$; в) $8\sqrt{0{,}2}$, $\sqrt{41}$ и $\frac{2}{5}\sqrt{250}$;

б) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{17}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; г) $12\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt{89}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{160}$.

486. Выполните умножение:

а) $\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;
б) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x}$;
в) $\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;
г) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{mn}$;
д) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$;
е) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})$;
ж) $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})$;
з) $(4\sqrt{x}-\sqrt{2x})(\sqrt{x}-\sqrt{2x})$.

487. Упростите выражение:

а) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)$;
б) $(\sqrt{a}+2)(a-2\sqrt{a}+4)$;
в) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})(m+n+\sqrt{mn})$;
г) $(x+\sqrt{y})(x^2+y-x\sqrt{y})$.

488. Представьте в виде квадрата суммы или квадрата разности выражение:

а) $x-4\sqrt{x-1}+3$;
б) $y+2\sqrt{y+2}+3$.

489. Докажите, что:

а) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$;
б) $\sqrt{8\sqrt{3}+19}=\sqrt{3}+4$.

490. Найдите значение выражения:

а) x^2-6 при $x=1+\sqrt{5}$;
б) x^2-6x при $x=3-\sqrt{3}$;
в) x^2-4x+3 при $x=2+\sqrt{3}$;
г) x^2-3x+5 при $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

491. Докажите, что значения выражений

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} \text{ и } \sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

являются натуральными числами.

492. Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $\frac{1}{3\sqrt{2}-5}-\frac{1}{3\sqrt{2}+5}$;
б) $\frac{1}{7+2\sqrt{6}}+\frac{1}{7-2\sqrt{6}}$.

493. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$;
б) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}}+\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$;
в) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;
г) $\frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$.

494. Найдите значение дроби $\frac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$ при $x=3+\sqrt{5}$ и $y=3-\sqrt{5}$.

495. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; б) $\dfrac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$.

496. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$.

497. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; в) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; г) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

498. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; б) $\dfrac{(\sqrt{10}-1)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

499. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$; б) $\dfrac{x-\sqrt{ax}}{a\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$.

500. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$; б) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; в) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

501. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{a}}$; г) $\dfrac{a^2b+2a\sqrt{b}+4}{a\sqrt{b}+2}$.

502. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}$;

б) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{\sqrt{mn}+1}{mn+\sqrt{mn}+1}$.

503. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

504. При каком значении x дробь $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ принимает наибольшее значение?

505. Упростите выражение:

а) $15\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{160}$; в) $6\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{27}$;

б) $\sqrt{135}+10\sqrt{0,6}$; г) $0,5\sqrt{24}+10\sqrt{\frac{3}{8}}$.

506. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}}+\frac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{y-1}{2}$;

б) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{2}$.

507. Докажите, что значение выражения

$$\sqrt{b+49-14\sqrt{b}}+\sqrt{b+49+14\sqrt{b}}$$

при $0 \leqslant b \leqslant 49$ не зависит от b.

508. Постройте графики функций:

$y=\sqrt{x}$;

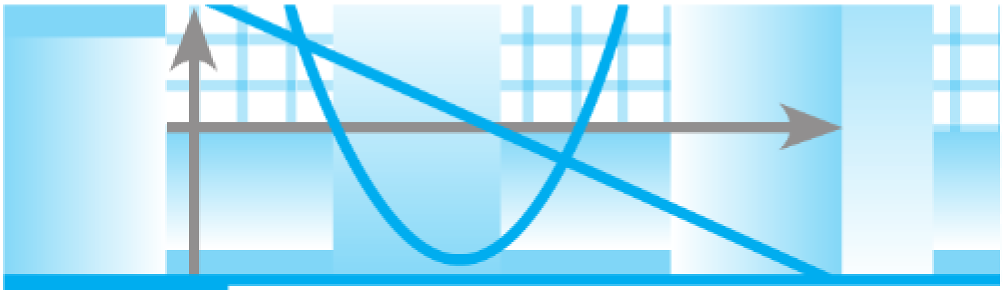
$y=\sqrt{x}-3$;

$y=\sqrt{x}+3$;

$y=\sqrt{x-3}$;

$y=\sqrt{x+3}$.

509. Постройте график функции $y=\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$.



Глава III УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этой главе вы сделаете новый шаг в изучении алгебры. Вы будете решать новые виды уравнений с одной переменной и прежде всего научитесь решать квадратные уравнения. Вы узнаете формулу корней квадратного уравнения, которая позволяет вычислять корни уравнения по его коэффициентам. Эту формулу вы сможете применять не только на уроках алгебры, но и на уроках геометрии, физики, информатики. Вы узнаете о существовании зависимости между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами. Формулы, выражающие эту зависимость, вывел в конце XVI в. французский математик Франсуа Виет. Вы детально познакомитесь с квадратным трёхчленом: узнаете, в каких случаях и каким образом квадратный трёхчлен можно разложить на множители. Вы будете решать несложные дробные рациональные уравнения и узнаете о возможном появлении при их решении так называемых посторонних корней. Знакомство с новыми видами уравнений позволит вам решать более разнообразные текстовые задачи. Вы продолжите изучение уравнений с двумя переменными и их систем; при этом будут рассматриваться как графические, так и алгебраические способы их решения.

§ 7 КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

20. Неполные квадратные уравнения

Каждое из уравнений

$$-x^2 + 6x + 1{,}4 = 0, \quad 8x^2 - 7x = 0, \quad x^2 - \frac{4}{9} = 0$$

имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x — переменная, a, b и c — числа.

В первом уравнении $a = -1$, $b = 6$ и $c = 1{,}4$, во втором — $a = 8$, $b = -7$ и $c = 0$, в третьем — $a = 1$, $b = 0$ и $c = -\frac{4}{9}$. Такие уравнения называют *квадратными уравнениями*.

Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Числа a, b и c — коэффициенты квадратного уравнения. Число a называют первым коэффициентом, число b — вторым коэффициентом и число c — свободным членом.

В каждом из уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, наибольшая степень переменной x — квадрат. Отсюда и название: квадратное уравнение.

Заметим, что квадратное уравнение называют ещё уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

Квадратное уравнение, в котором коэффициент при x^2 равен 1, называют *приведённым квадратным уравнением*. Например, приведёнными квадратными уравнениями являются уравнения

$$x^2 - 11x + 30 = 0, \quad x^2 - 6x = 0, \quad x^2 - 8 = 0.$$

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют *неполным квадратным уравнением*. Так, уравнения $-2x^2 + 7 = 0$, $3x^2 - 10x = 0$ и $-4x^2 = 0$ — неполные квадратные уравнения. В первом из них $b = 0$, во втором — $c = 0$, в третьем — $b = 0$ и $c = 0$.

Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;
2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$;
3) $ax^2 = 0$.

Рассмотрим решение уравнений каждого из этих видов.

Пример 1. Решим уравнение $-3x^2 + 15 = 0$.

▶ Перенесём свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на -3:

$$-3x^2 = -15,$$
$$x^2 = 5.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{5} \text{ или } x = -\sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$. ◁

П р и м е р 2. Решим уравнение $4x^2 + 3 = 0$.

▶ Перенесём свободный член в правую часть уравнения и обе части получившегося уравнения разделим на 4:

$$4x^2 = -3$$

$$x^2 = -\frac{3}{4}.$$

Так как квадрат числа не может быть отрицательным числом, то получившееся уравнение не имеет корней. А следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение $4x^2 + 3 = 0$.

О т в е т: корней нет. ◁

Вообще для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + c = 0$ при $c \neq 0$ переносят его свободный член в правую часть и делят обе части уравнения на a. Получают уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$, равносильное уравнению $ax^2 + c = 0$.

Так как $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a} \neq 0$.

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней.

П р и м е р 3. Решим уравнение $4x^2 + 9x = 0$.

▶ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(4x + 9) = 0.$$

Отсюда

$$x = 0 \text{ или } 4x + 9 = 0.$$

Решим уравнение $4x + 9 = 0$:

$$4x = -9,$$

$$x = -2\frac{1}{4}.$$

О т в е т: 0; $-2\frac{1}{4}$. ◁

Вообще для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ раскладывают его левую часть на множители и получают уравнение

$$x(ax + b) = 0.$$

Произведение $x(ax + b)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0.$$

Решая уравнение $ax + b = 0$, в котором $a \neq 0$, находим

$$ax = -b, \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Следовательно, произведение $x(ax + b)$ обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = -\frac{b}{a}$. Корнями уравнения $ax^2 + bx = 0$ являются числа 0 и $-\frac{b}{a}$.

Значит, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ всегда имеет два корня.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x^2 = 0$ и поэтому имеет единственный корень 0.

Упражнения

510. Является ли квадратным уравнение:

а) $3{,}7x^2 - 5x + 1 = 0$; в) $2{,}1x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0$; д) $7x^2 - 13 = 0$;

б) $48x^2 - x^3 - 9 = 0$; г) $x + x^2 - 1 = 0$; е) $-x^2 = 0$?

511. Выпишите коэффициенты квадратного уравнения:

а) $5x^2 - 9x + 4 = 0$; г) $x^2 + 5x = 0$;

б) $x^2 + 3x - 10 = 0$; д) $6x^2 - 30 = 0$;

в) $-x^2 - 8x + 1 = 0$; е) $9x^2 = 0$.

Какие из данных уравнений являются приведёнными квадратными уравнениями?

512. Приведите примеры неполных квадратных уравнений различных видов.

513. Найдите корни уравнения:

а) $4x^2 - 9 = 0$; в) $-0{,}1x^2 + 10 = 0$; д) $6v^2 + 24 = 0$;

б) $-x^2 + 3 = 0$; г) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$; е) $3m^2 - 1 = 0$.

514. Решите уравнение и укажите приближённые значения корней с точностью до 0,1 (воспользуйтесь калькулятором):

а) $2x^2 - 17 = 0$; б) $3t^2 - 7{,}2 = 0$; в) $-p^2 + 12{,}6 = 0$.

515. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 4x = 0$; в) $10x^2 + 7x = 0$; д) $6z^2 - z = 0$;

б) $-5x^2 + 6x = 0$; г) $4a^2 - 3a = 0$; е) $2y + y^2 = 0$.

516. Решите уравнение:

а) $2x^2 + 3x = 0$; в) $5u^2 - 4u = 0$; д) $1 - 4y^2 = 0$;
б) $3x^2 - 2 = 0$; г) $7a - 14a^2 = 0$; е) $2x^2 - 6 = 0$.

517. Верно ли утверждение:

а) неполное квадратное уравнение $x^2 - 19 = 0$ не имеет корней;
б) неполное квадратное уравнение $x^2 + 19 = 0$ не имеет корней;
в) неполное квадратное уравнение $x^2 + 19x = 0$ не имеет корней?

518. Найдите значения переменной a, при которых:

а) значение выражения $5a^2 + 5a - 6$ равно 24;
б) значение выражения $a(a - 4)$ равно 60.

519. Решите уравнение:

а) $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$; в) $10 - 3x^2 = x^2 + 10 - x$;
б) $-5y^2 + 8y + 8 = 8y + 3$; г) $1 - 2y + 3y^2 = y^2 - 2y + 1$.

520. Найдите корни уравнения:

а) $(x + 3)(x - 4) = -12$; в) $3x(2x + 3) = 2x(x + 4,5) + 2$;
б) $1\frac{2}{3}t + (2t + 1)\left(\frac{1}{3}t - 1\right) = 0$; г) $(x - 1)(x + 1) = 2(x^2 - 3)$.

521. Решите уравнение:

а) $x^2 - 5 = (x + 5)(2x - 1)$; в) $6a^2 - (a + 2)^2 = -4(a - 4)$;
б) $2x - (x + 1)^2 = 3x^2 - 6$; г) $(5y + 2)(y - 3) = -13(2 + y)$.

522. Произведение двух последовательных целых чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найдите эти числа.

523. Теннисный корт представляет собой прямоугольную площадку, длина которой вдвое больше ширины, а площадь равна 800 м^2. Найдите длину и ширину корта.

524. Если от квадрата отрезать треугольник площадью 59 см^2, то площадь оставшейся части будет равна 85 см^2. Найдите сторону квадрата.

525. Две группы туристов отправились одновременно из одного пункта — одна на север со скоростью 4 км/ч, а другая на запад со скоростью 5 км/ч. Через какое время расстояние между туристами окажется равным 16 км?

526. Путь свободно падающего тела вычисляется по формуле $s = \frac{gt^2}{2}$, где t (с) — время, $g \approx 10$ м/с^2, s (м) — пройденный путь. Через сколько секунд от начала падения камень достигнет дна шахты глубиной 80 м?

527. Ширина земельного участка, имеющего форму прямоугольника, составляет 75% его длины, а его площадь равна 4800 м^2. Найдите длину забора, ограждающего этот участок.

528. Телевизор имеет плоский экран прямоугольной формы. В паспорте к телевизору указано, что длина экрана относится к ширине как 4 : 3, а диагональ равна 25 дюймам. Найдите длину и ширину экрана в дюймах; в сантиметрах (1 дюйм = 2,54 см).

П

529. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = (1 - \sqrt{2})x$; б) $y = (4 - \sqrt{15})x$; в) $y = (\sqrt{35} - 5{,}7)x$?

530. Найдите значение выражения $\frac{9 + 6x + x^2}{x + 3} + \sqrt{x}$ при $x = 0{,}36$ и при $x = 49$.

21. Формула корней квадратного уравнения

Рассмотрим теперь, как решают квадратные уравнения, в которых оба коэффициента при неизвестных и свободный член отличны от нуля.

Начнём с примера. Решим уравнение

$$7x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на 7, получим равносильное ему приведённое квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{1}{7} = 0.$$

Выделим из трёхчлена $x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{1}{7}$ квадрат двучлена. Для этого разность $x^2 - \frac{6}{7}x$ представим в виде $x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x$, прибавим к ней выражение $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ и вычтем его.

Получим

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x + \left(\frac{3}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 0.$$

Отсюда

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \frac{1}{7},$$

$$\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}.$$

Следовательно,

$$x - \frac{3}{7} = -\sqrt{\frac{16}{49}} \ \text{ или } \ x - \frac{3}{7} = \sqrt{\frac{16}{49}},$$

$$x - \frac{3}{7} = -\frac{4}{7} \ \text{ или } \ x - \frac{3}{7} = \frac{4}{7},$$

$$x = -\frac{1}{7} \ \text{ или } \ x = 1.$$

Уравнение имеет два корня: $-\frac{1}{7}$ и 1.

Способ, с помощью которого мы решили уравнение, называют *выделением квадрата двучлена*.

Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена часто приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому поступают иначе. Решают уравнение в общем виде и в результате получают формулу корней. Затем эту формулу применяют при решении любого квадратного уравнения.

Решим квадратное уравнение

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}. \qquad (1)$$

Разделив обе его части на a, получим равносильное ему приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Преобразуем это уравнение, используя преобразования, аналогичные тем, которые применялись в рассмотренном выше примере:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) равносильно уравнению (1). Число его корней зависит от знака дроби $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Так как $a \neq 0$, то $4a^2$ — положительное число, поэтому знак этой дроби определяется знаком её числителя, т. е. выражения b^2-4ac. Это выражение называют *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$ («дискриминант» по-латыни — различитель). Его обозначают буквой D, т. е.

$$D=b^2-4ac.$$

Запишем уравнение (2) в виде

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}.$$

Рассмотрим теперь различные возможные случаи в зависимости от значения D.

1) Если $D>0$, то

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, в этом случае уравнение (1) имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Принята следующая краткая запись, которую называют *формулой корней квадратного уравнения*:

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}, \ \textbf{где } \boldsymbol{D=b^2-4ac}. \qquad \text{(I)}$$

2) Если $D=0$, то уравнение (2) примет вид

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

В этом случае уравнение (1) имеет один корень $-\frac{b}{2a}$.

Формулой корней квадратного уравнения можно пользоваться и в этом случае. Действительно, при $D = 0$ формула (I) принимает вид

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a},$$

откуда

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Если $D < 0$, то значение дроби $\frac{D}{4a^2}$ отрицательно и поэтому уравнение

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2},$$

а следовательно, и уравнение (1) не имеют корней.

Таким образом, в зависимости от значения дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня (при $D > 0$), один корень (при $D = 0$) или не иметь корней (при $D < 0$). ○

> При решении квадратного уравнения по формуле (I) целесообразно поступать следующим образом:
> 1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулём;
> 2) если дискриминант положителен или равен нулю, то воспользоваться формулой корней, если дискриминант отрицателен, то записать, что корней нет.

Пример 1. Решим уравнение $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

▶ Найдём дискриминант:

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1,\ D > 0.$$

Применим формулу корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{24}, \quad x = \frac{-7 \pm 1}{24}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$. ◁

Пример 2. Решим уравнение $x^2 - 12x + 36 = 0$.

▶ Имеем

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0,$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2}, \quad x = \frac{12 \pm 0}{2}.$$

Ответ: 6. ◁

Пример 3. Решим уравнение $7x^2 - 25x + 23 = 0$.

▶ Имеем

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 625 - 644, \ D < 0.$$

Ответ: корней нет. ◁

Из формулы (I) можно получить другую формулу, которой удобно пользоваться при решении квадратных уравнений с чётным вторым коэффициентом.

● Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Найдём его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.
Очевидно, что число корней уравнения зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Обозначим это выражение через D_1.

Если $D_1 \geqslant 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получим

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

$$\text{т. е. } x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

Значит, если квадратное уравнение имеет вид

$$\mathbf{a}\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{kx} + \boldsymbol{c} = 0,$$

то при $D_1 \geqslant 0$ его корни могут быть найдены по формуле

$$\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{k} \pm \sqrt{\boldsymbol{D}_1}}{\boldsymbol{a}}, \text{ где } \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{ac}. \qquad \text{(II)}$$

Если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет. ○

Пример 4. Решим уравнение $9x^2 - 14x + 5 = 0$.

▶ Имеем $D_1 = (-7)^2 - 9 \cdot 5 = 4$,

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{4}}{9}, \quad x = \frac{7 \pm 2}{9}.$$

Ответ: $\frac{5}{9}$; 1. ◁

Упражнения

531. Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите число его корней:

а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; в) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
б) $2x^2 + x + 2 = 0$; г) $x^2 + 5x - 6 = 0$.

532. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 7x + 4 = 0$; д) $5y^2 - 6y + 1 = 0$;
б) $5x^2 - 8x + 3 = 0$; е) $4x^2 + x - 33 = 0$;
в) $3x^2 - 13x + 14 = 0$; ж) $y^2 - 10y - 24 = 0$;
г) $2y^2 - 9y + 10 = 0$; з) $p^2 + p - 90 = 0$.

533. Решите уравнение:

а) $14x^2 - 5x - 1 = 0$; г) $1 - 18p + 81p^2 = 0$;
б) $-y^2 + 3y + 5 = 0$; д) $-11y + y^2 - 152 = 0$;
в) $2x^2 + x + 67 = 0$; е) $18 + 3x^2 - x = 0$.

534. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$; г) $35x^2 + 2x - 1 = 0$;
б) $2p^2 + 7p - 30 = 0$; д) $2y^2 - y - 5 = 0$;
в) $9y^2 - 30y + 25 = 0$; е) $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

535. При каких значениях x:

а) трёхчлен $x^2 - 11x + 31$ принимает значение, равное 1;
б) значения многочленов $x^2 - 5x - 3$ и $2x - 5$ равны;
в) двучлен $7x + 1$ равен трёхчлену $3x^2 - 2x + 1$;
г) трёхчлен $-2x^2 + 5x + 6$ равен двучлену $4x^2 + 5x$?

536. При каких значениях x принимают равные значения:

а) двучлены $x^2 - 6x$ и $5x - 18$;
б) трёхчлены $3x^2 - 4x + 3$ и $x^2 + x + 1$?

537. Решите уравнение, используя формулу (II):

а) $3x^2 - 14x + 16 = 0$; д) $4t^2 - 36t + 77 = 0$;
б) $5p^2 - 16p + 3 = 0$; е) $15y^2 - 22y - 37 = 0$;
в) $d^2 + 2d - 80 = 0$; ж) $7z^2 - 20z + 14 = 0$;
г) $x^2 - 22x - 23 = 0$; з) $y^2 - 10y - 25 = 0$.

538. Решите уравнение:

а) $8x^2 - 14x + 5 = 0$; д) $m^2 + 6m - 19 = 0$;
б) $12t^2 + 16t - 3 = 0$; е) $5y^2 + 26y - 24 = 0$;
в) $4p^2 + 4p + 1 = 0$; ж) $z^2 - 34z + 289 = 0$;
г) $x^2 - 8x - 84 = 0$; з) $3x^2 + 32x + 80 = 0$.

539. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; д) $3t^2 - 3t + 1 = 0$;
б) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; е) $x^2 + 9x - 22 = 0$;
в) $5x^2 + 9x + 4 = 0$; ж) $y^2 - 12y + 32 = 0$;
г) $36y^2 - 12y + 1 = 0$; з) $100x^2 - 160x + 63 = 0$.

540. Решите уравнение:

а) $5x^2 = 9x + 2$;
б) $-t^2 = 5t - 14$;
в) $6x + 9 = x^2$;
г) $z - 5 = z^2 - 25$;
д) $y^2 = 52y - 576$;
е) $15y^2 - 30 = 22y + 7$;
ж) $25p^2 = 10p - 1$;
з) $299x^2 + 100x = 500 - 101x^2$.

541. Решите уравнение:

а) $25 = 26x - x^2$;
б) $3t^2 = 10 - 29t$;
в) $y^2 = 4y + 96$;
г) $3p^2 + 3 = 10p$;
д) $x^2 - 20x = 20x + 100$;
е) $25x^2 - 13x = 10x^2 - 7$.

542. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 3)(5x + 1) = 2x + \frac{2}{5}$;
б) $(3y - 1)(y + 3) = y(1 + 6y)$;
в) $(t - 1)(t + 1) = 2\left(5t - 10\frac{1}{2}\right)$;
г) $-z(z + 7) = (z - 2)(z + 2)$.

543. Решите уравнение:

а) $(x + 4)^2 = 3x + 40$;
б) $(2p - 3)^2 = 11p - 19$;
в) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$;
г) $15y^2 + 17 = 15(y + 1)^2$;
д) $(x + 1)^2 = 7918 - 2x$;
е) $(m + 2)^2 = 3131 - 2m$;
ж) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$;
з) $(n - 2)^2 + 48 = (2 - 3n)^2$.

544. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11$;
б) $\frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}$;
в) $\frac{4x^2 - 1}{3} = x(10x - 9)$;
г) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}$.

545. Найдите корни уравнения и укажите их приближённые значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

а) $5x^2 - x - 1 = 0$;
б) $2x^2 + 7x + 4 = 0$;
в) $3(y^2 - 2) - y = 0$;
г) $y^2 + 8(y - 1) = 3$.

546. *(Для работы в парах.)* Решите графически уравнение:

а) $x^2 - 2x - 1 = 0$;   б) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

1) Обсудите друг с другом, в каком виде удобно представить уравнение.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Найдите корни каждого из уравнений с помощью формулы корней квадратного уравнения и сравните их со значениями, найденными при графическом решении.

