МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

8 КЛАСС

Базовый уровень

УЧЕБНИК

Под редакцией С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

16-е издание, переработанное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 8-й класс : базовый уровень :
М34 учебник / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. — 16-е изд., перераб. — Москва : Просвещение, 2023. — 319, [1] с. : ил.
ISBN 978-5-09-102536-1.

Данный учебник является частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС ООО, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ № 287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-102536-1

Дорогие восьмиклассники!

В этом году вы продолжите изучение алгебры. Ваши представления о выражениях, числах, функциях, уравнениях и неравенствах пополнятся и расширятся. Если в 7 классе вы занимались преобразованием целых выражений, то теперь познакомитесь с преобразованием дробей. Вы встретитесь с иррациональными числами, изучите свойства новых функций: обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$ и функции $y=\sqrt{x}$ — и научитесь строить их графики. Вы познакомитесь с некоторыми способами решения квадратных и дробных рациональных уравнений, неравенств с одной переменной и их систем.

Весь новый материал подробно разъясняется в объяснительных текстах учебника, приводятся решения различных задач. Правила и свойства, которые нужно запомнить, даны на цветном фоне, чтобы вы обратили на них внимание. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса алгебры 7 класса». Контрольные вопросы и задания помогут вам проверить, как вы усвоили изученный материал.

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что вы примете активное участие в выполнении упражнений под названием «задача-исследование», рассчитанных на коллективное обсуждение приёмов решения, а также в выполнении заданий, предназначенных для работы в парах. Выполняя такие задания, вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей и отстаивать свою позицию.

Если вы интересуетесь математикой, то ваше внимание, безусловно, привлечёт материал под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», помещённый в конце каждой главы. Специально для учащихся, находящих радость в решении непростых задач, в учебнике даны «Задачи повышенной трудности». Решение таких задач поможет не только расширить кругозор, но и подготовиться к участию в математических олимпиадах.

Конечно, многим из вас любопытно узнать, как и почему зарождался и затем развивался тот или иной раздел алгебры. Для ответов на эти вопросы в учебнике приведены «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении алгебры.

В учебнике используются следующие условные обозначения:

— текст, который нужно запомнить

— материал, который важно знать

▶ — начало решения задачи

◁ — окончание решения задачи

● — начало обоснования утверждения или вывода формулы

○ — окончание обоснования утверждения или вывода формулы

11. — задание обязательного уровня

19. — задание повышенной трудности

П — упражнения для повторения

Глава I РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

В курсе алгебры 7 класса вы занимались преобразованиями целых выражений. Теперь будут рассматриваться преобразования дробных выражений — правила сложения, вычитания, умножения и деления рациональных дробей, а также правило возведения дроби