547. Решите уравнение $x^2 = 0{,}5x + 3$ сначала графически, а затем с помощью формулы корней.

548. Найдите корни уравнения и укажите их приближённые значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01 (воспользуйтесь калькулятором):

а) $x^2 - 8x + 9 = 0$; б) $2y^2 - 8y + 5 = 0$.

549. Решите уравнение:

а) $0{,}7x^2 = 1{,}3x + 2$; г) $z^2 - 2z + 2{,}91 = 0$;

б) $7 = 0{,}4y + \frac{1}{5}y^2$; д) $0{,}2y^2 - 10y + 125 = 0$;

в) $x^2 - 1{,}6x - 0{,}36 = 0$; е) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 9 = 0$.

550. При каких значениях x верно равенство:

а) $\frac{1}{7}x^2 = 2x - 7$; в) $4x^2 = 7x + 7{,}5$;

б) $x^2 + \frac{6}{5} = 2{,}6x$; г) $6x^2 - 2 = x$?

551. Существует ли такое значение a, при котором верно равенство (если существует, то найдите его):

а) $3a + 0{,}6 = 9a^2 + 0{,}36$;

б) $0{,}4a + 1{,}2 = 0{,}16a^2 + 1{,}44$?

552. *(Задача-исследование.)* Решите уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $6x^2 - 5x + 1 = 0$;

б) $2x^2 - 13x + 6 = 0$ и $6x^2 - 13x + 2 = 0$.

1) Пусть одна группа учащихся выполнит задание а), а другая — задание б).

2) Сравните результаты и выскажите предположение о соотношении между корнями уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$.

3) Докажите, что ваше предположение верно.

553. Существует ли такое значение a, при котором уравнение

$$x^2 - ax + a - 4 = 0:$$

а) не имеет корней;
б) имеет один корень;
в) имеет два корня?

П

554. Найдите значение выражения:

$$\frac{a - \frac{2a-1}{a}}{\frac{1-a}{3a}} \text{ при } a = -1{,}5.$$

555. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{21} + \sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} + \sqrt{20}$;

б) $(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \sqrt{75}$.

556. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = 7x - 1$ и $y = 2x$;

б) $y = 3x - 11$ и $y = 4$;

в) $y = 5x + 8$ и $y = 3x + 2$;

г) $y = 4 - x$ и $y = 3x$.

22. Решение задач

Многие задачи в математике, физике, технике решаются с помощью квадратных уравнений.

Рассмотрим геометрическую задачу.

Задача 1. Найдём катеты прямоугольного треугольника, если известно, что один из них на 4 см меньше другого, а гипотенуза равна 20 см.

▶ Пусть меньший катет равен x см. Тогда больший катет равен $(x + 4)$ см. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т. е.

$$x^2 + (x + 4)^2 = 20^2.$$

Упростим это уравнение:

$$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400,$$
$$2x^2 + 8x - 384 = 0,$$
$$x^2 + 4x - 192 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём, что

$$x_1 = -16, \quad x_2 = 12.$$

По смыслу задачи значение x должно быть положительным числом. Этому условию удовлетворяет только второй корень, т. е. число 12.

Ответ: 12 см, 16 см. ◁

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Через сколько секунд оно окажется на высоте 60 м?

▶ Из курса физики известно, что если не учитывать сопротивление воздуха, то высота h (м), на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через t (с), может быть найдена по формуле

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 (м/с) — начальная скорость, g — ускорение свободного падения, приближённо равное 10 м/с^2.

Подставив значения h и v_0 в формулу, получим

$$60 = 40t - 5t^2.$$

Отсюда

$$5t^2 - 40t + 60 = 0,$$
$$t^2 - 8t + 12 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём, что $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

На рисунке 22 дан график зависимости h от t, где $h = 40t - 5t^2$. Из графика видно, что тело, брошенное вертикально вверх, в течение первых 4 с поднимается вверх до высоты 80 м, а затем начинает падать. На высоте 60 м от земли оно оказывается дважды: через 2 с и через 6 с после бросания.

Условию задачи удовлетворяют оба найденных корня. Значит, ответ на вопрос задачи таков: на высоте 60 м тело окажется через 2 с и через 6 с. ◁

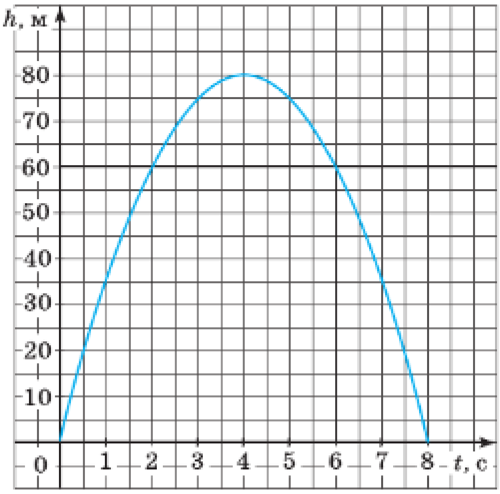


Рис. 22

Упражнения

557. Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 6 больше другого, равно 187. Найдите эти числа.

558. Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 4 см больше ширины, а площадь равна 60 см^2.

559. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 $м^2$.

560. Периметр прямоугольника равен 62 м. Найдите его стороны, если площадь прямоугольника равна 210 $м^2$.

561. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если известно, что их сумма равна 23 см, а площадь данного треугольника равна 60 $см^2$.

562. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 109. Найдите эти числа.

563. Площадь доски прямоугольной формы равна 4500 $см^2$. Доску распилили на две части, одна из которых представляет собой квадрат, а другая — прямоугольник. Найдите сторону получившегося квадрата, если длина отпиленного прямоугольника равна 120 см.

564. От прямоугольного листа картона длиной 26 см отрезали с двух сторон квадраты, сторона каждого из которых равна ширине листа. Площадь оставшейся части равна 80 $см^2$. Найдите ширину листа картона. Покажите, что задача имеет два решения, и для каждого случая сделайте чертёж (в масштабе 1 : 2).

565. В прямоугольном треугольнике один из катетов на 3 см меньше гипотенузы, а другой на 6 см меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу.

566. В кинотеатре число мест в ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в нём имеется 884 места?

567. *Старинная задача.* Стая обезьян забавляется. Восьмая часть их в квадрате резвится в лесу. Остальные двенадцать кричат на вершине холма. Скажи мне, сколько всего обезьян?

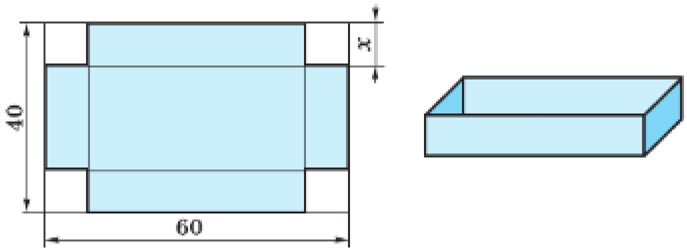
568. *Старинная задача.* Квадрат пятой части обезьян, уменьшенной на 3, спрятался в гроте. Одна обезьяна, влезшая на дерево, была видна. Сколько было обезьян?

569. Число диагоналей p выпуклого многоугольника вычисляется по формуле $p = \frac{n(n-3)}{2}$, где n — число сторон. В каком выпуклом многоугольнике диагоналей на 25 больше, чем сторон?

570. При розыгрыше первенства школы по футболу было сыграно 36 матчей, причём каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Сколько команд участвовало в розыгрыше?

571. В шахматном турнире было сыграно 45 партий. Определите число участников турнира, если известно, что каждый участник сыграл с каждым по одной партии.

572. От прямоугольного листа картона, длина которого равна 60 см, а ширина — 40 см, отрезали по углам равные квадраты и из оставшейся части склеили открытую коробку. Найдите сторону квадрата, если известно, что площадь основания коробки равна 800 см^2.



573. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 869.

574. Сократите дробь:

а) $\dfrac{8a^3-27}{9-12a+4a^2}$; б) $\dfrac{ax-2x-4a+8}{3a-6-ax+2x}$.

575. Найдите значение выражения:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-b}{2\sqrt{ab}+2b+1} \text{ при } a=5,\ b=2.$$

576. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x(x-3)}{6}-\dfrac{x}{2}=0$; в) $\dfrac{2}{5}x+\dfrac{9-x}{4}+\dfrac{9-x}{6}=3\dfrac{41}{60}$;

б) $\dfrac{x(x+1)}{3}+\dfrac{8+x}{4}=2$; г) $1+\dfrac{x-3{,}5}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{3{,}5}-1$.

577. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 13x - 2{,}6$ с осью x и осью y.

23. Теорема Виета

Приведённое квадратное уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$ имеет корни 2 и 5. Сумма корней равна 7, а произведение равно 10. Мы видим, что сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Докажем, что таким свойством обладает любое приведённое квадратное уравнение, имеющее корни.

ТЕОРЕМА

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Рассмотрим приведённое квадратное уравнение. Обозначим второй коэффициент буквой p, а свободный член буквой q:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Дискриминант этого уравнения D равен $p^2 - 4q$.
Пусть $D > 0$. Тогда это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}.$$

Найдём сумму и произведение корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Итак,

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Теорема доказана. ○

При $D = 0$ квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет один корень. Если условиться считать, что при $D = 0$ квадратное уравнение имеет два равных корня, то теорема будет верна и в этом случае. Это следует из того, что при $D = 0$ корни уравнения также можно вычислять по формуле

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Доказанная теорема называется теоремой Виета по имени знаменитого французского математика Франсуа Виета.

Используя теорему Виета, можно выразить сумму и произведение корней произвольного квадратного уравнения через его коэффициенты.

Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Равносильное ему приведённое квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета:

ТЕОРЕМА

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

● По условию $m + n = -p$, а $mn = q$. Значит, уравнение $x^2 + px + q = 0$ можно записать в виде

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Подставив в это уравнение вместо переменной x число m, получим

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Значит, число m является корнем уравнения.

Аналогично можно показать, что число n также является корнем уравнения. ○

Рассмотрим примеры применения теоремы Виета и теоремы, обратной теореме Виета.

ФРАНСУА ВИЕТ (1540—1603) — французский математик, ввёл систему алгебраических символов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых, кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

Пример 1. Найдём сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

▶ Дискриминант $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$ — положительное число. Значит, уравнение имеет корни. Эти же корни имеет приведённое квадратное уравнение $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$. Значит, по теореме Виета сумма корней уравнения $3x^2 - 5x + 2 = 0$ равна $\frac{5}{3}$, а произведение корней равно $\frac{2}{3}$. ◁

По теореме, обратной теореме Виета, можно проверять, правильно ли найдены корни квадратного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $x^2 + 3x - 40 = 0$ и выполним проверку по теореме, обратной теореме Виета.

▶ Найдём дискриминант:

$$D = 3^2 + 4 \cdot 40 = 169.$$

По формуле корней квадратного уравнения получаем

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}, \quad x = \frac{-3 \pm 13}{2}.$$

Отсюда

$$x_1 = -8, \ x_2 = 5.$$

Покажем, что корни уравнения найдены правильно. В уравнении $x^2 + 3x - 40 = 0$ коэффициент p равен 3, а свободный член q равен -40. Сумма найденных чисел -8 и 5 равна -3, а их произведение равно -40. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, эти числа являются корнями уравнения $x^2 + 3x - 40 = 0$. ◁

Пример 3. Найдём подбором корни уравнения

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

▶ Дискриминант $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$ — положительное число. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = -12.$$

Если x_1 и x_2 — целые числа, то они являются делителями числа -12. Учитывая также, что сумма этих чисел равна 1, нетрудно догадаться, что $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$. ◁

Упражнения

578. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 37x + 27 = 0$;
б) $y^2 + 41y - 371 = 0$;
в) $x^2 - 210x = 0$;
г) $y^2 - 19 = 0$;
д) $2x^2 - 9x - 10 = 0$;
е) $5x^2 + 12x + 7 = 0$;
ж) $-z^2 + z = 0$;
з) $3x^2 - 10 = 0$.

579. Решите уравнение и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 2x - 9 = 0$;
б) $3t^2 - 4t - 4 = 0$;
в) $2z^2 + 7z - 6 = 0$;
г) $2t^2 + 9t + 8 = 0$.

580. Найдите корни уравнения и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 15x - 16 = 0$;
б) $m^2 - 6m - 11 = 0$;
в) $12x^2 - 4x - 1 = 0$;
г) $t^2 - 6 = 0$;
д) $5x^2 - 18x = 0$;
е) $2y^2 - 41 = 0$.

581. Найдите подбором корни уравнения:

а) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
б) $y^2 + 11y - 12 = 0$;
в) $y^2 + y - 56 = 0$;
г) $z^2 - 19z + 88 = 0$.

582. Найдите подбором корни уравнения:

а) $x^2 + 16x + 63 = 0$;
б) $z^2 + 2z - 48 = 0$.

583. В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p.

584. Один из корней уравнения $x^2 - 13x + q = 0$ равен 12,5. Найдите другой корень и коэффициент q.

585. Один из корней уравнения $5x^2 + bx + 24 = 0$ равен 8. Найдите другой корень и коэффициент b.

586. Один из корней уравнения $10x^2 - 33x + c = 0$ равен 5,3. Найдите другой корень и коэффициент c.

587. Разность корней квадратного уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ равна 2. Найдите q.

588. Разность корней квадратного уравнения $x^2 + x + c = 0$ равна 6. Найдите c.

589. Разность квадратов корней уравнения $x^2 + 2x + q = 0$ равна 12. Найдите q.

590. Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3x + a = 0$ равна 65. Найдите a.

591. *(Для работы в парах.)* Не решая уравнения, выясните, имеет ли оно корни, и если имеет, то определите их знаки:

а) $x^2 + 7x - 1 = 0$;
б) $x^2 - 7x + 1 = 0$;
в) $5x^2 + 17x + 16 = 0$;
г) $19x^2 - 23x + 5 = 0$;
д) $2x^2 + 5\sqrt{3}x + 11 = 0$;
е) $11x^2 - 9x + 7 - 5\sqrt{2} = 0$.

1) Сформулируйте теорему, на основании которой можно определить знаки корней.
2) Распределите, кто выполняет задания а), в), д), а кто — задания б), г), е), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания. Исправьте ошибки, если они допущены.

592. Докажите, что уравнение не может иметь корни одинаковых знаков:

а) $3x^2 + 113x - 7 = 0$;
б) $5x^2 - 291x - 16 = 0$.

593. *(Для работы в парах.)* Уравнение $x^2 + 5x + m = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите, при каком значении m:
а) сумма квадратов корней равна 35;
б) сумма кубов корней равна 40.
1) Обсудите подходы к выполнению задания а) и задания б).
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность полученных ответов. Исправьте замеченные ошибки.

П

594. При каких значениях x верно равенство:

а) $(3x + 1)^2 = 3x + 1$;
б) $(3x + 1)^2 = 3(x + 1)$;
в) $(3x + 1)^2 = (2x - 5)^2$;
г) $(3x + 4)^2 = 4(x + 3)$;
д) $4(x + 3)^2 = (2x + 6)^2$;
е) $(6x + 3)^2 = (x - 4)^2$?

595. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 8 : 15, а гипотенуза равна 6,8 м. Найдите площадь треугольника.

596. Отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к одному из катетов равно $\frac{13}{12}$, другой катет равен 15 см. Найдите периметр треугольника.

597. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна из них на 14 см больше другой, а диагональ прямоугольника равна 34 см.

Контрольные вопросы и задания

1 Что называют дискриминантом квадратного уравнения? Сколько корней может иметь квадратное уравнение?

2 Напишите формулу корней квадратного уравнения.

3 Напишите формулу корней квадратного уравнения, в котором второй коэффициент является чётным числом.

4 Сформулируйте и докажите теорему Виета. Чему равны сумма и произведение корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?

5 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Виета.

§ 8 КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

24. Квадратный трёхчлен и его корни

Каждое из выражений $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x + 2$, $2y^4 - y^3 + 5y^2 - 3y + 18$, $7z^6 - 6z^4 + z^2 - 2z + 3$ является многочленом с одной переменной.

Значение переменной, при котором многочлен обращается в нуль, называют *корнем многочлена*.

Найдём, например, корни многочлена $x^3 - x$. Для этого решим уравнение $x^3 - x = 0$. Разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$x\,(x - 1)\,(x + 1) = 0,$$

отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Таким образом, числа 0, 1, −1 — корни многочлена $x^3 - x$. Многочлен второй степени с одной переменной называют квадратным трёхчленом.

> **Определение.** Квадратным трёхчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Коэффициент a называют старшим коэффициентом, а c — свободным членом квадратного трёхчлена.

Примерами квадратных трёхчленов являются многочлены

$$3x^2 - 2x - 5, \qquad x^2 + 7x - 8, \qquad -x^2 + 2x + 5.$$

В первом из них $a = 3$, $b = -2$, $c = -5$, во втором — $a = 1$, $b = 7$, $c = -8$, в третьем — $a = -1$, $b = 2$, $c = 5$.

К квадратным трёхчленам относятся также и такие многочлены второй степени, у которых один из коэффициентов b либо c или даже оба равны нулю. Так, многочлен $7x^2 - x$ считают квадратным трёхчленом. У него $a = 7$, $b = -1$, $c = 0$.

Для того чтобы найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 1. Найдём корни квадратного трёхчлена $3x^2 - 2x - 5$.

▶ Решим уравнение

$$3x^2 - 2x - 5 = 0.$$

Имеем

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 64;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6};$$

$$x_1 = 1\frac{2}{3},\ x_2 = -1.$$

Значит, квадратный трёхчлен $3x^2 - 2x - 5$ имеет два корня: $1\frac{2}{3}$, и -1. ◁

Так как квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет те же корни, что и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то он может, как и квадратное уравнение, иметь два корня, один корень или не иметь корней. Это зависит от значения дискриминанта квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$, который называют также *дискриминантом квадратного трёхчлена*. Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня; если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень; если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет корней.

При решении задач иногда бывает удобно представить квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x - m)^2 + n$, где m и n — некоторые числа. Такое преобразование называется выделением квадрата двучлена из квадратного трёхчлена. Покажем на примере, как выполняется это преобразование.

Пример 2. Выделим из трёхчлена $3x^2 - 36x + 140$ квадрат двучлена.

▶ Вынесем за скобки множитель 3:

$$3x^2 - 36x + 140 = 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right).$$

Преобразуем выражение в скобках. Для этого представим $12x$ в виде произведения $2 \cdot 6 \cdot x$, а затем прибавим и вычтем 6^2. Получим

$$3x^2 - 36x + 140 = 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right) =$$

$$= 3\left(x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 - 6^2 + \frac{140}{3}\right) =$$

$$= 3\left((x-6)^2 + \frac{32}{3}\right) = 3(x - 6)^2 + 32.$$

Значит,

$$3x^2 - 36x + 140 = 3(x - 6)^2 + 32.$$ ◁

Рассмотрим задачу, при решении которой применяется выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена.

Пример 3. Докажем, что из всех прямоугольников с периметром 20 см наибольшую площадь имеет квадрат.

▶ Пусть одна сторона прямоугольника равна x см. Тогда другая сторона равна $10 - x$ см, а площадь прямоугольника равна $x(10 - x)$ см^2.

Раскрыв скобки в выражении $x(10 - x)$, получим $10x - x^2$. Выражение $-x^2 + 10x$ представляет собой квадратный трёхчлен, в котором $a = -1$, $b = 10$, $c = 0$. Выделим квадрат двучлена:

$$-x^2 + 10x = -(x^2 - 10x) =$$
$$= -(x^2 - 10x + 25 - 25) = -(x - 5)^2 + 25.$$

Так как выражение $-(x - 5)^2$ при любом $x \neq 5$ отрицательно, то сумма $-(x - 5)^2 + 25$ принимает наибольшее значение при $x = 5$. Значит, площадь будет наибольшей, когда одна из сторон прямоугольника равна 5 см. В этом случае другая сторона также равна 5 см, т. е. прямоугольник является квадратом. ◁

Упражнения

598. Какие из чисел -2, -1, 0, 2, 3 являются корнями многочлена $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$?

599. Найдите корни многочлена:
а) $x^2 - 7x$; б) $2x - 5$; в) $y^3 - 4y$; г) $y^4 - 16$.

600. Имеет ли корни многочлен:
а) $x^2 + 1$; б) $x^3 - 27$; в) $-2y^6 - 1$; г) $y^4 + 3y^2 + 7$?

601. Какие из чисел 1, 2, $3 - \sqrt{2}$, $-7 + \sqrt{2}$ являются корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 7$?

602. Найдите корни квадратного трёхчлена:
а) $x^2 + x - 6$;
б) $9x^2 - 9x + 2$;
в) $0{,}2x^2 + 3x - 20$;
г) $-2x^2 - x - 0{,}125$;
д) $0{,}1x^2 + 0{,}4$;
е) $-0{,}3x^2 + 1{,}5x$.

603. Найдите корни квадратного трёхчлена:
а) $10x^2 + 5x - 5$;
б) $-2x^2 + 12x - 18$;
в) $x^2 - 2x - 4$;
г) $12x^2 - 12$.

604. Имеет ли квадратный трёхчлен корни и если имеет, то сколько:

а) $5x^2 - 8x + 3$; в) $-7x^2 + 6x - 2$;
б) $9x^2 + 6x + 1$; г) $-x^2 + 5x - 3$?

605. Имеет ли квадратный трёхчлен корни и если имеет, то сколько:

а) $-4x^2 - 4x + 3$; в) $9x^2 - 12x + 4$;
б) $4x^2 - 4x + 3$; г) $9x^2 - 12x - 4$?

606. Сумма коэффициентов квадратного трёхчлена равна нулю, а его свободный член в 4 раза больше старшего коэффициента. Найдите корни этого трёхчлена.

607. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) $x^2 - 6x - 2$; в) $2x^2 - 4x + 10$;
б) $x^2 + 5x + 20$; г) $\frac{1}{2}x^2 + x - 6$.

608. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) $x^2 - 10x + 10$; в) $3x^2 + 6x - 3$;
б) $x^2 + 3x - 1$; г) $\frac{1}{4}x^2 - x + 2$.

609. (*Для работы в парах.*) Докажите, что при любом значении x квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - 6x + 10$ принимает положительное значение;
б) $5x^2 - 10x + 5$ принимает неотрицательное значение;
в) $-x^2 + 20x - 100$ принимает неположительное значение;
г) $-2x^2 + 16x - 33$ принимает отрицательное значение;
д) $x^2 - 0{,}32x + 0{,}0256$ принимает неотрицательное значение;
е) $4x^2 + 0{,}8x + 2$ принимает положительное значение.

1) Обсудите, какие преобразования трёхчленов надо выполнить для доказательства высказанных утверждений.
2) Распределите, кто выполняет задания а), в) и д), а кто — задания б), г) и е), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность проведённых доказательств и исправьте ошибки, если они допущены.

610. Даны квадратные трёхчлены

$$x^2 - 6x + 11 \quad \text{и} \quad -x^2 + 6x - 11.$$

Докажите, что первый из них не принимает отрицательных значений, а второй — положительных.

611. При каком значении x трёхчлен $2x^2 - 4x + 6$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

612. Дан квадратный трёхчлен $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$. Выясните, при каком значении x он принимает наименьшее значение и чему равно это значение трёхчлена.

613. (*Задача-исследование.*) Выясните, какой из прямоугольных треугольников с суммой катетов, равной 6 см, имеет наибольшую площадь. Вычислите эту площадь.

1) Обозначьте длину одного из катетов через x см и составьте выражение для вычисления площади треугольника.
2) Исследуйте, при каких значениях переменной составленное выражение принимает наибольшее значение.
3) Вычислите, чему равно значение площади треугольника при указанных значениях переменной.

614. С башни выпустили вверх стрелу из лука. Если начальная скорость стрелы равна 50 м/с, высота башни 20 м и t (с) — время полёта стрелы, то расстояние h (м) стрелы от поверхности земли в момент времени t (с) можно найти по формуле $h = -5t^2 + 50t + 20$ (приближённое значение ускорения свободного падения считается равным 10 м/с^2). Какой наибольшей высоты достигнет стрела?

П

615. Решите уравнение:
а) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$; б) $31x + 77 = 15(x + 1)^2$.

616. Разложите на множители многочлен:
а) $ab + 3b - 5a - 15$; б) $2xy - y + 8x - 4$.

25. Разложение квадратного трёхчлена на множители

Пусть требуется разложить на множители квадратный трёхчлен
$$3x^2 - 21x + 30.$$
Вынесем сначала за скобки старший коэффициент 3. Получим
$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x^2 - 7x + 10).$$
Для того чтобы разложить на множители трёхчлен
$$x^2 - 7x + 10,$$
представим $-7x$ в виде суммы одночленов $-2x$ и $-5x$ и применим способ группировки:
$$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 =$$
$$= x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5).$$
Значит,
$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x - 2)(x - 5).$$
При $x = 2$ и $x = 5$ произведение $3(x - 2)(x - 5)$, а следовательно, и трёхчлен $3x^2 - 21x + 30$ обращаются в нуль. Значит, числа 2 и 5 являются его корнями.

Итак, мы представили квадратный трёхчлен

$$3x^2 - 21x + 30$$

в виде произведения числа 3, т. е. старшего коэффициента, и двух линейных множителей. Первый из них представляет собой разность между переменной x и одним корнем трёхчлена, а второй — разность между переменной x и другим корнем.

Такое разложение можно получить для любого квадратного трёхчлена, имеющего корни. При этом считают, что если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то этот трёхчлен имеет два равных корня.

ТЕОРЕМА

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2).$$

● Вынесем за скобки в многочлене $ax^2 + bx + c$ множитель a. Получим

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Так как корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Отсюда

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2),\ \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Поэтому

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 =$$

$$= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) =$$

$$= (x - x_1)(x - x_2).$$

Итак,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).\ \circ$$

Покажем, что

если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.

Пусть квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. Предположим, что его можно представить в виде произведения многочленов первой степени:

$$ax^2 + bx + c = (kx + m)(px + q),$$

где k, m, p и q — некоторые числа, причём $k \neq 0$ и $p \neq 0$. Произведение $(kx + m)(px + q)$ обращается в нуль при $x = -\frac{m}{k}$ и $x = -\frac{q}{p}$. Следовательно, при этих значениях x обращается в нуль и трёхчлен $ax^2 + bx + c$, т. е. числа $-\frac{m}{k}$ и $-\frac{q}{p}$ являются его корнями. Мы пришли к противоречию, так как по условию этот трёхчлен корней не имеет. ○

Пример 1. Разложим на множители квадратный трёхчлен

$$2x^2 + 7x - 4.$$

▶ Решив уравнение $2x^2 + 7x - 4 = 0$, найдём корни трёхчлена:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -4.$$

По теореме о разложении квадратного трёхчлена на множители имеем

$$2x^2 + 7x - 4 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4).$$

Полученный результат можно записать иначе, умножив число 2 на двучлен $x - \frac{1}{2}$. Получим

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4). \ ◁$$

Пример 2. Разложим на множители квадратный трёхчлен

$$-4x^2 + 24x - 36.$$

▶ Решив уравнение $-4x^2 + 24x - 36 = 0$, найдём корни трёхчлена: $x_1 = x_2 = 3$.
Значит,

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - 3)(x - 3),$$

или иначе

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - 3)^2. \ ◁$$

Пример 3. Сократим дробь $\frac{3x + 2}{3x^2 - 13x - 10}$.

▶ Разложим на множители квадратный трёхчлен $3x^2 - 13x - 10$.

Его корни равны $-\frac{2}{3}$ и 5. Поэтому

$$3x^2 - 13x - 10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 5) = (3x + 2)(x - 5).$$

Значит,
$$\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}=\frac{3x+2}{(3x+2)(x-5)}=\frac{1}{x-5}.$$ ◁

Упражнения

617. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $3x^2-24x+21$; г) $x^2-12x+20$; ж) $2x^2-5x+3$;
б) $5z^2+10z-15$; д) $-y^2+16y-15$; з) $5y^2+2y-3$;
в) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$; е) $-t^2-8t+9$; и) $-2n^2+5n+7$.

618. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $2x^2-2x+\frac{1}{2}$; в) $16a^2+24a+9$;
б) $-9x^2+12x-4$; г) $0{,}25m^2-2m+4$.

619. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $2x^2+12x-14$; в) $3x^2+5x-2$;
б) $-m^2+5m-6$; г) $6x^2-13x+6$.

620. Докажите тождество:

а) $10x^2+19x-2=10(x-0{,}1)(x+2)$;
б) $0{,}5(x-6)(x-5)=0{,}5x^2-5{,}5x+15$.

621. Можно ли представить квадратный трёхчлен в виде произведения многочленов первой степени:

а) $-3y^2+3y+11$; в) $x^2-7x+11$;
б) $4b^2-9b+7$; г) $3y^2-12y+12$?

622. Можно ли разложить на множители квадратный трёхчлен, коэффициенты которого равные, отличные от нуля числа?

623. Покажите, что существует квадратный трёхчлен, имеющий корни, коэффициенты которого — натуральные числа вида n, $2n$, $3n$ (расположенные в произвольном порядке). Разложите этот трёхчлен на множители.

624. Сократите дробь:

а) $\frac{4x+4}{3x^2+2x-1}$; в) $\frac{16-b^2}{b^2-b-12}$; д) $\frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$;

б) $\frac{2a^2-5a-3}{3a-9}$; г) $\frac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$; е) $\frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$.

625. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-11x+24}{x^2-64}$; б) $\frac{2y^2+9y-5}{4y^2-1}$.

626. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36-x^2}{6-7x+x^2}$ при $x = -9; -99; -999;$

б) $\frac{4x^2+8x-32}{4x^2-16}$ при $x = -1; 5; 10.$

627. Чем различаются графики функций $y = x - 4$ и $y = \frac{x^2-6x+8}{x-2}$?

П

628. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-1}{2}-11x=11;$ в) $x-3=\frac{1-x^2}{3};$

б) $\frac{x^2+x}{2}=\frac{8x-7}{3};$ г) $\frac{2-x^2}{7}=\frac{x}{2}.$

629. Разложите на множители многочлен:

а) $4x^2 - 6x + 2xy - 3y;$ б) $4a^3 + 2b^3 - 2a^2b - 4ab^2.$

630. В какой координатной четверти расположена точка пересечения графиков функций $f(x) = 0{,}8x + 2{,}1$ и $g(x) = -0{,}9x + 3$?

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение квадратного трёхчлена. Сколько корней может иметь квадратный трёхчлен?
2. Покажите на примере выражения $3x^2 - 12x + 32$, как можно выделить квадрат двучлена из квадратного трёхчлена.
3. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на множители квадратного трёхчлена, имеющего корни.

§ 9 ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

26. Решение дробных рациональных уравнений

В уравнениях

$$2x + 5 = 3(8 - x),$$
$$x-\frac{5}{x}=-3x+19,$$
$$\frac{x-4}{2x+1}=\frac{x-9}{x}$$

левая и правая части являются рациональными выражениями. Такие уравнения называют *рациональными уравнениями*.

Рациональное уравнение, в котором и левая, и правая части являются целыми выражениями, называют *целым*. Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют *дробным*.

Так, уравнение

$$2x + 5 = 3(8 - x)$$

целое, а уравнения

$$x - \frac{5}{x} = -3x + 19 \quad \text{и} \quad \frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$$

дробные рациональные.

Пример 1. Решим целое уравнение

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6}.$$

▶ Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на число 6. Получим уравнение, равносильное данному, не содержащее дробей:

$$3(x - 1) + 4x = 5x.$$

Решив его, найдём, что $x = 1{,}5$. ◁

Пример 2. Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}. \tag{1}$$

▶ По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на выражение $x(x - 5)$. Получим целое уравнение

$$x(x - 3) + x - 5 = x + 5. \tag{2}$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному, так как мы умножили обе его части не на число, отличное от нуля, а на выражение, содержащее переменную, которое может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1).

Упростив уравнение (2), получим квадратное уравнение

$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Его корни — числа -2 и 5.

Проверим, являются ли числа -2 и 5 корнями уравнения (1).

При $x = -2$ общий знаменатель $x(x - 5)$ не обращается в нуль. Значит, число -2 — корень уравнения (1).

При $x = 5$ общий знаменатель обращается в нуль и выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл. Поэтому число 5 не является корнем уравнения (1).

Итак, корнем уравнения (1) служит только число -2. ◁

Вообще при решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить получившееся целое уравнение;
4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Пример 3. Решим уравнение $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$.

▶ Имеем $\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{4-x}{x(x+2)}$.

Общий знаменатель дробей равен $x(x - 2)(x + 2)$.
Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

$$2x - (x + 2) = (4 - x)(x - 2).$$

Отсюда

$$2x - x - 2 = 4x - x^2 - 8 + 2x,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$D = 25 - 24 = 1,$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2},$$
$$x = \frac{5 \pm 1}{2},$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3.$$

Если $x = 2$, то $x(x - 2)(x + 2) = 0$;
если $x = 3$, то $x(x - 2)(x + 2) \neq 0$.

Значит, корнем исходного уравнения является число 3.

Ответ: 3. ◁

Упражнения

631. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{y^2}{y+3}=\frac{y}{y+3}$;

б) $\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}$;

в) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{-7x+6}{2-x}$;

г) $\frac{y^2-6y}{y-5}=\frac{5}{5-y}$;

д) $\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$;

е) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$;

ж) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

з) $\frac{1+3x}{1-2x}=\frac{5-3x}{1+2x}$;

и) $\frac{x-1}{2x+3}-\frac{2x-1}{3-2x}=0$.

632. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-5}{x+5}-4=0$;

б) $\frac{12}{7-x}=x$;

в) $\frac{x^2-4}{4x}=\frac{3x-2}{2x}$;

г) $\frac{10}{2x-3}=x-1$;

д) $\frac{8}{x}=3x+2$;

е) $\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{2x}{3}$;

ж) $\frac{2x^2-5x+3}{10x-5}=0$;

з) $\frac{4x^3-9x}{x+1{,}5}=0$.

633. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{7x}{x^2+1}$;

б) $\frac{y^2}{y^2-6y}=\frac{4(3-2y)}{y(6-y)}$;

в) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$;

г) $\frac{8y-5}{y}=\frac{9y}{y+2}$;

д) $\frac{x^2+3}{x^2+1}=2$;

е) $\frac{3}{x^2+2}=\frac{1}{x}$;

ж) $x+2=\frac{15}{4x+1}$;

з) $\frac{x^2-5}{x-1}=\frac{7x+10}{9}$.

634. Решите уравнение:

а) $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1;$

б) $\frac{2y-2}{y+3}+\frac{y+3}{y-3}=5;$

в) $\frac{4}{9y^2-1}-\frac{4}{3y+1}=\frac{5}{1-3y};$

г) $\frac{4}{x+3}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x-3}-1;$

д) $\frac{3}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{5-x}{x^2-x};$

е) $\frac{3y-2}{y}-\frac{1}{y-2}=\frac{3y+4}{y^2-2y}.$

635. При каком значении x:

а) значение функции $y=\frac{2x-1}{x+6}$ равно 5; −3; 0; 2;

б) значение функции $y=\frac{x^2+x-2}{x+3}$ равно −10; 0; −5?

636. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-6}{x+5}=2;$

б) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12};$

в) $\frac{7y-3}{y-y^2}=\frac{1}{y-1}-\frac{5}{y(y-1)};$

г) $\frac{3}{y-2}+\frac{7}{y+2}=\frac{10}{y};$

д) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3};$

е) $\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+2}=8\frac{2}{3}.$

637. Найдите значение переменной y, при котором:

а) сумма дробей $\frac{3y+9}{3y-1}$ и $\frac{2y-13}{2y+5}$ равна 2;

б) разность дробей $\frac{5y+13}{5y+4}$ и $\frac{4-6y}{3y-1}$ равна 3;

в) сумма дробей $\frac{y+1}{y-5}$ и $\frac{10}{y+5}$ равна их произведению;

г) разность дробей $\frac{6}{y-4}$ и $\frac{y}{y+2}$ равна их произведению.

638. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{y-2}-\frac{4}{y-3}=\frac{1}{y};$

б) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x+3};$

в) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x};$

г) $\frac{10}{y^3-y}+\frac{1}{y-y^2}=\frac{1}{1+y};$

д) $1+\frac{45}{x^2-8x+16}=\frac{14}{x-4};$

е) $\frac{5}{x-1}-\frac{4}{3-6x+3x^2}=3.$

639. Решите уравнение:

а) $\frac{10}{(x-5)(x+1)}+\frac{x}{x+1}=\frac{3}{x-5}$;

б) $\frac{17}{(x-3)(x+4)}-\frac{1}{x-3}=\frac{x}{x+4}$;

в) $\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2-1}=0$;

г) $\frac{4}{9x^2-1}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{4}{9x^2-6x+1}$.

640. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{21}{x+1}=\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}$;

б) $\frac{2}{y^2-3y}-\frac{1}{y-3}=\frac{5}{y^3-9y}$;

в) $\frac{18}{4x^2+4x+1}-\frac{1}{2x^2-x}=\frac{6}{4x^2-1}$;

г) $\frac{3(4y^2+10y-7)}{16y^2-9}=\frac{3y-7}{3-4y}+\frac{6y+5}{3+4y}$.

641. *(Для работы в парах.)* Решите уравнение:

а) $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-x^2}}}=1\frac{7}{24}$; б) $1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10-x^2}}}=\frac{3}{5}$.

1) Обсудите, какие преобразования и в какой последовательности надо выполнить, чтобы найти корни уравнения.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли решено уравнение.

642. Решите графически уравнение:

а) $\frac{6}{x}=x$; б) $\frac{6}{x}=-x+6$.

643. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение $\frac{1}{x}=ax+b$, где a и b — некоторые числа. Для каждого случая укажите, каким условиям должны удовлетворять числа a и b.

644. Найдите значение выражения $x^2 - 2xy + y^2$ при $x = 3 + \sqrt{5}$, $y = 3 - \sqrt{5}$.

645. Определите, принадлежат ли графику функции $y = x^2 + 2x + 5$ точки $A(1{,}5;\ 7{,}25)$, $B(-3{,}2;\ 9)$ и $C(\sqrt{3} - 1;\ 7)$.

646. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \sqrt{x}$;

б) $\sqrt{x} - \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

647. Сравните с нулём значение выражения:

а) $\dfrac{3ab}{a^2 + b^2}$, где $a > 0$, $b < 0$;

б) $\dfrac{5a^3b^2}{a + b}$, где $a < 0$, $b < 0$.

27. Решение задач

Решение многих задач приводит к дробным рациональным уравнениям.

Задача 1. Моторная лодка прошла 25 км по течению реки и 3 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

▶ Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость лодки по течению $(x + 3)$ км/ч, а против течения $(x - 3)$ км/ч. По течению реки 25 км лодка прошла за $\dfrac{25}{x + 3}$ ч, а против течения 3 км — за $\dfrac{3}{x - 3}$ ч. Значит, время, затраченное на весь путь, равно

$$\left(\frac{25}{x + 3} + \frac{3}{x - 3}\right) \text{ ч.}$$

По условию задачи на весь путь лодка затратила 2 ч. Следовательно,

$$\frac{25}{x + 3} + \frac{3}{x - 3} = 2.$$

Решив это уравнение, найдём его корни: $x_1 = 2$ и $x_2 = 12$.

По смыслу задачи скорость лодки в стоячей воде должна быть больше скорости течения. Этому условию удовлетворяет второй корень — число 12 и не удовлетворяет первый.

Ответ: 12 км/ч. ◁

Задача 2. К сплаву меди и цинка, содержащему 10 кг цинка, добавили 20 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве уменьшилось на 25%. Какова была первоначальная масса сплава?

▶ Пусть первоначальная масса сплава была равна x кг. Тогда меди в нём было $(x - 10)$ кг и она составляла

$$\frac{x-10}{x} \cdot 100\%$$

от массы сплава. Масса нового сплава, полученного после добавления 20 кг цинка, оказалась равной $(x + 20)$ кг, а медь в нём составила

$$\frac{x-10}{x+20} \cdot 100\%.$$

По условию задачи содержание меди уменьшилось на 25%. Следовательно,

$$\frac{x-10}{x} \cdot 100\% - \frac{x-10}{x+20} \cdot 100\% = 25\%.$$

Отсюда

$$\frac{(x-10) \cdot 4}{x} - \frac{(x-10) \cdot 4}{x+20} = 1.$$

Решив это уравнение, найдём, что оно имеет два корня: $x_1 = 20$ и $x_2 = 40$. Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 20 кг или 40 кг. ◁

Упражнения

648. Знаменатель обыкновенной дроби больше её числителя на 3. Если к числителю этой дроби прибавить 7, а к знаменателю — 5, то она увеличится на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

649. Из города в село, находящееся от него на расстоянии 120 км, выехали одновременно два автомобиля. Скорость одного была на 20 км/ч больше скорости другого, и поэтому он пришёл к месту назначения на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого автомобиля.

650. Один из лыжников прошёл расстояние в 20 км на 20 мин быстрее, чем другой. Найдите скорость каждого лыжника, зная, что один из них двигался со скоростью, на 2 км/ч большей, чем другой.

651. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый автомобиль приезжает на место на 1 ч раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля, зная, что расстояние между городами равно 560 км.

652. Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой шёл по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?

653. В прошлом году в фермерском хозяйстве собрали 192 ц пшеницы. В этом году благодаря использованию новых технологий удалось повысить урожайность пшеницы на 2 ц с гектара. В результате такой же урожай собрали с площади, на 0,4 га меньшей. Какова была урожайность пшеницы в хозяйстве в прошлом году?

654. На молодёжном карнавале Андрей купил билеты лотереи «Надежда» на 240 р. Если бы он потратил эти деньги на билеты лотереи «Удача», то смог бы купить на 4 билета больше, так как они были на 5 р. дешевле. Сколько стоил билет лотереи «Надежда»?

655. Предприниматель приобрёл акции одинаковой стоимости на 110 000 р. Если бы он отложил покупку на год, то сумел бы приобрести на эту сумму на 20 акций меньше, так как цена одной акции данного вида возросла за этот год на 50 р. Сколько акций приобрёл предприниматель?

656. *Старинная задача.* Несколько человек обедали вместе и по счёту должны были уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег. Поэтому каждому из остальных пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, чем приходилось на его долю. Сколько человек обедало?

657. Сотрудники отдела решили совместно приобрести однокамерный холодильник за 14 400 р. Однако трое отказались участвовать в покупке, и остальным пришлось уплатить на 400 р. больше, чем предполагалось. Сколько сотрудников работает в отделе?

658. Турист проплыл на лодке против течения реки 6 км и по озеру 15 км, затратив на путь по озеру на 1 ч больше, чем на путь по реке. Зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч, найдите скорость лодки при движении по озеру.

659. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 15 км/ч, прошла по течению реки 35 км, а против течения — 25 км. По течению она шла столько же времени, сколько против течения. Какова скорость течения реки?

660. Катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 км/ч, прошёл 36 км против течения и 22 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки.

661. В водный раствор соли добавили 100 г воды. В результате концентрация соли в растворе понизилась на 1%. Определите первоначальную массу раствора, если известно, что в нём содержалось 30 г соли.

662. Сплав золота и серебра содержал 40 г золота. После того как к нему добавили 50 г золота, получили новый сплав, в котором содержание золота возросло на 20%. Сколько серебра было в сплаве?

663. При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно для разгрузки баржи, если известно, что первому крану для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?

664. Два 3D-принтера разной мощности изготовили за 2 ч 55 мин некоторое количество деталей. За какое время это количество деталей мог бы изготовить первый 3D-принтер, если известно, что ему для этого потребуется на 2 ч больше, чем второму 3D-принтеру?

665. Велосипедист проехал из посёлка до станции с некоторой постоянной скоростью, а возвращался со скоростью, на 5 км/ч большей. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что его средняя скорость на всём пути следования составляла 12 км/ч?

666. Мотоциклист половину пути проехал с некоторой постоянной скоростью, а затем снизил скорость на 20 км/ч. Какова была скорость мотоциклиста на первой половине пути, если известно, что средняя скорость на всём пути составила 37,5 км/ч?

П

667. Докажите, что:

а) $\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}+\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}=22$; б) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=18$.

П

668. Найдите значение выражения:

а) $\frac{xy}{x+y}$ при $x = 5 + 2\sqrt{6}$, $y = 5 - 2\sqrt{6}$;

б) $\frac{x^2+y^2}{xy}$ при $x = \sqrt{11} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$.

669. Найдите значение q, при котором разность корней уравнения $x^2 - 10x + q = 0$ равна 6.

670. Составьте квадратное уравнение, зная его корни:

а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; б) $2 - \sqrt{3}$ и $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример целого уравнения и пример дробного рационального уравнения.
2. На примере уравнения $\frac{6}{x^2-1} - 1 = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}$ объясните, как решают дробные рациональные уравнения.

§ 10 УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

28. Уравнение с двумя переменными и его график

В 7 классе рассматривались уравнения с двумя переменными, имеющие вид $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа. Такие уравнения, как известно, называются *линейными*. Но уравнения с двумя переменными могут быть и нелинейными. Так, уравнения $x^2 = 4 - y^2$, $xy - 6 = 0$, $5x^3 + y^2 = 9$ линейными не являются.

Решение уравнения с двумя переменными в общем случае определяется так же, как и решение линейного уравнения.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Так, если в уравнение $5x^3 + y^2 = 9$ подставить вместо переменной x число 1, а вместо переменной y число 2, то получится верное равенство $5 \cdot 1^3 + 2^2 = 9$. Пара чисел (1; 2), в которой на первом месте указано значение переменной x, а на втором — значение переменной y, является решением уравнения $5x^3 + y^2 = 9$. Заметим, что уравнение с двумя переменными имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными уравнениями*.

Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной: если левая часть уравнения с двумя переменными есть многочлен стандартного вида, а правая — число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена.

Для того чтобы выяснить, какова степень уравнения с двумя переменными, его заменяют равносильным уравнением, левая часть которого — многочлен стандартного вида, а правая — число 0. Например, уравнение

$$(x^3 + y)^2 = x^6 - 1$$

равносильно уравнению

$$2x^3y + y^2 + 1 = 0$$

и, значит, является уравнением четвёртой степени.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство.

Из курса алгебры 7 класса известно, что графиком линейного уравнения $ax + by = c$, в котором $a \neq 0$ или $b \neq 0$, является прямая. Например, графики линейных уравнений

$$y + 3,5 = 0, \; y = 0,5x + 2,5$$

изображены на рисунке 23.

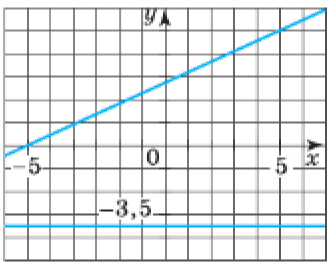


Рис. 23

Вам известны также графики некоторых уравнений второй степени. Например, графиком уравнения $x^2 - 2y = 0$ является парабола, графиком уравнения $xy - 12 = 0$ — гипербола. Эти графики изображены на рисунках 24, *а* и *б*.

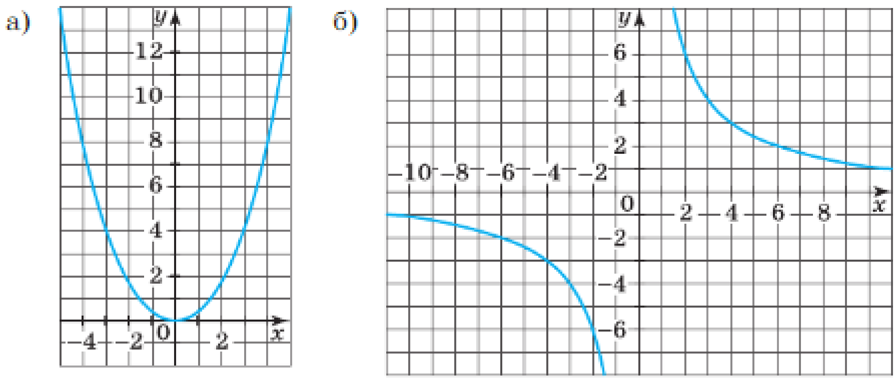


Рис. 24

Вообще графики уравнений с двумя переменными весьма разнообразны. На рисунке 25 изображены кривые, которые названы в честь европейских математиков XVII века Якоба Бернулли и Рене Декарта: лемниската Бернулли (рис. 25, *а*) и декартов лист (рис. 25, *б*).

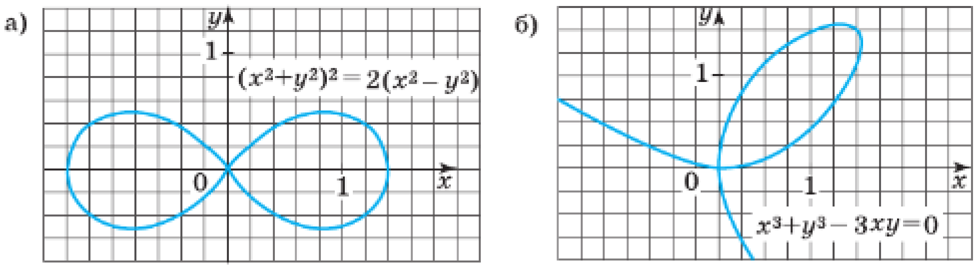


Рис. 25

Упражнения

671. Является ли пара чисел $(-1; 3)$ решением уравнения:

а) $x^2 - y + 2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 10$;

б) $xy + y = 6$; г) $x^2 - y^2 + 8 = 0$?

672. Найдите три каких-нибудь решения уравнения:

а) $x - 2y = 8$; в) $x - xy = 12$;

б) $x + 0y = 10$; г) $(x + y)(y - 2) = 0$.

673. Определите степень уравнения:

а) $x + 4xy = 5$; в) $8x^6 - y^2 = 2x^4(4x^2 - y)$;

б) $x^5 + 8x^3y^3 = 1$; г) $(x - 2y)^2 - x^2 = 4y(y - x) + 5x$.

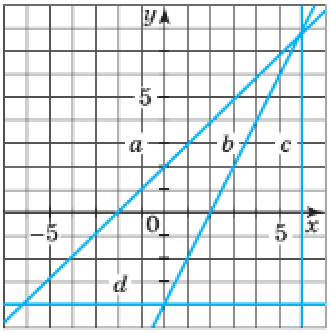


Рис. 26

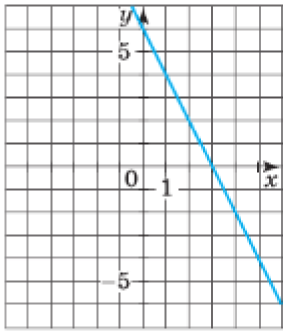


Рис. 27

674. Графики линейных уравнений $2x - y = 4$, $x - y = -2$, $y + 4 = 0$, $x - 6 = 0$ изображены на рисунке 26. Для каждой из прямых, изображённых на этом рисунке, укажите её уравнение.

675. Постройте график уравнения:

а) $3x + 0y = 12$;
б) $0x + y = 1$;
в) $x = 5$;
г) $y = 1{,}5$;
д) $(x - 2)(y - 3) = 0$;
е) $(x + 3)(y + 1) = 0$;
ж) $|x| = 2$;
з) $|y| = 3$.

676. Объясните, почему графиком уравнения $x^2 - y^2 = 0$ является пара прямых $y = x$ и $y = -x$.

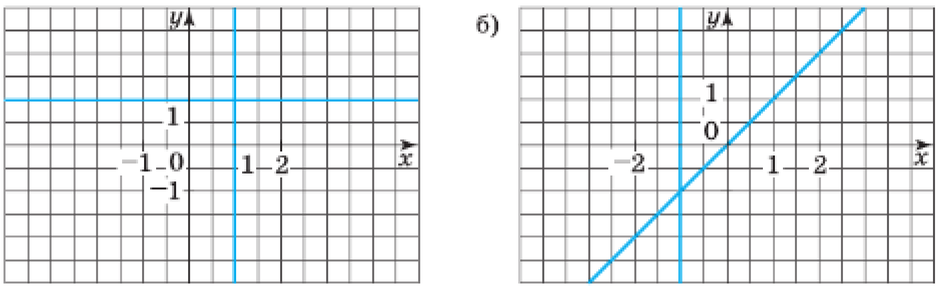
677. Постройте на координатной плоскости график линейного уравнения:

а) $3x - 2y = 5$; б) $x + 2y - 3 = 0$; в) $3x - 4y = -1$.

678. На рис. 27 изображён график одного из следующих линейных уравнений: $x - y = -7$, $x - y = 4$, $2x + y = 6$, $x + y = 5$. Укажите это уравнение.

679. Составьте уравнение, графиком которого является пара прямых, изображённых на рисунке 28.

а) б)



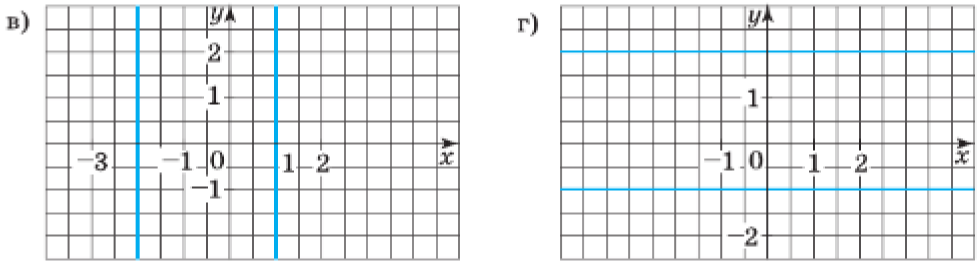


Рис. 28

680. Составьте уравнение с двумя переменными, график которого изображён на рисунке 29.

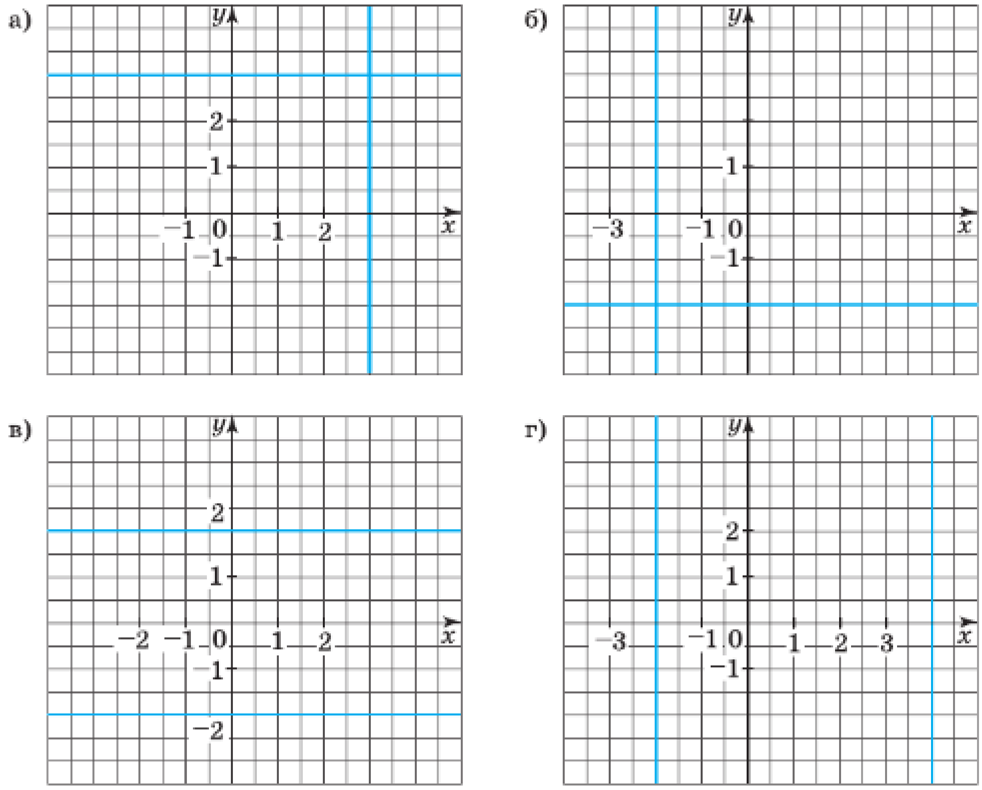


Рис. 29

681. Постройте график уравнения:

а) $y - x^2 = 0$; в) $0,5xy + 1,5 = 0$;

б) $y - x^3 = 0$; г) $y + x^3 = 0$.

682. (*Для работы в парах.*) Постройте график уравнения:

а) $(x-5)(y+6)=0$; б) $(x-4)(x+2)=0$.

1) Обсудите, какая фигура является графиком уравнения в каждом случае.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли построены графики уравнений.

683. Найдите все целые решения уравнения:

а) $xy=2$; б) $x^2-y^2=3$.

П

684. Автомобиль двигался 1 ч 20 мин со скоростью a км/ч и 45 мин со скоростью b км/ч. Какой путь проехал автомобиль?

685. Решите уравнение:

а) $\frac{(2x+1)(2x-3)}{4}=x^2-1$; б) $x^2-\frac{(2x-1)x}{2}=2$.

686. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-1}{6x^2}:\frac{x^2+x}{3}$; б) $\frac{16n^2-1}{n^2-2n}:\frac{8n}{3n-6}$; в) $\frac{x-4}{y^2-xy}:\frac{5x-20}{x^2-xy}$.

29. Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными

В 7 классе вам приходилось решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными, например:

$$\begin{cases}x-2y=5,\\x+y=3;\end{cases}\quad\begin{cases}7y+x=6,\\4x-y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=0{,}5x-0{,}65,\\2+y=0{,}11x.\end{cases}$$

Такие системы решались разными способами: алгебраически — методами подстановки и сложения, а также графически.

При графическом способе решения на координатной плоскости строят две прямые — графики уравнений системы. Возможны три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости: прямые пересекаются; прямые параллельны; прямые совпадают. Значит, при решении систем двух линейных уравнений с двумя переменными возможны три случая: система имеет единственное решение; система не имеет решений; система имеет бесконечно много решений.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными может быть представлена в виде

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$$

Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются, и система имеет единственное решение; если $k_1 = k_2$, но $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны и система не имеет решений; если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают, и система имеет бесконечно много решений (это решения уравнения системы).

Сделанный вывод позволяет, рассмотрев уравнения данной системы, не решая её, сказать, имеет ли эта система решение, и если имеет, то сколько.

Например, система уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 0{,}5x + y = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение. В самом деле, выразив в каждом уравнении y через x, получим систему $\begin{cases} y = 1{,}5x - 2, \\ y = -0{,}5x + 2. \end{cases}$

Так как угловые коэффициенты прямых графиков уравнений системы различны ($k_1 = 1{,}5$, $k_2 = -0{,}5$), то прямые пересекаются, и система имеет единственное решение.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что система $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ не имеет решений, а система $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений (решения системы — это решения уравнения $2x - 3y = 5$).

Упражнения

687. Выясните, имеет ли система решения и сколько:

а) $\begin{cases} 2x - 6y = 10, \\ 8y = 7 - 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 4x, \\ x - 8 = -6y; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3 - 3y = 4x, \\ -8x = 6y - 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 12 = 8y, \\ 1{,}5x - 4y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + 4y = 5, \\ x - y + 3 = 0. \end{cases}$

688. (*Для работы в парах.*) Имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} 7x + y = 8, \\ x - y + 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6y - 4x = 7, \\ 8x - 12y = -14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ y = -4x? \end{cases}$

1) Обсудите друг с другом, от чего зависит ответ на вопрос задачи.

2) Выполните совместно задание а).
3) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
4) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.

689. Выясните, каково взаимное расположение в координатной плоскости графиков уравнений данной системы и сделайте вывод о том, имеет ли система решение, и, если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 3x + 2y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2y - x = 4, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 0{,}5x + 2, \\ y = 0{,}5x - 4. \end{cases}$

690. Прямая a задана уравнением $x + 2y = 5$. Среди уравнений прямых: $x + y = 5$; $\frac{1}{4}y - 4x = 0$; $6y + 3x = 10$; $0{,}6x - 3 = -1{,}2$; $2x + 4y = 10$; $2x + 4y = 9$; $15 - 3x = 6y$; $0{,}5y + 0{,}25x = 4{,}8$ найдите те, которые вместе с уравнением прямой a образуют систему: 1) имеющую единственное решение; 2) не имеющую решений; 3) имеющую бесконечно много решений.

691. Используя графики уравнений, изображённые на рисунке 30, объясните графический смысл равносильности систем уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

и $\begin{cases} (2x - y) + (x + y) = 5 + 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

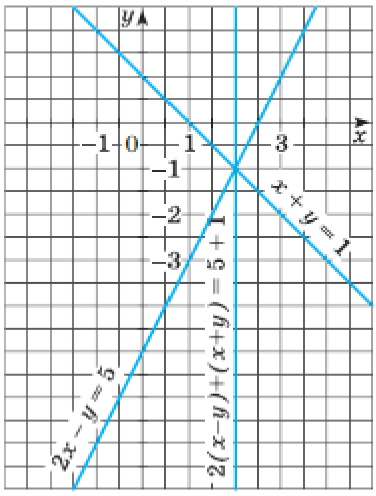


Рис. 30

692. В системе двух уравнений с двумя переменными первым является уравнение $y - |x| = 0$, а вторым — уравнение вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа. Известно, что прямая — график второго уравнения пересекает ось x в точке $(-3; 0)$. Подберите в уравнении $y = kx + b$ коэффициенты k и b так, чтобы система:
1) имела два решения;
2) имела одно решение;
3) не имела решений.

П

693. Из города A в город B автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, а обратно — со скоростью 90 км/ч. При этом путь из города B в город A занял на 1 ч меньше, чем путь из города A в город B. Найдите расстояние между городами A и B.

694. Улитка ползёт по стволу дерева в течение получаса со скоростью 0,25 м/мин. Постройте график движения улитки.

695. Разложите на множители:
а) $16m^2 - 25n^4$; в) $(2a + 3)^2 - 4$;
б) $0{,}09a^4 - 9b^2$; г) $36 - (1 - 5x)^2$.

30. Графический способ решения систем уравнений

Графический способ решения систем двух уравнений с двумя переменными состоит в следующем: строят графики уравнений, входящих в систему; находят точки пересечения графиков или устанавливают, что таких точек нет; находят координаты точек пересечения графиков. Найденные пары чисел и являются решениями системы.

Таким образом, *решить графически систему уравнений — это значит найти координаты общих точек графиков уравнений*. В этом пункте графический способ будет применяться для решения систем уравнений, в которых одно или оба уравнения не являются линейными.

Пример. Решим с помощью графиков систему уравнений

$$\begin{cases} xy - 6 = 0, \\ x^2 + 7x = 2y. \end{cases}$$

▶ Построим в одной системе координат графики уравнений, входящих в систему. Для этого выразим из каждого уравнения переменную y через переменную x. Получим систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ y = 0{,}5x^2 + 3{,}5x. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является гипербола, а графиком второго — парабола. Координаты любой точки гиперболы являются решением уравнения $y = \frac{6}{x}$, а координаты любой точки параболы — решением уравнения $y = 0{,}5x^2 + 3{,}5x$.

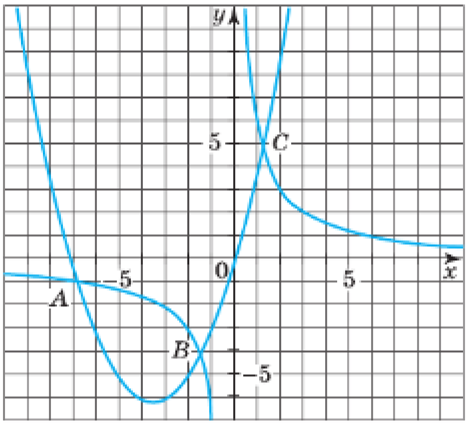


Рис. 31

Значит, координаты любой точки пересечения гиперболы и параболы удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, т. е. являются решением рассматриваемой системы.

Мы видим, что гипербола и парабола пересекаются в трёх точках (рис. 31). Это означает, что рассматриваемая система имеет три решения.

С помощью рисунка найдём приближённые значения координат точек A, B и C. Получим: $A(-6{,}8;\ -1)$, $B(-1{,}5;\ -4)$; $C(1{,}2;\ 5)$.

Следовательно, решениями системы являются следующие пары чисел: $x_1 \simeq -6{,}8$, $y_1 \simeq -1$; $x_2 \simeq -1{,}5$, $y_2 \simeq -4$; $x_3 \simeq 1{,}2$, $y_3 \simeq 5$. Найденные решения данной системы являются приближёнными. ◁

Упражнения

696. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 6x + 5y = -4 \end{cases}$$

пара чисел: а) $(-2;\ 1)$; б) $(1;\ -2)$?

697. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

698. Изобразив схематически графики уравнений, выясните, имеет ли решения система уравнений и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ xy = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 8, \\ y = -x^2 + 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ xy = 3. \end{cases}$

699. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

П

700. Среди данных уравнений найдите уравнения параболы, гиперболы, прямой:

а) $xy = -3$; в) $\frac{1}{4}y - x^2 = -1$; д) $1 + 2x = 0$;

б) $6y - 2 = 0$; г) $10 + 5xy = 0$; е) $2x - 2y = 5$.

Постройте график каждого уравнения.

701. Упростите выражение:

а) $\frac{c-1}{12c} + \frac{2c+7}{12c} - \frac{6-3c}{12c}$;

б) $\frac{a-4b}{2ab} - \frac{2a-6b}{2ab} - \frac{3a-b}{2ab}$;

в) $\frac{17x-4y}{21xy} + \frac{8x+9y}{21xy} - \frac{11x-16y}{21xy}$.

31. Алгебраический способ решения систем уравнений

Основным способом решения систем уравнений с двумя переменными является алгебраический способ.

Рассмотрим сначала систему уравнений с двумя переменными, составленную из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени. Такую систему всегда можно решить способом подстановки. Для этого поступают следующим образом:

1) выражают из уравнения первой степени одну переменную через другую;
2) подставляют полученное выражение в уравнение второй степени, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующие значения второй переменной.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

▶ Выразим из второго уравнения переменную x через y:

$$x = 1 - 2y.$$

Подставим в первое уравнение вместо x выражение $1 - 2y$, получим уравнение с переменной y:

$$(1 - 2y)^2 - 3(1 - 2y)y - 2y^2 = 2.$$

После упрощения получим равносильное уравнение

$$8y^2 - 7y - 1 = 0.$$

Решив его, найдём, что $y_1 = -\frac{1}{8}$, $y_2 = 1$.

Соответствующие значения x можно найти, воспользовавшись формулой $x = 1 - 2y$.

Подставив в формулу $x = 1 - 2y$ значение $y_1 = -\frac{1}{8}$, получим $x_1 = 1\frac{1}{4}$.

Подставив в формулу $x = 1 - 2y$ значение $y_2 = 1$, получим $x_2 = -1$.

Итак, система имеет два решения:

$$x_1 = 1\frac{1}{4},\ y_1 = -\frac{1}{8} \text{ и } x_2 = -1,\ y_2 = 1.$$

Ответ можно записать также в виде пар: $\left(1\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, $(-1; 1)$. ◁

Если система состоит из двух уравнений второй степени с двумя переменными, то найти её решения обычно бывает трудно. В отдельных случаях такие системы удаётся решить, используя способ подстановки или способ сложения.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

▶ Воспользовавшись тем, что $x \neq 0$, выразим из второго уравнения переменную y через x:

$$y = \frac{6}{x}$$

Подставим в первое уравнение вместо y выражение $\frac{6}{x}$. Получим уравнение

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5.$$

Решив его, найдём, что $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

По формуле $y = \frac{6}{x}$ находим соответствующие значения y:

$$y_1 = -2,\ y_2 = 2.$$

Значит, система имеет два решения:

$$x_1 = -3,\ y_1 = -2 \text{ и } x_2 = 3,\ y_2 = 2.$$

Ответ: $(-3; -2)$, $(3; 2)$. ◁

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2y^2+x=-6, \\ x^2-3y^2=-11. \end{cases}$$

▶ С помощью почленного сложения левых и правых частей уравнений можно исключить слагаемые, содержащие переменную y. Для этого надо уравнять коэффициенты членов, содержащие y^2. Умножим обе части первого уравнения на 3, а второго — на −2. Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} 3x^2-6y^2+3x=-18, \\ -2x^2+6y^2=22. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части уравнений системы, получаем уравнение с одной переменной $x^2 + 3x = 4$. Решив его, найдём: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.
Соответствующие значения y вычислим, используя второе уравнение исходной системы $3y^2 = x^2 + 11$: если $x = -4$, то $y = -3$ или $y = 3$; если $x = 1$, то $y = -2$ или $y = 2$.

Ответ: (−4; 3), (−4; −3), (1; 2), (1; −2). ◁

Упражнения

702. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x = y + 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - 2y = 26; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy + x = -4, \\ x - y = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 9, \\ y^2 + x = 29. \end{cases}$

703. Решите систему уравнений, используя способ подстановки:

а) $\begin{cases} x = 3 - y, \\ y^2 - x = 39; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 1 + x, \\ x + y^2 = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y = 14, \\ y - x = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + xy = 6. \end{cases}$

704. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 2{,}5, \\ xy = 1{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 17. \end{cases}$

705. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = -20; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 0,8, \\ xy = 2,4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = -3. \end{cases}$

706. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ 5x^2 - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x^2 - y^2 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y^2 = 2, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 32, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$

707. Решите систему уравнений, используя способ сложения или подстановки:

а) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x^2 - y^2 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + 4y = 10, \\ x - 2y = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - xy = 33, \\ 4x - y = 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8,5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 5xy + y^2 = 16. \end{cases}$

708. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 4y = 5(x - y), \\ x^2 - y^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u - v = 6(u + v), \\ u^2 - v^2 = 6. \end{cases}$

709. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0,5x^2 - 2, \\ y - x = 2 \end{cases}$$

сначала графическим способом, а затем аналитическим.

710. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u + 2v = 4, \\ u^2 + uv - v = -5. \end{cases}$

711. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$

712. Не выполняя построения:

а) определите, пересекает ли парабола $y = x^2 - 8x + 16$ прямую $2x - 3y = 0$ и если да, то в каких точках;

б) найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = 2x^2 + 9x - 5$.

713. Докажите, что прямая $x - y = 4$ имеет одну общую точку с параболой $y = x^2 - 5x + 5$, и найдите координаты этой общей точки.

714. Докажите, что парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ и прямая $2x + y + 3 = 0$ не пересекаются.

715. При каких значениях k парабола $y = x^2 + 1$ и прямая $y = kx$ имеют только одну общую точку?

П

716. Построив схематически графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 15x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 10, \\ y = x. \end{cases}$

717. Найдите корни уравнения:

а) $9x^2 - 100 = 0$;
б) $2 = 7c^2$;
в) $9m^2 - 4 = 0$;
г) $-0{,}8y^2 + 3y = 0$.

718. При каких значениях x:

а) трёхчлен $-x^2 - 2x + 168$ принимает положительные значения;

б) трёхчлен $15x^2 + x - 2$ принимает отрицательные значения;

в) дробь $\dfrac{x + 14}{3 - 2x}$ принимает отрицательные значения;

г) дробь $\dfrac{6 - 5x}{x + 25}$ принимает положительные значения?

32. Решение задач

Алгебраический способ решения текстовых задач часто сводится к решению систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

Задача 1. У Лены были купюры по 500 р. и по 2000 р. Она утверждает, что купила велосипед за 25 500 р., отдав за него 20 купюр, а Катя говорит, что такого не может быть. Кто прав?

▶ Пусть у Лены было x купюр по 500 р. и y купюр по 2000 р. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 500x + 2000y = 25\,500. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел $(x; y)$, в которой $y = 10\frac{1}{3}$. Но это не соответствует смыслу задачи, так как количество купюр может выражаться только натуральным числом.

Ответ: права Катя. ◁

Задача 2. Чашка и блюдце стоили вместе 680 р. После того как чашка подешевела на 20%, а блюдце подорожало на 10%, они стали стоить вместе 580 р. Найдите первоначальную цену чашки и первоначальную цену блюдца.

▶ Пусть первоначальная цена чашки составляла x р., а блюдца — y р. Тогда по условию $x + y = 680$.

Новая цена чашки составляет 80% первоначальной и равна $0{,}8x$ р. Новая цена блюдца составляет 110% первоначальной и равна $1{,}1y$ р. Тогда

$$0{,}8x + 1{,}1y = 580.$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 580. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара $x = 560$, $y = 120$.

Следовательно, первоначальная цена чашки была 560 р., а блюдца 120 р.

Ответ: 560 р., 120 р. ◁

Упражнения

719. Было продано 42 л брусничного и грушевого сока. Брусничного сока было продано в 2,5 раза меньше, чем грушевого. Сколько литров грушевого сока было продано?

720. Существуют ли два таких натуральных числа, что сумма первого числа и утроенного второго равна 10, а разность первого и утроенного второго равна 2?

721. В мастерской сшили 65 курток и спортивных костюмов. Сколько сшили курток и сколько спортивных костюмов, если курток сшили в 1,6 раза больше, чем спортивных костюмов?

722. Коля сказал, что в его группе по изучению английского языка 18 мальчиков и девочек, и мальчиков на три меньше, чем девочек. Правильно ли сосчитал Коля?

723. Теплоход проходит за 4 ч по течению такое же расстояние, какое за 5 часов против течения. Найдите скорость течения, если она меньше собственной скорости теплохода на 40 км/ч.

724. В кошельке лежало 92 рубля мелочи — пятирублёвые и двухрублёвые монеты. Сколько пятирублёвых и сколько двухрублёвых монет было в кошельке, если всего было 28 монет?

725. В десяти лодках может разместиться 44 человека. Часть этих лодок пятиместные, а остальные — трёхместные. Сколько пятиместных лодок?

726. Дачник проделал путь длиной 46 км. Он шёл 2 ч пешком и 3 ч ехал на велосипеде. На велосипеде он двигался в 2,4 раза быстрее, чем пешком. С какой скоростью дачник шёл и с какой скоростью он ехал на велосипеде?

727. Найти все двузначные числа, которые в два раза больше суммы своих цифр.

728. Периметр прямоугольника равен 66 см. Его длина в 10 раз больше ширины. Найдите стороны прямоугольника.

729. Три гантели и две гири весят 47 кг. Найдите, сколько весит гиря и сколько — гантель, если известно, что три гири тяжелее шести гантелей на 18 кг.

730. В спортзале в двух ящиках было 120 мячей. В первый ящик положили ещё 40% от числа мячей, которые там были, а из второго вынули 10% того, что было. После этого в первом ящике стало на 30 мячей больше, чем во втором. Сколько мячей было в каждом ящике первоначально?

П

731. Представьте в виде квадрата двучлена:
а) $4x^2 - 12x + 9$; б) $1 - 14a + 49a^2$; в) $25 + 4c^2 + 20c$.

732. Найдите значение выражения:
а) $(20 - 3)(20 + 3)$; в) $102 \cdot 98$; д) $4\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{4}$;
б) $\left(10 + \frac{1}{2}\right)\left(10 - \frac{1}{2}\right)$; г) $8{,}6 \cdot 7{,}4$; е) $2{,}7 \cdot 3{,}3$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что является решением уравнения с двумя переменными?
2. Можно ли, не решая систему линейных уравнений, сказать, сколько она имеет решений?
3. Какие существуют способы решения систем уравнений?

33. Уравнения с параметром

Каждое из уравнений

$$7x = 5, \ -3x = 5, \ 0x = 5$$

имеет вид $ax = 5$, где a — некоторое число.

Первое уравнение, в котором $a = 7$, имеет корень $\frac{5}{7}$. Второе уравнение, в котором $a = -3$, имеет корень $\frac{5}{-3}$. Третье уравнение, в котором $a = 0$, не имеет корней.

Вообще уравнение вида $ax = 5$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень $\frac{5}{a}$, а при $a = 0$ не имеет корней.

Рассматривая уравнение $ax = 5$, мы придавали буквам a и x различный смысл, считая, что буквой x обозначено неизвестное число, а буквой a — некоторое фиксированное число. В таких случаях говорят, что a является *параметром*, а $ax = 5$ — уравнение с параметром.

Для уравнения $ax = 5$ мы выяснили, что при любом значении параметра a, не равном нулю, корень уравнения можно найти по формуле $x = \frac{5}{a}$, а при $a = 0$ это уравнение корней не имеет. В таких случаях говорят, что мы *решили уравнение с параметром*.

Вообще решить уравнение с параметром — это значит показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующее множество корней уравнения, если корни существуют, или установить, что при этом значении параметра корней нет.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$bx - 3x = b^3 - 3b^2 + 4b - 12$$

с параметром b.

▶ Вынесем в левой части уравнения множитель x за скобки. Получим

$$(b - 3)x = b^3 - 3b^2 + 4b - 12.$$

Мы имеем линейное уравнение, число корней которого зависит от того, отличен ли от нуля коэффициент при x или равен нулю.

Если $b - 3 \neq 0$, т. е. $b \neq 3$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{b^3 - 3b^2 + 4b - 12}{b - 3}.$$

Разложив числитель дроби на множители, получим, что

$$x = \frac{(b-3)(b^2+4)}{b-3}.$$

Отсюда

$$x = b^2 + 4.$$

Если $b - 3 = 0$, т. е. $b = 3$, то уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае любое число является корнем уравнения.
Итак, мы нашли, что при $b \neq 3$ уравнение имеет единственный корень $b^2 + 4$, а при $b = 3$ любое число является корнем уравнения. ◁

Пример 2. Решим уравнение

$$ax^2 + (a^2 - 1)x + (a - 1)^2 = 0$$

с параметром a.

▶ Данное уравнение при $a = 0$ является линейным, а при $a \neq 0$ — квадратным. Рассмотрим каждый из этих случаев.
Если $a = 0$, то данное уравнение обращается в линейное уравнение $-x + 1 = 0$, которое имеет единственный корень $x = 1$.
Пусть $a \neq 0$. Тогда мы имеем квадратное уравнение

$$ax^2 + (a^2 - 1)x - (a - 1)^2 = 0.$$

Найдём его дискриминант:

$$D = (a^2 - 1)^2 - 4a(a - 1)^2 = (a - 1)^2((a + 1)^2 - 4a) = (a - 1)^4.$$

Так как $D \geqslant 0$ при любом значении a, то это уравнение при любом a имеет корни.
Если $a = 1$, то $D = 0$, и это уравнение имеет единственный корень. Найти его можно, подставив в уравнение вместо a число 1. Получим $x^2 = 0$. Отсюда $x = 0$.
Если $a \neq 1$, то $D > 0$, и уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{1 - a^2 - (a-1)^2}{2a} = \frac{-2a^2 + 2a}{2a} = 1 - a,$$

$$x_2 = \frac{1 - a^2 + (a-1)^2}{2a} = \frac{-2a + 2}{2a} = \frac{1-a}{a}.$$

Итак, мы нашли, что данное уравнение имеет корень 1 при $a = 0$, корень 0 при $a = 1$, корни $1 - a$ и $\frac{1-a}{a}$ при $a \neq 0$ и $a \neq 1$. ◁

Упражнения

733. Какие случаи надо выделить при решении уравнения $bx + 2x = 3b + 6$ с параметром b? Найдите корни уравнения в каждом из этих случаев.

734. Решите относительно y уравнение:

а) $py - p - 1 = 0$;
б) $py - 3y - 4p + 12 = 0$.

735. Решите уравнение с параметром a:

$$ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18.$$

736 Решите уравнение с параметром b:

$$2x^2 - 4x + b = 0.$$

737. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$; б) $3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0$.

738. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:

а) $3x^2 + tx + 3 = 0$; в) $tx^2 - 6x + 1 = 0$;
б) $2x^2 - tx + 50 = 0$; г) $tx^2 + x - 2 = 0$?

739. Выясните, при каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 3 = 0$$

принимает наименьшее значение, и найдите это значение.

740. Решите относительно x уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2ax + a + 1 = 0.$$

741. Решите уравнение с параметром k:

$$x^2 - (4k + 1)x + 2(2k^2 + k - 3) = 0.$$

742. Выясните, при каких значениях параметра b равна 7 сумма корней уравнения

$$y^2 - (2b - 1)y + b^2 - b - 2 = 0.$$

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 7

743. Решите уравнение:

а) $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 13$;
б) $(3x - 5)^2 - (2x + 1)^2 = 24$;
в) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 28 = x^2(x - 25)$;
г) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 1 = 1{,}6x^2(5x - 2)$.

744. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 = a$; в) $x^2 + 4b = 0$;
б) $x^2 = a^2$; г) $x^2 + 9b^2 = 0$.

745. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения положительно:

а) $a^2 + 4a + 11$; в) $m^2 - 4m + 51$; д) $2b^2 - 8b + 20$;

б) $\frac{x^2 - 2x + 7}{19}$; г) $\frac{p^2 - 6p + 18}{p^2 + 1}$; е) $\frac{2c^2 + 3}{c^2 + 12c + 40}$.

746. Используя выделение квадрата двучлена:

а) докажите, что наименьшим значением выражения $x^2 - 8x + 27$ является число 11;

б) найдите наименьшее значение выражения $a^2 - 4a + 20$.

747. Решите уравнение:

а) $4x^2 + 7x + 3 = 0$;
б) $x^2 + x - 56 = 0$;
в) $x^2 - x - 56 = 0$;
г) $5x^2 - 18x + 16 = 0$;
д) $8x^2 + x - 75 = 0$;
е) $3x^2 - 11x - 14 = 0$;
ж) $3x^2 + 11x - 34 = 0$;
з) $x^2 - x - 1 = 0$.

748. При каких значениях x верно равенство:

а) $(5x + 3)^2 = 5(x + 3)$;
б) $(3x + 10)^2 = 3(x + 10)$;
в) $(3x - 8)^2 = 3x^2 - 8x$;
г) $(4x + 5)^2 = 5x^2 + 4x$;
д) $(5x + 3)^2 = 5x + 3$;
е) $(5x + 3)^2 = (3x + 5)^2$;
ж) $(4x + 5)^2 = 4(x + 5)^2$;
з) $(2x + 10)^2 = 4(x + 5)^2$?

749. Решите уравнение и выполните проверку:

а) $x^2 - 2x - 5 = 0$;
б) $x^2 + 4x + 1 = 0$;
в) $3y^2 - 4y - 2 = 0$;
г) $5y^2 - 7y + 1 = 0$;
д) $2y^2 + 11y + 10 = 0$;
е) $4x^2 - 9x - 2 = 0$.

750. Найдите приближённые значения корней уравнения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

а) $x^2 - 2x - 2 = 0$;
б) $x^2 + 5x + 3 = 0$;
в) $3x^2 - 7x + 3 = 0$;
г) $5x^2 + 31x + 20 = 0$.

751. Выясните, при каких значениях переменной:

а) трёхчлен $a^2 + 7a + 6$ и двучлен $a + 1$ принимают равные значения;

б) трёхчлены $3x^2 - x + 1$ и $2x^2 + 5x - 4$ принимают равные значения.

Найдите эти значения.

752. При каком значении a один из корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен 1? Найдите, чему равен при этом значении a второй корень.

753. Найдите пять последовательных целых чисел, если известно, что сумма квадратов трёх первых чисел равна сумме квадратов двух последних.

754. Найдите три последовательных чётных числа, если известно, что сумма квадратов первых двух чисел равна квадрату третьего числа.

755. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 112. Найдите эти числа.

756. Периметр прямоугольника равен 28 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух смежных сторонах прямоугольника, равна 116 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

757. Фотографическая карточка размером 12×18 см наклеена на лист так, что получилась рамка одинаковой ширины. Определите ширину рамки, если известно, что фотокарточка вместе с рамкой занимает площадь 280 см^2.

758. Цветочная клумба, имеющая форму прямоугольника, окружена дерновым бордюром, ширина которого всюду одинакова. Клумба вместе с бордюром образует прямоугольник, длина которого 4,5 м, а ширина 2,5 м. Найдите ширину бордюра, если известно, что его площадь равна 3,25 м^2.

759. *Старинная задача.* Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоила сама лошадь. Спрашивается: за какую сумму он её купил?

760. Дно ящика — прямоугольник, ширина которого в 2 раза меньше его длины. Высота ящика 0,5 м. Найдите объём ящика, если известно, что площадь его дна на 1,08 м^2 меньше площади боковых стенок.

761. Имеется лист картона прямоугольной формы, длина которого в 1,5 раза больше его ширины. Из него можно изготовить открытую коробку объёмом 6080 см^3, вырезав по углам картона квадраты со стороной 8 см. Найдите размеры — длину и ширину листа картона.

762. Разность кубов двух последовательных натуральных чисел равна 919. Найдите эти числа.

763. Разность кубов двух последовательных нечётных натуральных чисел равна 866. Найдите эти числа.

764. Решите уравнение и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 5\sqrt{2}x + 12 = 0$; в) $y^2 - 6y + 7 = 0$;

б) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 72 = 0$; г) $p^2 - 10p + 7 = 0$.

765. Найдите b и решите уравнение:

а) $2x^2 + bx - 10 = 0$, если оно имеет корень 5;
б) $3x^2 + bx + 24 = 0$, если оно имеет корень 3;
в) $(b - 1)x^2 - (b + 1)x = 72$, если оно имеет корень 3;
г) $(b - 5)x^2 - (b - 2)x + b = 0$, если оно имеет корень $\frac{1}{2}$.

766. Докажите, что уравнение $7x^2 + bx - 23 = 0$ при любых значениях b имеет один положительный и один отрицательный корень.

767. Докажите, что уравнение $12x^2 + 70x + a^2 + 1 = 0$ при любых значениях a не имеет положительных корней.

768. Докажите, что если сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю, то один из корней уравнения равен 1. Используя это свойство, решите уравнение:

а) $2x^2 - 41x + 39 = 0$; б) $17x^2 + 243x - 260 = 0$.

769. Разность корней уравнения $3x^2 + bx + 10 = 0$ равна $4\frac{1}{3}$. Найдите b.

770. Один из корней уравнения $5x^2 - 12x + c = 0$ в 3 раза больше другого. Найдите c.

771. Частное корней уравнения $4x^2 + bx - 27 = 0$ равно -3. Найдите b.

772. Квадрат разности корней уравнения $x^2 + px + 90 = 0$ равен 81. Найдите p.

773. Разность квадратов корней уравнения $2x^2 - 5x + c = 0$ равна 0,25. Найдите c.

774. Один из корней уравнения $4x^2 + bx + c = 0$ равен 0,5, а другой — свободному члену. Найдите b и c.

775. Известно, что коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где $c \neq 0$, являются его корнями. Найдите b и c.

776. Выразите через p и q сумму квадратов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

777. Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 15x + q = 0$ равна 153. Найдите q.

778. Квадрат разности корней уравнения $x^2 + px + 405 = 0$ равен 144. Найдите p.

779. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 + 2x + k = 0$, причём $2x_1 = -3x_2$. Найдите k.

780. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 8x + k = 0$, причём $3x_1 + 4x_2 = 29$. Найдите k.

781. Зная, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, составьте квадратное уравнение, имеющее корни:

а) $3x_1$ и $3x_2$; б) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$.

782. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

К параграфу 8

783. Найдите корни квадратного трёхчлена:

а) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$; в) $-x^2 + 4x - 2\frac{2}{4}$;

б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$; г) $0{,}4x^2 - x + 0{,}2$.

784. Составьте какой-нибудь квадратный трёхчлен, корнями которого являются числа:

а) -7 и 2; б) $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.

785. При каком значении p выражение $2px^2 - 2x - 2p - 3$ становится квадратным трёхчленом, одним из корней которого является число нуль? Найдите другой корень.

786. Докажите, что квадратный трёхчлен имеет корни, и найдите их сумму и произведение:

а) $2x^2 - 10x + 3$; в) $0{,}5x^2 + 6x + 1$;

б) $\frac{1}{3}x^2 + 7x - 2$; г) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.

787. Найдите трёхчлен вида $x^2 + px + q$, корнями которого являются не равные нулю числа p и q.

788. Пусть a и b — корни трёхчлена $x^2 + px + q$, причём $ab = 4$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3$. Чему равно a и чему равно b?

789. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) $2x^2 - 3x + 7$; в) $5x^2 - 3x$;

б) $-3x^2 + 4x - 1$; г) $-4x^2 + 8x$.

790. Докажите, что квадратный трёхчлен:

а) $-x^2 + 20x - 103$ не принимает положительных значений;

б) $x^2 - 16x + 65$ не принимает отрицательных значений.

791. Найдите наибольшее или наименьшее значение квадратного трёхчлена:

а) $3x^2 - 4x + 5$; б) $-3x^2 + 12x$.

792. Сумма положительных чисел a и b равна 40. При каких значениях a и b их произведение будет наибольшим?

793. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $0{,}8x^2 - 19{,}8x - 5$; в) $x^2 + x\sqrt{2} - 2$;

б) $3{,}5 - 3\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2$; г) $x^2 - x\sqrt{6} + 1$.

794. Зная, что коэффициенты квадратного трёхчлена $(n - 3)x^2 + (n + 1)x + 9 - 2n$ — натуральные числа, найдите этот трёхчлен.

795. Зная, что m — целое число, найдите целые корни трёхчлена $mx^2 + (m - 3)x - 3$.

796. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2m^2 - 8}{m^2 + 6m + 8}$; б) $\dfrac{2m^2 - 5m + 2}{mn - 2n - 3m + 6}$.

797. Выполните действие:

а) $\dfrac{x + 4}{x - 1} - \dfrac{37x - 12}{4x^2 - 3x - 1}$; г) $\dfrac{x^2 + 11x + 30}{3x - 15} : \dfrac{x + 5}{x - 5}$;

б) $\dfrac{x - 1}{x + 2} - \dfrac{1 - x}{x^2 + 3x + 2}$; д) $\dfrac{2x^2 - 7}{x^2 - 3x - 4} - \dfrac{x + 1}{x - 4}$;

в) $\dfrac{7x - x^2}{x + 4} \cdot \dfrac{x^2 - x - 20}{7 - x}$; е) $\dfrac{2 + x - x^2}{2 - 5x + 3x^2} + \dfrac{10x}{3x - 2}$.

К параграфу 9

798. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+1}{6} + \dfrac{20}{x-1} = 4$; д) $\dfrac{3}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{28}{1-x^2}$;

б) $\dfrac{x+15}{4} - \dfrac{21}{x+2} = 2$; е) $\dfrac{5}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{20}{x^2-4}$;

в) $\dfrac{12}{x-1} - \dfrac{8}{x+1} = 1$; ж) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{29}{(x+1)(x-2)}$;

г) $\dfrac{16}{x-3} + \dfrac{30}{1-x} = 3$; з) $\dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{4}{(x+3)(x-1)}$.

799. Найдите координаты точек пересечения с осью x графика функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{2x - 5}{x + 3}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$;

б) $y = \dfrac{(x - 4)(3x - 15)}{x - 9}$; г) $y = \dfrac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x - 3}$.

800. При каком значении x:

а) значение функции $y=\frac{5x-7}{x^2+1}$ равно -6; 0; 0,8; 0,56;

б) значение функции $y=\frac{x^2-2x+6}{x+4}$ равно 1,5; 3; 7?

801. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y=2x+3$ и $y=\frac{34}{x-5}$;

б) $y=\frac{x^2-5x}{x+3}$ и $y=2x$.

802. Решите графически уравнение:

а) $\frac{6}{|x|}=1{,}5x-2$; б) $\frac{8}{|x|}=x^2$; в) $\frac{3}{|x|}=x+1$; г) $x^2=\frac{5}{|x|}$.

803. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10x}{3x^2-2}$;

б) $\frac{1-y\sqrt{5}}{1+y\sqrt{5}}+\frac{1+y\sqrt{5}}{1-y\sqrt{5}}=\frac{9y}{1-5y^2}$.

804. Решите уравнение:

а) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{3(2x-1)}{7(2x+1)}+\frac{8}{1-4x^2}=0$;

б) $\frac{y}{y^2-9}-\frac{1}{y^2+3y}+\frac{3}{6y+2y^2}=0$;

в) $\frac{2y-1}{14y^2+7y}+\frac{8}{12y^2-3}=\frac{2y+1}{6y^2-3y}$;

г) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

д) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x^2+4x+16}=\frac{1}{x-4}$;

е) $\frac{3}{8y^3+1}-\frac{1}{2y+1}=\frac{y+3}{4y^2-2y+1}$;

ж) $\frac{32}{x^3-2x^2-x+2}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x+1}$;

з) $\frac{1}{3(x-4)}+\frac{1}{2(x^2+3)}+\frac{1}{x^3-4x^2+3x-12}=0$.

805. Найдите значения переменной y, при которых:

а) сумма дробей $\frac{6}{y+1}$ и $\frac{y}{y-2}$ равна их произведению;

б) сумма дробей $\frac{2}{y-3}$ и $\frac{6}{y+3}$ равна их частному;

в) разность дробей $\frac{y+12}{y-4}$ и $\frac{y}{y+4}$ равна их произведению.

806. На перегоне в 600 км после прохождения $\frac{1}{4}$ пути поезд был задержан на 1 ч 30 мин. Чтобы прийти на конечную станцию вовремя, машинист увеличил скорость поезда на 15 км/ч. Сколько времени поезд был в пути?

807. Туристы совершили три перехода в 12,5 км, 18 км и 14 км, причём скорость на первом переходе была на 1 км/ч меньше скорости на втором переходе и на столько же больше скорости на третьем. На третий переход они затратили на 30 мин больше, чем на второй. Сколько времени заняли все переходы?

808. Автомобиль прошёл с некоторой постоянной скоростью путь от A до B длиной 240 км. Возвращаясь обратно, он прошёл половину пути с той же скоростью, а затем увеличил её на 10 км/ч. В результате на обратный путь было затрачено на $\frac{2}{5}$ ч меньше, чем на путь от A до B. С какой скоростью шёл автомобиль из A в B?

809. Расстояние от A до B, равное 400 км, поезд прошёл с некоторой постоянной скоростью; $\frac{2}{5}$ обратного пути из B в A он шёл с той же скоростью, а потом уменьшил скорость на 20 км/ч. Найдите скорость поезда на последнем участке, если на всю дорогу было затрачено 11 ч.

810. Турист проехал на моторной лодке вверх по реке 25 км, а обратно спустился на плоту. В лодке он плыл на 10 ч меньше, чем на плоту. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 12 км/ч.

811. Моторная лодка прошла 35 км вверх по реке и на 18 км поднялась по её притоку, затратив на весь путь 8 ч. Скорость течения в реке на 1 км/ч меньше скорости течения в её притоке. Найдите скорость течения в реке, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

812. Из пункта A отправили по течению плот. Вслед за ним через 5 ч 20 мин из того же пункта вышел катер и догнал плот, пройдя 20 км. Сколько километров в час проходил плот, если катер шёл быстрее его на 12 км/ч?

813. Рыболов отправился на лодке от пункта N вверх по реке. Проплыв 6 км, он бросил вёсла, и через 4 ч 30 мин после отправления из N течение снова отнесло его к пункту N. Зная, что скорость лодки в стоячей воде 90 м/мин, найдите скорость течения реки.

814. Через 2 ч 40 мин после отправления плота от пристани A вниз по течению реки навстречу ему от пристани B отошёл катер. Встреча произошла в 27 км от B. Найдите скорость плота, если скорость катера в стоячей воде 12 км/ч и расстояние от A до B равно 44 км.

815. Теплоход отправился от пристани A до пристани B, расстояние между которыми 225 км. Через 1,5 ч после отправления он был задержан на $\frac{1}{2}$ ч и, чтобы прийти в пункт назначения вовремя, увеличил скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость теплохода.

816. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, вышли одновременно два автомобиля. Первый из них ехал всё время с постоянной скоростью. Второй автомобиль первые $\frac{3}{4}$ ч ехал с той же скоростью, затем сделал остановку на 15 мин, после этого увеличил скорость на 5 км/ч и прибыл в город B вместе с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

817. Автобус проехал расстояние между пунктами A и B, равное 400 км, с некоторой постоянной скоростью. Возвращаясь обратно, он 2 ч ехал с той же скоростью, а затем увеличил скорость на 10 км/ч и возвратился в пункт A, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем на путь из A в B. Сколько времени затратил автобус на обратный путь?

818. Мотоциклист ехал из одного города в другой 4 ч. На обратном пути первые 100 км он ехал с той же скоростью, а затем уменьшил её на 10 км/ч и поэтому на обратный путь затратил на 30 мин больше. Найдите расстояние между городами.

819. Из двух городов A и B выходят одновременно два автомобиля и встречаются через 5 ч. Скорость автомобиля, выходящего из A, на 10 км/ч меньше скорости другого автомобиля. Если бы первый автомобиль вышел из A на $4\frac{1}{2}$ ч раньше второго, то встреча произошла бы в 150 км от B. Найдите расстояние между городами A и B.

820. Расстояние от пристани M до пристани N по течению реки катер проходит за 6 ч. Однажды, не дойдя 40 км до пристани N, катер повернул назад и возвратился к пристани M, затратив на весь путь 9 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

821. Мотоциклист проехал расстояние от пункта M до пункта N за 5 ч. На обратном пути он первые 36 км ехал с той же скоростью, а остальную часть пути — со скоростью, на 3 км/ч большей. С какой скоростью ехал мотоциклист первоначально, если на обратный путь он затратил на 15 мин меньше, чем на путь из пункта M в пункт N?

822. Отец и сын прошли 240 м, при этом отец сделал на 100 шагов меньше, чем сын. Найдите длину шага каждого из них, если шаг отца длиннее шага сына на 20 см.

823. Первая мастерская должна была сшить 160 костюмов, а вторая за тот же срок — на 25% меньше. Первая мастерская шила в день на 10 костюмов больше, чем вторая, и выполнила задание за 2 дня до намеченного срока. Сколько костюмов в день шила вторая мастерская, если ей для выполнения задания понадобилось дополнительно 2 дня?

824. Бригада рабочих должна была за определённый срок изготовить 768 пылесосов. Первые 5 дней бригада выполняла ежедневно установленную норму, а затем каждый день изготовляла на 6 пылесосов больше, чем намечалось, поэтому уже за день до срока было изготовлено 844 пылесоса. Сколько пылесосов в день должна была изготовлять бригада по плану?

825. Масса двух сплавов меди и олова равна 60 кг. Первый сплав содержит 6 кг меди, а второй — 3,6 кг меди. Найдите массу каждого сплава, если известно, что содержание меди в первом сплаве на 15% больше, чем во втором.

826. Сплав меди с цинком, содержащий 6 кг цинка, сплавили с 13 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве понизилось на 26%. Какова была первоначальная масса сплава?

827. За 4 дня совместной работы двумя тракторами было вспахано $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором, если первым его можно вспахать на 5 дней быстрее, чем вторым?

828. Два хлопкоуборочных комбайна могут собрать хлопок с поля на 9 дней быстрее, чем один первый комбайн, и на 4 дня быстрее, чем один второй. За сколько дней каждый комбайн может собрать весь хлопок?

829. Для наполнения бассейна через первую трубу потребуется на 9 ч больше времени, чем при наполнении через первую и вторую трубы, и на 7 ч меньше, чем через одну вторую трубу. За сколько часов наполнится бассейн через обе трубы?

830. Два слесаря получили заказ. Сначала 1 ч работал первый слесарь, затем 4 ч они работали вместе. В результате было выполнено 40% заказа. За сколько часов мог выполнить заказ каждый слесарь, если первому для этого понадобилось бы на 5 ч больше, чем второму?

831. При совместной работе двух копировальных машин можно снять ксерокопию с рукописи за 6 мин. Если сначала снять ксерокопию с половины рукописи одной машиной, а затем с оставшейся части — другой машиной, то вся работа будет закончена через 12,5 мин. За какое время можно снять ксерокопию с рукописи каждой машиной в отдельности?

К параграфу 10

832. При каких значениях m и b пара (m; 3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} -3x + y = 9, \\ 2x - by = -10? \end{cases}$$

833. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 6y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,5x + 2y = 0,8, \\ 2,5x + 10y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 3y = 12, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 0,3y = 1, \\ 4x + 0,6y = 1? \end{cases}$

834. Укажите какие-либо значения a, b и c, при которых система уравнений

$$\begin{cases} -8x + 9y = 10, \\ ax + by = c \end{cases}$$

имеет единственное решение.

835. При каком значении c система уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 10x - 4y = c \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений; б) не имеет решений?

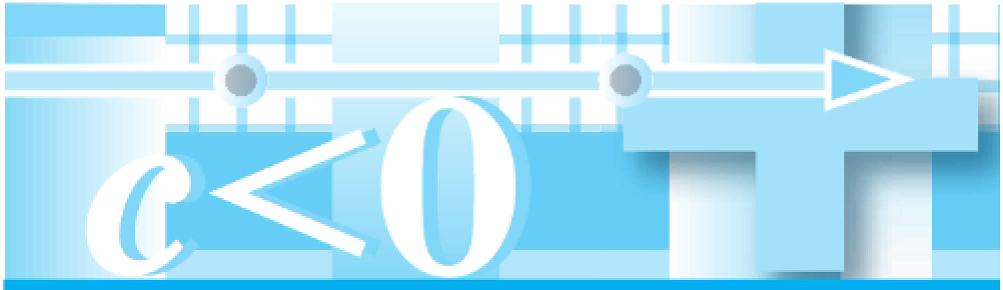
836. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точки:

а) (−1; 3) и (2; −2); в) (0; 5) и (4; 0);

б) (4; 1) и (−3; −1); г) (−3; 0) и (0; −6).

837. График какой линейной функции проходит через точку (−2; 5) и точку пересечения прямых

$$3x - 2y = 16 \quad \text{и} \quad 4x + 3y = -7?$$



Глава IV НЕРАВЕНСТВА

В этой главе вы познакомитесь со свойствами числовых неравенств, научитесь применять их для сравнения значений числовых выражений, при доказательстве неравенств. Основное содержание главы составляет решение неравенств, сводящихся к виду $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, и их систем. Неравенства такого вида решают аналогично тому, как решают уравнения вида $ax + b = 0$, но при этом приходится учитывать знак коэффициента a. При решении различных задач вам поможет геометрическая интерпретация множеств решений неравенств.

§ 11 ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

34. Числовые неравенства

Мы можем сравнить любые числа a и b и результат сравнения записать в виде равенства или неравенства, используя для этого знаки $=$, $<$, $>$. Для произвольных чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Рассмотрим примеры.

1. Сравним обыкновенные дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{4}{7}$. Для этого приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{5}{8} = \frac{35}{56}; \quad \frac{4}{7} = \frac{32}{56}.$$

Так как $35 > 32$, то $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

2. Сравним десятичные дроби 3,6748 и 3,675. Цифры в разрядах единиц, десятых и сотых совпадают, а в разряде тысячных в первой дроби стоит цифра 4, а во второй — цифра 5. Так как $4 < 5$, то $3{,}6748 < 3{,}675$.

3. Сравним обыкновенную дробь $\frac{9}{20}$ и десятичную дробь 0,45. Обратив дробь $\frac{9}{20}$ в десятичную, получим, что $\frac{9}{20} = 0{,}45$.

4. Сравним отрицательные числа -15 и -23. Модуль первого числа меньше модуля второго. Значит, первое число больше второго, т. е. $-15 > -23$.

В зависимости от конкретного вида чисел мы использовали тот или иной способ сравнения. Однако удобно иметь такой способ сравнения чисел, который охватывает все случаи. Он заключается в том, что составляют разность чисел и выясняют, является ли она положительным числом, отрицательным числом или нулём. Этот способ сравнения чисел основан на следующем определении:

Определение. Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число.

Заметим, что если разность $a - b$ равна нулю, то числа a и b равны.

На координатной прямой большее число изображается точкой, лежащей правее, а меньшее — точкой, лежащей левее. Действительно, пусть a и b — некоторые числа. Обозначим разность $a - b$ буквой c. Так как $a - b = c$, то $a = b + c$.

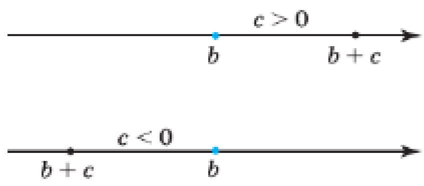


Рис. 32

Если c — положительное число, то точка с координатой $b + c$ лежит правее точки с координатой b, а если c — отрицательное число, то левее (рис. 32).

Значит, если $a > b$, то точка с координатой a лежит правее точки с координатой b, а если $a < b$ — левее.

Покажем, как приведённое определение используется при решении задач.

Пример 1. Докажем, что при любых значениях переменной a верно неравенство

$$(a - 3)(a - 5) < (a - 4)^2.$$

▶ Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:

$$(a - 3)(a - 5) - (a - 4)^2 =$$
$$= a^2 - 3a - 5a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1.$$

При любом a рассматриваемая разность отрицательна и, следовательно, верно неравенство $(a - 3)(a - 5) < (a - 4)^2$. ◁

Пример 2. Пусть a и b — положительные числа. Число $\frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим чисел a и b*, число $\sqrt{ab}$ — *средним геометрическим*, число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ — *средним гармоническим*.

Докажем, что среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое положительных чисел a и b связаны соотношениями:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

▶ Докажем сначала, что $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Преобразуем разность левой и правой частей этого неравенства:

$$\sqrt{ab} - \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}-2ab}{a+b} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ рассматриваемая разность неотрицательна и, следовательно, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Теперь докажем неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Для этого преобразуем разность

$$\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} = \frac{2\sqrt{ab}-a-b}{2} = -\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ рассматриваемая разность либо отрицательна, либо равна нулю и, значит, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Итак, мы доказали, что если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}. \quad ◁$$

Упражнения

838. Сравните числа a и b, если:

а) $a - b = -0{,}001$; б) $a - b = 0$; в) $a - b = 4{,}3$.

839. Известно, что $a < b$. Может ли разность $a - b$ выражаться числом 3,72? −5? 0?

840. Даны выражения

$$3a(a + 6) \text{ и } (3a + 6)(a + 4).$$

Сравните их значения при $a = -5$; 0; 40. Докажите, что при любом a значение первого выражения меньше значения второго.

841. Даны выражения

$$4b(b + 1) \text{ и } (2b + 7)(2b - 8).$$

Сравните их значения при $b = -3$; −2; 10. Можно ли утверждать, что при любом значении b значение первого выражения больше, чем значение второго?

842. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $3(a + 1) + a < 4(2 + a)$;
б) $(7p - 1)(7p + 1) < 49p^2$;
в) $(a - 2)^2 > a(a - 4)$;
г) $(2a + 3)(2a + 1) > 4a(a + 2)$.

843. Докажите неравенство:

а) $2b^2 - 6b + 1 > 2b(b - 3)$;
б) $(c + 2)(c + 6) < (c + 3)(c + 5)$;
в) $p(p + 7) > 7p - 1$;
г) $8y(3y - 10) < (5y - 8)^2$.

844. Верно ли при любом x неравенство:

а) $4x(x + 0{,}25) > (2x + 3)(2x - 3)$;
б) $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$;
в) $(3x + 8)^2 > 3x(x + 16)$;
г) $(7 + 2x)(7 - 2x) < 49 - x(4x + 1)$?

845. Докажите неравенство:

а) $a(a + b) \geqslant ab$;
б) $m^2 - mn + n^2 \geqslant mn$;
в) $10a^2 - 5a + 1 \geqslant a^2 + a$;
г) $2bc \leqslant b^2 + c^2$;
д) $a(a - b) \geqslant b(a - b)$;
е) $a^2 - a \leqslant 50a^2 - 15a + 1$.

846. *(Для работы в парах.)* Увеличится или уменьшится дробь $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа, если к её числителю и знаменателю прибавить по 1?

1) Рассмотрите на примерах, как изменяется дробь $\frac{a}{b}$. (Одному учащемуся рекомендуем взять дроби, у которых числитель меньше знаменателя, а другому — дроби, у которых числитель больше знаменателя.)
2) Обсудите друг с другом ваши наблюдения и выскажите гипотезу для каждого случая.
3) Проведите доказательство: один — для случая $a < b$, а другой — для случая $a > b$.
4) Проверьте друг у друга правильность рассуждений.

847. Докажите, что при $a > 0$ верно неравенство

$$\frac{a+2}{a} - 2 \geqslant 2 - \frac{a+2}{2}.$$

848. Докажите, что сумма любого положительного числа и числа, ему обратного, не меньше чем 2.

849. Докажите неравенство:

а) $\frac{c^2+1}{2} \geqslant c$; б) $\frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

850. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство:
а) $a^2 - 6a + 14 > 0$; б) $b^2 + 70 > 16b$.

851. Выберите из данных неравенств такое, которое не является верным при любом значении a:
а) $a^2 > 2a - 3$; в) $4a - 4 < a^2$;
б) $a^2 + 6 > 4a$; г) $8a - 70 < a^2$.

852. *(Для работы в парах.)* Докажите, что если a и b — положительные числа и $a^2 > b^2$, то $a > b$. Пользуясь этим свойством, сравните числа:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} - 2$ и $\sqrt{6} - \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{6} + 1$; г) $\sqrt{10} - \sqrt{7}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{6}$.

1) Проведите доказательство приведённого утверждения.
2) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено сравнение выражений. Исправьте ошибки, если они допущены.

853. Докажите, что при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ верно неравенство

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

854. Что больше: $a^3 + b^3$ или $ab(a + b)$, если a и b — неравные положительные числа?

855. К каждому из чисел 0, 1, 2, 3 прибавили одно и то же число k. Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности чисел с произведением средних её членов.

856. Одноклассники Коля и Миша вышли одновременно из посёлка на станцию. Коля шёл со скоростью 5 км/ч, а Миша первую половину пути шёл со скоростью, на 0,5 км/ч большей, чем Коля, а вторую половину пути — со скоростью, на 0,5 км/ч меньшей, чем Коля. Кто из них первым пришёл на станцию?

П

857. Найдите значение дроби $\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 2}$ при $x = -\frac{1}{3}$.

858. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 10x + 25}{35 - 7x}$; б) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{(3 - 2x)^2}$.

859. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x} = 2 - \frac{3}{x - 2}$; б) $\frac{3}{2x - 1} = 5x - 9$.

35. Свойства числовых неравенств

Рассмотрим некоторые свойства числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 1

Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.

Действительно, если разность $a - b$ — положительное число, то разность $b - a$ — отрицательное число, и наоборот.

ТЕОРЕМА 2

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Докажем, что разность $a - c$ — отрицательное число. Прибавим к этой разности числа b и $-b$ и сгруппируем слагаемые:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

По условию $a < b$ и $b < c$. Поэтому слагаемые $a - b$ и $b - c$ — отрицательные числа. Значит, и их сумма является отрицательным числом. Следовательно, $a < c$. ○

Аналогично доказывается, что если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Геометрическая иллюстрация этих свойств дана на рисунке 33.

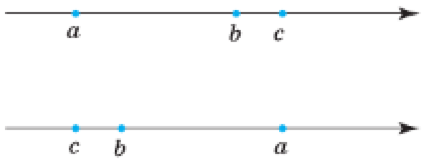


Рис. 33

ТЕОРЕМА 3

Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

● Преобразуем разность $(a + c) - (b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

По условию $a < b$, поэтому $a - b$ — отрицательное число. Значит, и разность $(a + b) - (b + c)$ отрицательна. Следовательно, $a + c < b + c$. ○

Итак,

> если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

ТЕОРЕМА 4

Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$. Если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.

● Представим разность $ac - bc$ в виде произведения:

$$ac - bc = c(a - b).$$

АРХИМЕД (287—212 гг. до н. э.) — древнегреческий математик, физик и механик. Разработал новые математические методы, в частности методы вычисления площадей криволинейных фигур и объёмов тел. Дал образцы применения математики к задачам естествознания и техники.

Так как $a < b$, то $a - b$ — отрицательное число. Если $c > 0$, то произведение $c(a - b)$ отрицательно, и, следовательно, $ac < bc$. Если $c < 0$, то произведение $c(a - b)$ положительно, и, следовательно, $ac > bc$. ○

Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичное свойство справедливо и для деления. Итак,

> если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;
> если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ

Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

● Разделим обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab: $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$. Сократив дроби, получим $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, т. е. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. ○

Приведём пример использования рассмотренных свойств неравенств.

Пример. Оценим периметр равностороннего треугольника со стороной a мм, если известно, что $54,2 < a < 54,3$.

▶ Периметр равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле $P = 3a$. Умножим на 3 обе части каждого из неравенств $54,2 < a$ и $a < 54,3$ и запишем результат в виде двойного неравенства:

$$54,2 \cdot 3 < 3a < 54,3 \cdot 3, \quad 162,6 < 3a < 162,9.$$

Значит, периметр P данного треугольника больше 162,6 мм, но меньше 162,9 мм. ◁

Упражнения

860. Отметьте на координатной прямой точки, имеющие координаты a, b, c, d и e, если $a < b$, $c > b$, $c < d$, $a > e$.

861. Пусть m, n, p и q — некоторые числа, причём $m > p$, $n > m$, $n < q$. Сравните, если это возможно, числа p и n, p и q, q и m. При сравнении чисел воспользуйтесь координатной прямой.

862. Известно, что $a < b$. Сравните, если возможно, a и $b + 1$, $a - 3$ и b, $a - 5$ и $b + 2$, $a + 4$ и $b - 1$.

863. Какими числами (положительными или отрицательными) являются a и b, если известно, что верны неравенства:

а) $a - 3 > b - 3$ и $b > 4$;
б) $a - 8 > b - 8$ и $a < -12$;
в) $7a > 7b$ и $b > \frac{1}{2}$;
г) $-2a > -2b$ и $b < -\frac{1}{3}$?

864. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям неравенства $18 > -7$ прибавить число -5; число 2,7; число 7;
б) из обеих частей неравенства $5 > -3$ вычесть число 2; число 12; число -5;
в) обе части неравенства $-9 < 21$ умножить на 2; на -1; на $-\frac{1}{3}$;
г) обе части неравенства $15 > -6$ разделить на 3; на -3; на -1.

865. Известно, что $a < b$. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям этого неравенства прибавить число 4;
б) из обеих частей этого неравенства вычесть число 5;
в) обе части этого неравенства умножить на 8;
г) обе части этого неравенства разделить на $\frac{1}{3}$;
д) обе части этого неравенства умножить на $-4{,}8$;
е) обе части этого неравенства разделить на -1.

866. Известно, что $a < b$. Поставьте вместо звёздочки знак $<$ или $>$ так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $-12{,}7a * -12{,}7b$;
б) $\frac{a}{3} * \frac{b}{3}$;
в) $0{,}07a * 0{,}07b$;
г) $-\frac{a}{2} * -\frac{b}{2}$.

867. Каков знак числа a, если известно, что:

а) $5a < 2a$; б) $7a > 3a$; в) $-3a < 3a$; г) $-12a > -2a$?

868. Известно, что $c > d$. Объясните, на основании каких свойств можно утверждать, что верно неравенство:

а) $-7c < -7d$;
б) $\frac{c}{8} > \frac{d}{8}$;
в) $2c + 11 > 2d + 11$;
г) $0{,}01c - 0{,}7 > 0{,}01d - 0{,}7$;
д) $1 - c < 1 - d$;
е) $2 - \frac{c}{2} < 2 - \frac{d}{2}$.

869. Известно, что a, b, c и d — положительные числа, причём $a > b$, $d < b$, $c > a$. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$.

870. *(Для работы в парах.)* Известно, что a — положительное число.
а) Расположите в порядке возрастания числа:

$$2a,\ a\sqrt{3},\ -a,\ a(\sqrt{3}-\sqrt{2}),\ 3a.$$

б) Расположите в порядке убывания числа:

$$6a,\ -a\sqrt{5},\ a(\sqrt{7}-\sqrt{6}),\ -a,\ -5a-1.$$

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание. Исправьте допущенные ошибки.

871. Известно, что $3 < a < 4$. Оцените значение выражения:
а) $5a$; б) $-a$; в) $a+2$; г) $5-a$; д) $0{,}2a+3$.

872. Зная, что $5 < x < 8$, оцените значение выражения:
а) $6x$; в) $x-5$;
б) $-10x$; г) $3x+2$.

873. Пользуясь тем, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, оцените значение выражения:

а) $\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{2}-1$; в) $2-\sqrt{2}$.

874. Пользуясь тем, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените значение выражения:

а) $\sqrt{5}+2$;

б) $3-\sqrt{5}$.

875. Сравните числа:
а) $\sqrt{11}+13$ и 15; в) $\sqrt{8}-\sqrt{3}$ и 2;

б) $\sqrt{84}$ и $7+\sqrt{6}$; г) $\sqrt{47}-\sqrt{7}$ и 5.

876. Сравните числа:
а) $\sqrt{2}+5$ и $2+\sqrt{5}$; в) $\frac{2\sqrt{3}+23}{3}$ и 9;

б) $\sqrt{3}-4$ и $1-\sqrt{5}$; г) $\frac{1-\sqrt{15}}{12}$ и $-\frac{7}{8}$.

877. а) Оцените периметр квадрата, сторона которого равна a см, если $5{,}1 \leqslant a \leqslant 5{,}2$.
б) Оцените длину стороны квадрата, зная, что периметр квадрата равен P см, если $15{,}6 \leqslant P \leqslant 15{,}8$.

878. Оцените значение выражения $\frac{1}{y}$, если:

а) $5 < y < 8$; б) $0{,}125 < y < 0{,}25$.

П

879. Найдите значение многочлена $x^2 - 4x + 1$ при $x = \frac{1}{4}$; -3; $2 - \sqrt{3}$.

880. Решите уравнение:

а) $\frac{8x^2 - 3}{5} - \frac{5 - 9x^2}{4} = 2$;

б) $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$;

в) $\frac{10}{x^2 - 4} - \frac{3}{2x - 4} = \frac{1}{2}$;

г) $x - \frac{x^2 - 17}{x - 3} = \frac{5}{x}$.

36. Сложение и умножение числовых неравенств

Рассмотрим теперь, как выполняется сложение и умножение числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 5

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

● Прибавив к обеим частям неравенства $a < b$ число c, получим $a + c < b + c$. Прибавив к обеим частям неравенства $c < d$ чис-ло b, получим $b + c < b + d$. Из неравенств $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$ следует, что $a + c < b + d$. ○

Теорема справедлива и в случае почленного сложения более чем двух неравенств.

Таким образом,

> если почленно сложить верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

ТЕОРЕМА 6

Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то $ac < bd$.

Умножив обе части неравенства $a < b$ на положительное число c, получим $ac < bc$. Умножив обе части неравенства $c < d$ на положительное число b, получим $bc < bd$. Из неравенств $ac < bc$ и $bc < bd$ следует, что $ac < bd$.

Теорема справедлива и для почленного умножения более чем двух неравенств указанного вида.

Таким образом,

> если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное неравенство.

Заметим, что если в неравенствах $a < b$ и $c < d$ среди чисел a, b, c и d имеются отрицательные, то неравенство $ac < bd$ может оказаться неверным. Так, перемножив почленно верные неравенства $-1 < 2$ и $-3 < 1$, получим неравенство $3 < 2$, которое не является верным.

СЛЕДСТВИЕ

Если числа a и b положительны и $a < b$, то $a^n < b^n$, где n — натуральное число.

Перемножив почленно n верных неравенств $a < b$, в которых a и b — положительные числа, получим верное неравенство $a^n < b^n$.

Доказанные свойства используются для оценки суммы, разности, произведения и частного.

Пусть, например, известно, что $15 < x < 16$ и $2 < y < 3$. Требуется оценить сумму $x + y$, разность $x - y$, произведение xy и частное $\frac{x}{y}$.

1. Оценим сумму $x + y$.

Применив теорему о почленном сложении неравенств к неравенствам $15 < x$ и $2 < y$, а затем к неравенствам $x < 16$ и $y < 3$, получим $17 < x + y$ и $x + y < 19$. Результат можно записать в виде двойного неравенства $17 < x + y < 19$. Запись обычно ведут короче:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ 2 < y < 3 \\ \hline 17 < x + y < 19 \end{array}$$

2. Оценим разность $x - y$.

Для этого представим разность $x - y$ в виде суммы $x + (-y)$. Сначала оценим выражение $-y$. Так как $2 < y < 3$, то $-2 > -y > -3$, т. е. $-3 < -y < -2$. Применим теперь теорему о почленном сложении неравенств:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{-3 < -y < -2} \\ 12 < x - y < 14 \end{array}$$

3. Оценим произведение xy.

Так как каждое из чисел x и y заключено между положительными числами, то они также являются положительными числами. Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{2 < y < 3} \\ 30 < xy < 48 \end{array}$$

4. Оценим частное $\frac{x}{y}$.

Для этого представим частное $\frac{x}{y}$ в виде произведения $x \cdot \frac{1}{y}$.

Сначала оценим выражение $\frac{1}{y}$. Так как $2 < y < 3$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$. По теореме о почленном умножении неравенств имеем

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}} \\ 5 < \frac{x}{y} < 8 \end{array}$$

Упражнения

881. Сложите почленно неравенства:

а) $12 > -5$ и $9 > 7$; б) $-2{,}5 < -0{,}7$ и $-6{,}5 < -1{,}3$.

882. Перемножьте почленно неравенства:

а) $5 > 2$ и $4 > 3$; б) $8 < 10$ и $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

883. Верно ли для положительных чисел a и b, что:

а) если $a^2 > b^2$, то $a^3 > b^3$; б) если $a^3 > b^3$, то $a^2 > b^2$?

884. Пусть $3 < a < 4$ и $4 < b < 5$. Оцените:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$.

885. Зная, что $6 < x < 7$ и $10 < y < 12$, оцените:

а) $x + y$; б) $y - x$; в) xy; г) $\frac{y}{x}$.

886. Пользуясь тем, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ и $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, оцените:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

887. Пользуясь тем, что $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ и $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$, оцените:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

888. Известны границы длин основания a и боковой стороны b равнобедренного треугольника, выраженные в миллиметрах:

$$26 \leqslant a \leqslant 28 \text{ и } 41 \leqslant b \leqslant 43.$$

Оцените периметр этого треугольника.

889. Измеряя длину a и ширину b прямоугольника (в сантиметрах), нашли, что $5,4 < a < 5,5$ и $3,6 < b < 3,7$.

Оцените: а) периметр прямоугольника; б) площадь прямоугольника.

890. Известны границы длины a и ширины b (в метрах) комнаты прямоугольной формы: $7,5 \leqslant a \leqslant 7,6$ и $5,4 \leqslant b \leqslant 5,5$. Подойдёт ли это помещение для библиотеки, для которой требуется комната площадью не менее 40 м^2?

891. Пусть α и β — углы треугольника. Известно, что

$$58° \leqslant \alpha \leqslant 59°,$$
$$102° \leqslant \beta \leqslant 103°.$$

Оцените величину третьего угла.

892. *(Для работы в парах.)* Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, докажите, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ верно неравенство:

а) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$;

б) $\frac{(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)}{16} \geqslant abc$.

1) Обсудите, какие свойства неравенств можно использовать при доказательстве неравенств. Запишите неравенство, выражающее соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел a и b.

2) Распределите, кто выполняет доказательство неравенства а), а кто — неравенства б). Проведите доказательство.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено доказательство неравенства.

893. Докажите, что сумма длин двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы длин его диагоналей.

894. *(Задача-исследование.)* Сравните сумму длин медиан треугольника с его периметром.

1) Начертите произвольный треугольник ABC и проведите медиану BO.

2) На луче BO отложите отрезок $OD = BO$ и соедините точку D с точками A и C. Какой вид имеет четырёхугольник $ABCD$?

3) Рассмотрите треугольник ABD. Сравните $2m_b$ с суммой $BC + AB$ (m_b — медиана BO).

4) Составьте аналогичные неравенства для $2m_a$ и $2m_c$.

5) Используя сложение неравенств, оцените сумму медиан треугольника $m_a + m_b + m_c$.

П

895. Лист жести имеет форму квадрата. После того как от него отрезали полосу шириной 5 дм, площадь оставшейся части листа стала равной 6 дм^2. Каковы размеры первоначального листа жести?

896. Упростите выражение

$$\left(\frac{8x}{16-9x^2}+\frac{x}{3x-4}\right):\left(1-\frac{4-3x}{4+3x}\right).$$

897. Докажите, что:

а) $9a+\frac{1}{a}\geqslant 6$ при $a > 0$; б) $25b+\frac{1}{b}\leqslant -10$ при $b < 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте теоремы, выражающие основные свойства числовых неравенств, и докажите их.
2. Сформулируйте и докажите теоремы о почленном сложении и умножении неравенств.
3. Оцените сумму, разность, произведение и частное чисел a и b, если известно, что $4 < a < 5$ и $9 < b < 10$.

§ 12 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

37. Пересечение и объединение множеств

Пусть A — множество натуральных делителей числа 12, а B — множество натуральных делителей числа 18. Зададим множества A и B путём перечисления элементов:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Обозначим буквой C множество общих делителей чисел 12 и 18, т. е. чисел, принадлежащих как множеству A, так и множеству B. Получим $C = \{1, 2, 3, 6\}$.

Говорят, что множество C является *пересечением* множеств A и B, и пишут: $A \cap B = C$.

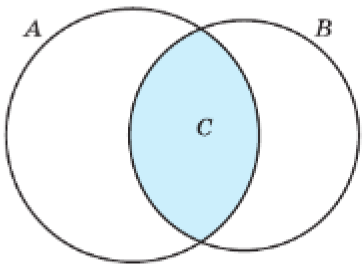


Рис. 34

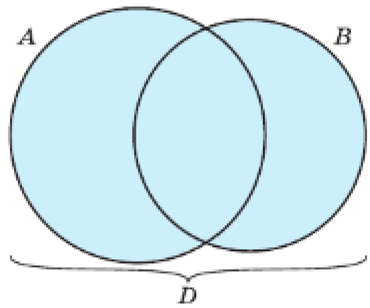


Рис. 35

Пересечением двух множеств называют множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.

Соотношение между множествами A, B и C можно проиллюстрировать с помощью специальных схем, называемых кругами Эйлера. На рисунке 34 множества A и B изображены кругами. Фигура, образовавшаяся при пересечении кругов, закрашенная на рисунке, изображает множество C.

Заметим, что если некоторые множества X и Y не имеют общих элементов, то говорят, что пересечением этих множеств является *пустое множество*. Его обозначают знаком $\varnothing$ и используют такую запись: $X \cap Y = \varnothing$.

Введём теперь понятие объединения множеств. Вернёмся к рассмотренному примеру множеств натуральных делителей чисел 12 и 18. Пусть D — множество, которому принадлежат все элементы множества A и все элементы множества B. Для того чтобы задать множество D, выпишем сначала все элементы множества A, а затем те элементы множества B, которые не принадлежат множеству A. Получим

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 9, 18\}.$$

Говорят, что множество D является *объединением* множеств A и B, и пишут: $D = A \cup B$.

> Объединением множеств называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

На рисунке 35 с помощью кругов Эйлера показано соотношение между множествами A, B и D. Фигура, закрашенная на рисунке, изображает множество D.

Упражнения

898. Известно, что X — множество простых чисел, не превосходящих 20, а Y — множество двузначных чисел, не превосходящих 20. Задайте множества X и Y перечислением элементов и найдите их пересечение и объединение.

899. Задайте путём перечисления элементов множество A двузначных чисел, являющихся квадратами натуральных чисел, и множество B двузначных чисел, кратных 16. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

900. Найдите пересечение и объединение:

а) множеств цифр, используемых в записи чисел 11 243 и 6321;
б) множеств букв, используемых в записи слов «геометрия» и «география»;
в) множества простых чисел, не превосходящих 40, и множества двузначных чисел;
г) множества двузначных чисел и множества натуральных чисел, кратных 19.

901. Пусть A — множество квадратов натуральных чисел, B — множество кубов натуральных чисел. Принадлежит ли:

а) пересечению множеств A и B число 1; 4; 64;
б) объединению множеств A и B число 16; 27; 64?

902. На рисунке 36 изображены отрезки AB и CD. Какая фигура является:

а) пересечением этих отрезков;
б) объединением этих отрезков?

Рис. 36

903. Множеством каких фигур является пересечение:

а) множества прямоугольников и множества ромбов;
б) множества равнобедренных треугольников и множества прямоугольных треугольников?

904. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множеством $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, множеством $\boldsymbol{Z}$ целых чисел, множеством $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. Найдите пересечение и объединение:

а) множества натуральных и множества целых чисел;
б) множества целых и множества рациональных чисел;
в) множества рациональных и множества иррациональных чисел.

905. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множеством чисел, кратных 4, и множеством чисел, кратных 3. Какое множество изображает общая часть этих кругов?

906. *(Для работы в парах.)* Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множествами A и B и найдите пересечение и объединение этих множеств, если:

а) A — множество целых чисел, кратных 3, B — множество целых чисел, кратных 5;
б) A — множество целых чисел, кратных 3, B — множество целых чисел, кратных 15.
1) Распределите, кто выполняет задания для случая а), а кто — для случая б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, верно ли выполнен рисунок и правильно ли найдены пересечение и объединение множеств A и B.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

907. Найдите пересечение и объединение множеств X и Y, если:
а) X — множество простых чисел, Y — множество составных чисел;
б) X — множество целых чисел, кратных 5, Y — множество целых чисел, кратных 15.

П

908. Доказать, что функция, заданная формулой

$$y = (x-8)^2 - (x+8)^2$$

является прямой пропорциональностью.

909. Решите уравнение

$$1 - \frac{1}{2-x} = \frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{1}{x-2}.$$

910. В одном фермерском хозяйстве благодаря применению новых технологий удалось получить гречихи на 2 ц с гектара больше, чем в другом. В результате оказалось, что в первом хозяйстве собрали 180 ц гречихи, а во втором — только 160 ц, хотя во втором хозяйстве под гречиху было отведено на 1 га больше. Какова была урожайность гречихи в каждом хозяйстве?

38. Числовые промежутки

Известно, что множество действительных чисел образовано рациональными и иррациональными числами. Между множеством действительных чисел и множеством точек на координатной прямой существует *взаимно однозначное соответствие*: каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число; и наоборот, каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой. В 7 классе рассматривались некоторые числовые промежутки: открытый и замкнутый лучи, отрезок, интервал и полуинтервал. Будем теперь называть замкнутый луч просто числовым лучом, а открытый луч — открытым числовым лучом. При задании числовых промежутков используют как неравенства, так и специальные обозначения.

Обозначения числовых промежутков, их названия и изображения на координатной прямой показаны в таблице.

Неравенство, задающее числовой промежуток	Обозначение и название числового промежутка	Изображение числового промежутка на координатной прямой
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$ — числовой отрезок	
$a < x < b$	$(a; b)$ — интервал	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$ — полуинтервал	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$ — полуинтервал	

Продолжение

Неравенство, задающее числовой промежуток	Обозначение и название числового промежутка	Изображение числового промежутка на координатной прямой
$x \geqslant a$	$[a;\ +\infty)$ — числовой луч	
$x > a$	$(a;\ +\infty)$ — открытый числовой луч	
$x \leqslant a$	$(-\infty;\ a]$ — числовой луч	
$x < a$	$(-\infty;\ a)$ — открытый числовой луч	

Из таблицы видно, что в случае, если граничная точка входит в числовой промежуток (неравенство нестрогое), ставится квадратная скобка, в противном случае (неравенство строгое) — круглая. Круглая скобка ставится также при использовании знаков $-\infty$ и $+\infty$ (читается «минус бесконечность» и «плюс бесконечность»).

Множество всех действительных чисел изображается всей координатной прямой. Его называют числовой прямой и обозначают так: $(-\infty;\ +\infty)$.

Рассмотрим примеры нахождения объединения и пересечения числовых промежутков.

Пример 1. Найдём пересечение и объединение числовых промежутков $[1;\ 5]$ и $[3;\ 7]$ (рис. 37).

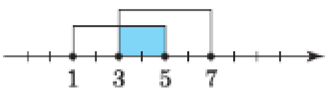


Рис. 37

▶ Имеем

$$[1;\ 5] \cap [3;\ 7] = [3;\ 5];$$

$$[1;\ 5] \cup [3;\ 7] = [1;\ 7]. \ \triangleleft$$

Пример 2. Найдём пересечение и объединение числовых промежутков $[-4;\ +\infty)$ и $[3;\ +\infty)$ (рис. 38).

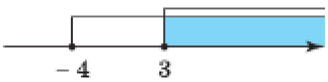


Рис. 38

▶ Имеем

$$[-4;\ +\infty) \cap [3;\ +\infty) = [3;\ +\infty);$$

$$[-4;\ +\infty) \cup [3;\ +\infty) = [-4;\ +\infty). \ \triangleleft$$

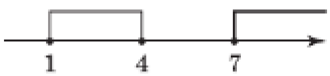


Рис. 39

Заметим, что если числовые промежутки не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество. Например,

$$[1;\ 4] \cap [7;\ +\infty) = \varnothing \text{ (рис. 39).}$$

Следует иметь также в виду, что объединение числовых промежутков не всегда представляет собой числовой промежуток. Например, множество $[0;\ 4] \cup [6;\ 10]$ не является числовым промежутком (рис. 40).

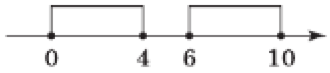


Рис. 40

Упражнения

911. Изобразите на координатной прямой промежуток и назовите его:
а) $[-2;\ 4]$; б) $(-3;\ 3)$; в) $[0;\ 5]$; г) $(-4;\ 0)$; д) $(3;\ +\infty)$; е) $[2;\ +\infty)$; ж) $(-\infty;\ 4]$; з) $(-\infty;\ -1)$; и) $(-\infty;\ +\infty)$.

912. Изобразите на координатной прямой промежуток и назовите его:
а) $(3;\ 7)$; б) $[1;\ 6]$; в) $(-\infty;\ 5)$; г) $[12;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 3]$; е) $(15;\ +\infty)$.

913. Назовите промежутки, изображённые на рисунке 41, и обозначьте их.

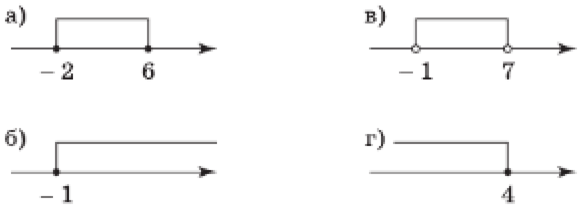


Рис. 41

914. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:
а) $x \geqslant -2$; б) $x \leqslant 3$; в) $x > 8$; г) $x < -5$; д) $x > 0{,}3$; е) $x \leqslant -8{,}1$.

915. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству:
а) $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 4$; б) $-2 < x < 1{,}3$; в) $-5 \leqslant x \leqslant -3\frac{1}{3}$; г) $2 < x \leqslant 6{,}1$.

916. а) Принадлежит ли интервалу $(-4;\ 6{,}5)$ число:

$$-3;\ -5;\ 5;\ 6{,}5;\ -3{,}9;\ -4{,}1?$$

б) Принадлежит ли числовому отрезку $[-8;\ -5]$ число:

$$-9;\ -8;\ -5{,}5;\ -5;\ -6;\ -7{,}5?$$

917. Какие из чисел $-1{,}6$; $-1{,}5$; -1; 0; 3; $5{,}1$; $6{,}5$ принадлежат промежутку:

а) $[-1{,}5;\ 6{,}5]$; б) $(3;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -1]$?

918. Принадлежит ли интервалу $(1{,}5;\ 2{,}4)$ число:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$?

919. Укажите все дроби вида $\frac{a}{54}$, где $a \in \boldsymbol{N}$, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{9};\ \frac{1}{6}\right]$.

920. Какие целые числа принадлежат промежутку:

а) $(-4;\ 3)$; б) $[-3;\ 5]$?

921. Какие целые числа принадлежат промежутку:

а) $[0;\ 8]$; б) $(-3;\ 3)$; в) $(-5;\ 2)$; г) $(-4;\ 9]$?

922. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

а) $[-12;\ -9]$; б) $[-1;\ 17)$; в) $(-\infty;\ 31]$; г) $(-\infty;\ 8)$.

923. Принадлежит ли промежутку $(-\infty;\ 2)$ число $1{,}98$? Укажите два числа, большие $1{,}98$, принадлежащие этому промежутку. Можно ли найти наибольшее число, принадлежащее этому промежутку? Существует ли в этом промежутке наименьшее число?

924. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а) $(1;\ 8)$ и $(5;\ 10)$; в) $(5;\ +\infty)$ и $(7;\ +\infty)$;
б) $[-4;\ 4]$ и $[-6;\ 6]$; г) $(-\infty;\ 10)$ и $(-\infty;\ 6)$.

925. Сколько целых чисел принадлежит пересечению интервалов $(-3{,}9;\ 2)$ и $(-4{,}3;\ 1)$? Выберите верный ответ:

1. Три 2. Четыре 3. Пять 4. Шесть

926. Покажите дугой на координатной прямой объединение промежутков:

а) $[-7;\ 0]$ и $[-3;\ 5]$; в) $(-\infty;\ 4)$ и $(10;\ +\infty)$;
б) $(-4;\ 1)$ и $(10;\ 12)$; г) $[3;\ +\infty)$ и $(8;\ +\infty)$.

927. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков:

а) $(-3;\ +\infty)$ и $(4;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 6)$ и $(-\infty;\ 9)$;
б) $(-\infty;\ 2)$ и $[0;\ +\infty)$; г) $[1;\ 5]$ и $[0;\ 8]$.

928. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1+\dfrac{a-x}{x}}{ax}$; б) $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}-1}{2a^2b^2}$.

929. Докажите неравенство $a^2 + 5 > 2a$.

930. Пассажир проехал в поезде 120 км и вернулся с обратным поездом, проходящим в час на 5 км больше. Определите скорость каждого поезда, если известно, что на обратный путь он затратил на 20 мин меньше.

931. При каком x значение функции, заданной формулой $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$, равно -1?

39. Решение неравенств с одной переменной

Неравенство $5x - 11 > 3$ при одних значениях переменной x обращается в верное числовое неравенство, а при других нет.

Например, если вместо x подставить число 4, то получится верное неравенство $5 \cdot 4 - 11 > 3$, а если вместо x подставить число 2, то получится неравенство $5 \cdot 2 - 11 > 3$, которое не является верным.

Говорят, что число 4 является *решением неравенства* $5x - 11 > 3$ или удовлетворяет этому неравенству. Нетрудно проверить, что решениями неравенства являются, например, числа 100, 180, 1000. Числа 2; 0,5; −5 не являются решениями этого неравенства.

> **Определение.** Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.

При решении неравенств используются следующие свойства:

1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;
если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Например, неравенство

$$18 + 6x > 0 \qquad (1)$$

равносильно неравенству

$$6x > -18, \qquad (2)$$

а неравенство $6x > -18$ равносильно неравенству $x > -3$.

Указанные свойства неравенств можно доказать, опираясь на свойства числовых неравенств.

Докажем, например, что равносильны неравенства (1) и (2). Пусть некоторое число a является решением неравенства (1), т. е. обращает его в верное числовое неравенство $18 + 6a > 0$. Прибавив к обеим частям этого неравенства число -18, получим верное неравенство $18 + 6a - 18 > 0 - 18$, т. е. $6a > -18$, а это означает, что число a является решением неравенства (2).

Мы показали, что каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2). Аналогично доказывается, что каждое решение неравенства (2) служит решением неравенства (1). Таким образом, неравенства (1) и (2) имеют одни и те же решения, т. е. являются равносильными.

Подобными рассуждениями устанавливается справедливость обоих свойств неравенств в общем виде.

Приведём примеры решения неравенств.

Пример 1. Решим неравенство $16x > 13x + 45$.

▶ Перенесём слагаемое $13x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства:

$$16x - 13x > 45.$$

Приведём подобные члены:

$$3x > 45.$$

Разделим обе части неравенства на 3:

$$x > 15.$$

Множество решений неравенства состоит из всех чисел, больших 15. Это множество представляет собой открытый числовой луч $(15; +\infty)$, изображённый на рисунке 42.

Рис. 42

Ответ можно записать в виде числового промежутка $(15; +\infty)$ или в виде неравенства $x > 15$, задающего этот промежуток. ◁

Пример 2. Решим неравенство $15x - 23(x + 1) > 2x + 11$.

▶ Раскроем скобки в левой части неравенства:

$$15x - 23x - 23 > 2x + 11.$$

Перенесём с противоположными знаками слагаемое $2x$ из правой части неравенства в левую, а слагаемое -23 из левой части в правую:

$$15x - 23x - 2x > 11 + 23,$$

Приведём подобные члены:

$$-10x > 34.$$

Разделим обе части на -10, при этом изменим знак неравенства на противоположный:

$$x < -3{,}4.$$

Множество решений данного неравенства представляет собой открытый числовой луч $(-\infty; -3{,}4)$, изображённый на рисунке 43.

Рис. 43

Ответ: $(-\infty; -3{,}4)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 2$.

▶ Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, т. е. на число 6. Получим

$$\frac{x}{3} \cdot 6 - \frac{x}{2} \cdot 6 < 2 \cdot 6,$$

$$2x - 3x < 12.$$

Отсюда

$$-x < 12,$$

$$x > -12.$$

Ответ: $(-12; +\infty)$. ◁

В каждом из рассмотренных примеров мы заменяли заданное неравенство равносильным ему неравенством вида $ax > b$ или $ax < b$, где a и b — некоторые числа. Неравенства такого вида называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

В приведённых примерах мы получали линейные неравенства, в которых коэффициент при переменной не равен нулю. Может случиться, что при решении неравенства мы придём к линейному неравенству вида $0 \cdot x > b$ или $0 \cdot x < b$. Неравенство такого вида, а значит, и соответствующее исходное неравенство либо не имеют решений, либо их решением является любое число.

Пример 4. Решим неравенство

$$2(x + 8) - 5x < 4 - 3x.$$

▶ Имеем

$$2x + 16 - 5x < 4 - 3x,$$
$$2x - 5x + 3x < 4 - 16.$$

Приведём подобные члены в левой части неравенства и запишем результат в виде $0 \cdot x$:

$$0 \cdot x < -12.$$

Полученное неравенство не имеет решений, так как при любом значении x оно обращается в числовое неравенство $0 < -12$, не являющееся верным. Значит, не имеет решений и равносильное ему заданное неравенство.

Ответ: решений нет. ◁

Упражнения

932. Является ли решением неравенства $5y > 2(y - 1) + 6$ значение y, равное:

а) 8; б) −2; в) 1,5; г) 2?

933. Укажите два каких-либо решения неравенства $2x < x + 7$.

934. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $x + 8 > 0$; в) $x + 1{,}5 \leqslant 0$;

б) $x - 7 < 0$; г) $x - 0{,}4 \geqslant 0$.

935. Решите неравенство:

а) $3x > 15$; б) $-4x < -16$; в) $-x \geqslant 1$; г) $11y \leqslant 33$; д) $12y < 1,8$; е) $27b \geqslant 12$; ж) $-6x > 1,5$; з) $15x \leqslant 0$; и) $0,5y > -4$; к) $2,5a > 0$; л) $\frac{1}{3}x > 6$; м) $-\frac{1}{7}y < -1$.

936. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $2x < 17$; б) $5x \geqslant -3$; в) $-12x < -48$; г) $-x < -7,5$; д) $30x > 40$; е) $-15x < -27$; ж) $-4x \geqslant -1$; з) $10x \leqslant -24$; и) $\frac{1}{6}x < 2$; к) $-\frac{1}{3}x < 0$; л) $0,02x \geqslant -0,6$; м) $-1,8x \leqslant 36$.

937. Решите неравенство $5x + 1 > 11$. Укажите три каких-нибудь решения этого неравенства.

938. Решите неравенство $3x - 2 < 6$. Является ли решением этого неравенства число: 4; $2\frac{4}{5}$; $2\frac{4}{7}$?

939. Решите неравенство:

а) $7x - 2,4 < 0,4$; б) $1 - 5y > 3$; в) $2x - 17 \geqslant -27$; г) $2 - 3a \leqslant 1$; д) $17 - x > 10 - 6x$; е) $30 + 5x \leqslant 18 - 7x$; ж) $64 - 6y \geqslant 1 - y$; з) $8 + 5y \leqslant 21 + 6y$.

940. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $11x - 2 < 9$; б) $2 - 3y > -4$; в) $17 - x \leqslant 11$; г) $2 - 12x > -1$; д) $3y - 1 > -1 + 6y$; е) $0,2x - 2 < 7 - 0,8x$; ж) $6b - 1 < 12 + 7b$; з) $16x - 34 > x + 1$.

941. а) При каких значениях x двучлен $2x - 1$ принимает положительные значения?
б) При каких значениях y двучлен $21 - 3y$ принимает отрицательные значения?
в) При каких значениях c двучлен $5 - 3c$ принимает значения, большие 80?

942. а) При каких значениях a значения двучлена $2a - 1$ меньше значений двучлена $7 - 1,2a$?
б) При каких значениях p значения двучлена $1,5p - 1$ больше значений двучлена $1 + 1,1p$?

943. Решите неравенство:

а) $5(x-1)+7 \leqslant 1-3(x+2)$;
б) $4(a+8)-7(a-1)<12$;
в) $4(b-1{,}5)-1{,}2 \geqslant 6b-1$;
г) $1{,}7-3(1-m) \leqslant -(m-1{,}9)$;
д) $4x>12(3x-1)-16(x+1)$;
е) $a+2<5(2a+8)+13(4-a)$;
ж) $6y-(y+8)-3(2-y) \leqslant 2$.

944. Решите неравенство:

а) $4(2-3x)-(5-x)>11-x$;
б) $2(3-z)-3(2+z) \leqslant z$;
в) $1>1{,}5(4-2a)+0{,}5(2-6a)$;
г) $2{,}5(2-y)-1{,}5(y-4) \leqslant 3-y$;
д) $x-2 \geqslant 4{,}7(x-2)-2{,}7(x-1)$;
е) $3{,}2(a-6)-1{,}2a \leqslant 3(a-8)$.

945. Решите неравенство и покажите на координатной прямой множество его решений:

а) $a(a-4)-a^2>12-6a$;
б) $(2x-1)2x-5x<4x^2-x$;
в) $5y^2-5y(y+4) \geqslant 100$;
г) $6a(a-1)-2a(3a-2)<6$.

946. Решите неравенство:

а) $0{,}2x^2-0{,}2(x-6)(x+6)>3{,}6x$;
б) $(2x-5)^2-0{,}5x<(2x-1)(2x+1)-15$;
в) $(12x-1)(3x+1)<1+(6x+2)^2$;
г) $(4y-1)^2>(2y+3)(8y-1)$.

947. Решите неравенство:

а) $4b(1-3b)-(b-12b^2)<43$;
б) $3y^2-2y-3y(y-6) \geqslant -2$;
в) $2p(5p+2)-p(10p+3) \leqslant 14$;
г) $a(a-1)-(a^2+a)<34$.

948. Решите неравенство:

а) $\frac{2x}{5}>1$;
б) $\frac{x}{3}<2$;
в) $\frac{6x}{7} \geqslant 0$;
г) $\frac{3x-1}{4}>2$;
д) $2>\frac{6-x}{5}$;
е) $\frac{2+3x}{18}<0$;
ж) $\frac{12-7x}{42} \geqslant 0$;
з) $\frac{1}{3}(x+15)>4$;
и) $6 \leqslant \frac{2}{7}(x+4)$.

949. Решите неравенство:

а) $\frac{9x}{5} \geqslant 0$;
б) $1<\frac{3x}{4}$;
в) $\frac{5+6x}{2}>3$;
г) $\frac{4x-11}{4} \leqslant 0$;
д) $\frac{1}{7}x \geqslant 2$;
е) $\frac{2}{11}(x-4)<3$.

950. При каких значениях y:

а) значения дроби $\frac{7-2y}{6}$ больше соответствующих значений дроби $\frac{3y-7}{12}$;

б) значения дроби $\frac{4,5-2y}{5}$ меньше соответствующих значений дроби $\frac{2-3y}{10}$;

в) значения двучлена $5y-1$ больше соответствующих значений дроби $\frac{3y-1}{4}$;

г) значения дроби $\frac{5-2y}{12}$ меньше соответствующих значений двучлена $1-6y$?

951. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<5$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}>-3$; д) $\frac{2x}{5}-x\leqslant 1$;

б) $\frac{3y}{2}-\frac{y}{3}\geqslant 2$; г) $y+\frac{y}{2}>3$; е) $\frac{3x}{4}-2x<0$.

952. Решите неравенство и покажите на координатной прямой множество его решений:

а) $\frac{13x-1}{2}<4x$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\leqslant 2$;

б) $\frac{5-2a}{4}\geqslant 2a$; г) $\frac{2y}{5}-\frac{y}{2}\geqslant 1$.

953. Решите неравенство:

а) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$; г) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}\leqslant 4$;

б) $\frac{4-y}{5}-5y\geqslant 0$; д) $\frac{y-1}{2}-1+\frac{2y-1}{6}>y$;

в) $y-\frac{2y-1}{4}\geqslant 1$; е) $p-\frac{p-1}{2}-\frac{p+3}{4}>2$.

954. Решите неравенство:

а) $\frac{2a-1}{2}-\frac{3a-3}{5}>a$; в) $\frac{5x-1}{5}+\frac{x+1}{2}\leqslant x$;

б) $x-\frac{2x+3}{2}\leqslant\frac{x-1}{4}$; г) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+3}{8}-y>2$.

955. а) При каких значениях a сумма дробей $\frac{2a-1}{4}$ и $\frac{a-1}{3}$ положительна?

б) При каких значениях b разность дробей $\frac{3b-1}{2}$ и $\frac{1+5b}{4}$ отрицательна?

956. Решите неравенство:

а) $31(2x + 1) - 12x > 50x$; в) $3x + 7 > 5(x + 2) - (2x + 1)$;

б) $x + 4 - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3}$; г) $\frac{12x - 1}{3} < 4x - 3$.

957. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = 2x + 13$, принимает положительные значения; отрицательные значения?

958. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x - 4}$; в) $\sqrt{\frac{1 + 3a}{25}}$; д) $\sqrt{-3(1 - 5x)}$;

б) $\sqrt{4 - 6a}$; г) $\sqrt{\frac{7 - 5a}{8}}$; е) $\sqrt{-(6 - x)}$?

959. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{7 - 14x}}{x + 8}$; б) $y = \frac{6}{\sqrt{4 - x} - 1}$.

960. Найдите:

а) наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $1{,}6 - (3 - 2y) < 5$;

б) наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $8(6 - y) < 24{,}2 - 7y$.

961. При каких натуральных значениях n:

а) разность $(2 - 2n) - (5n - 27)$ положительна;

б) сумма $(-27{,}1 + 3n) + (7{,}1 + 5n)$ отрицательна?

962. Найдите множество значений a, при которых уравнение

$$(a + 5)x^2 + 4x - 20 = 0$$

не имеет корней.

963. Найдите множество значений k, при которых уравнение

$$(k - 4)x^2 + 16x - 24 = 0$$

имеет два корня.

964. Длина стороны прямоугольника 6 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр прямоугольника был меньше периметра квадрата со стороной 4 см?

965. Длина основания прямоугольного параллелепипеда 12 дм, ширина 5 дм. Какой должна быть высота параллелепипеда, чтобы его объём был меньше объёма куба с ребром 9 дм?

966. Одна из переплётных мастерских берёт по 480 р. за книгу и ещё 630 р. за оформление заказа, а другая — по 485 р. за книгу и 580 р. за оформление заказа. Укажите наименьшее число книг, при котором заказ выгоднее сделать в первой мастерской.

967. За денежный почтовый перевод до 1000 р. в некотором городе берётся плата 7 р. плюс 5% от переводимой суммы. Посетитель имеет 800 р. Укажите наибольшее целое число рублей, которое он может перевести.

968. Туристы отправились на моторной лодке по течению реки и должны вернуться обратно к стоянке не позднее чем через 3 ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч?

П

969. Найдите значение дроби $\frac{x^2+x-5}{x-1}$ при $x=1-\sqrt{3}$.

970. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-4}{6}-\frac{x}{2}=\frac{x-4}{3}$; б) $\frac{2x^2-1}{2}-x+\frac{1}{2}=0$.

971. Решите графически уравнение $\frac{12}{x}=x^2$.

972. Моторная лодка прошла 30 км по течению реки и возвратилась обратно, затратив на весь путь 5 ч 20 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

40. Решение систем неравенств с одной переменной

Задача. Турист вышел с турбазы по направлению к станции, расположенной на расстоянии 20 км. Если турист увеличит скорость на 1 км/ч, то за 4 ч он пройдёт расстояние, большее 20 км. Если он уменьшит скорость на 1 км/ч, то даже за 5 ч не успеет дойти до станции. Какова скорость туриста?

▶ Пусть скорость туриста равна x км/ч. Если турист будет идти со скоростью $(x + 1)$ км/ч, то за 4 ч он пройдёт $4(x + 1)$ км. По условию задачи $4(x + 1) > 20$. Если турист будет идти со скоростью $(x - 1)$ км/ч, то за 5 ч он пройдёт $5(x - 1)$ км. По условию задачи $5(x - 1) < 20$.

Требуется найти те значения x, при которых верно как неравенство $4(x + 1) > 20$, так и неравенство $5(x - 1) < 20$, т. е. найти общие решения этих неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему неравенств, и используют запись

$$\begin{cases} 4(x+1) > 20, \\ 5(x-1) < 20. \end{cases}$$

Заменив каждое неравенство системы равносильным ему неравенством, получим систему

$$\begin{cases} x > 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

Значит, значение x должно удовлетворять условию $4 < x < 5$.

О т в е т: скорость туриста больше 4 км/ч, но меньше 5 км/ч. ◁

О п р е д е л е н и е. Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

П р и м е р 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} 2x > 7, \\ -3x > -18. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x > 3{,}5, \\ x < 6. \end{cases}$$

Решениями системы являются значения x, удовлетворяющие каждому из неравенств $x > 3{,}5$ и $x < 6$. Изобразив на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 3{,}5$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 6$ (рис. 44), найдём, что оба неравенства верны при $3{,}5 < x < 6$. Множеством решений системы является интервал $(3{,}5;\ 6)$.

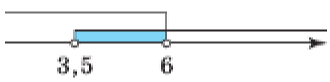


Рис. 44

Ответ можно записать в виде интервала (3,5; 6) или в виде двойного неравенства $3{,}5 < x < 6$, задающего этот интервал. ◁

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 2 > 25, \\ 1 - x < 0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} 3x > 27, \\ -x < -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 9, \\ x > 1. \end{cases}$$

Изобразим на координатной прямой множества решений каждого из полученных неравенств (рис. 45).

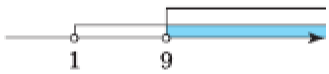


Рис. 45

Оба неравенства верны при $x > 9$. Ответ можно записать в виде неравенства $x > 9$ или в виде открытого числового луча $(9; +\infty)$, задаваемого этим неравенством. ◁

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 0{,}2x - 1 < 0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} -x > -2, \\ 0{,}2x < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2, \\ x < 5. \end{cases}$$

Используя координатную прямую, найдём общие решения неравенств $x < 2$ и $x < 5$, т. е. пересечение множеств их решений (рис. 46).

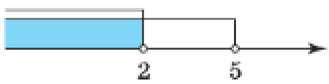


Рис. 46

Мы видим, что пересечение этих множеств состоит из чисел, удовлетворяющих условию $x < 2$, т. е. представляет собой открытый числовой луч $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$. ◁

П р и м е р 4. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 1-5x>11, \\ 6x-18>0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} -5x>10, \\ 6x>18; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-2, \\ x>3. \end{cases}$$

Используя координатную прямую (рис. 47), найдём, что множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < -2$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 3$, не имеют общих элементов, т. е. их пересечение пусто. Данная система неравенств не имеет решений.

Рис. 47

О т в е т: решений нет. ◁

П р и м е р 5. Решим двойное неравенство

$$-1 < 3 + 2x < 3.$$

▶ Двойное неравенство представляет собой иную запись системы неравенств

$$\begin{cases} 3+2x>-1, \\ 3+2x<3. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что оба неравенства верны при

$$-2 < x < 0.$$

В этом примере запись удобно вести с помощью двойных неравенств:

$$-1 < 3 + 2x < 3,$$
$$-4 < 2x < 0,$$
$$-2 < x < 0.$$

О т в е т: $(-2; 0)$. ◁

Упражнения

973. Является ли число 3 решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6x-1>x, \\ 4x-32<3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x<5x+7, \\ 3x-1>5-x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x+4<20, \\ 3-2x>-1? \end{cases}$

974. Какие из чисел -2, 0, 5, 6 являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} 3x-22<0, \\ 2x-1>3? \end{cases}$$

975. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 17, \\ x > 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 1, \\ x < 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -3{,}5, \\ x > 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x > 8, \\ x \leqslant 20. \end{cases}$

976. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 12 > 0, \\ 3x > 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 10 < 0, \\ 2x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4y < -4, \\ 5 - y > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6y \geqslant 42, \\ 4y + 12 \leqslant 0. \end{cases}$

977. Решите систему неравенств и укажите несколько чисел, являющихся её решениями:

а) $\begin{cases} x - 0{,}8 > 0, \\ -5x < 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1 > 3x, \\ 5x - 1 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2 - x \leqslant 0, \\ x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10x < 2, \\ x > 0{,}1. \end{cases}$

978. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}4x - 1 \leqslant 0, \\ 2{,}3x \geqslant 4{,}6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}3x > 4, \\ 0{,}2x + 1 < 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}7x - 2{,}1 < 0, \\ \frac{2}{3}x > 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5}{6}x - 10 \leqslant 0, \\ 3x \leqslant 1\frac{1}{3}. \end{cases}$

979. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}6x + 7{,}2 > 0, \\ 5{,}2 \geqslant 2{,}6x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}2x < 3, \\ \frac{1}{6}x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1{,}5x + 4{,}5 \leqslant 0, \\ \frac{1}{9}x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 6{,}5 < 0, \\ \frac{1}{3}x < -1. \end{cases}$

980. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 < 1,4 - x, \\ 3x - 2 > x - 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 17x - 2 > 12x - 1, \\ 3 - 9x < 1 - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 6 \leqslant x, \\ 3x + 12 \leqslant x + 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 25 - 6x \leqslant 4 + x, \\ 3x + 7,7 > 1 + 4x. \end{cases}$

981. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 57 - 7x > 3x - 2, \\ 22x - 1 < 2x + 47; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 102 - 73z > 2z + 2, \\ 81 + 11z \geqslant 1 + z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - 12y < 3y + 1, \\ 2 - 6y > 4 + 4y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6 + 6,2x \geqslant 12 - 1,8x, \\ 2 - x \geqslant 3,5 - 2x. \end{cases}$

982. Укажите допустимые значения переменной:

а) $\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{1 - x}$; в) $\sqrt{6 - x} - \sqrt{3x - 9}$;

б) $\sqrt{x} - \sqrt{3x - 1}$; г) $\sqrt{2x + 2} + \sqrt{6 - 4x}$.

983. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 6} - \sqrt{2x - 5}}$; б) $y = \dfrac{6}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 1}}$.

984. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5(x - 2) - x > 2, \\ 1 - 3(x - 1) < -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x + 3 \geqslant 5(x - 4) + 1, \\ 4x + 1 \leqslant 43 - 3(7 + x); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y - (y - 4) < 6, \\ y > 3(2y - 1) + 18; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(2 - 3p) - 2(3 - 2p) > p, \\ 6 < p^2 - p(p - 8). \end{cases}$

985. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3(x - 2) < x, \\ 6x - 3 < 17 - (x - 5); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3,3 - 3(1,2 - 5x) > 0,6(10x + 1), \\ 1,6 - 4,5(4x - 1) < 2x + 26,1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5,8(1 - a) - 1,8(6 - a) < 5, \\ 8 - 4(2 - 5a) > -(5a + 6); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x(x - 1) - (x^2 - 10) < 1 - 6x, \\ 3,5 - (x - 1,5) < 6 - 4x. \end{cases}$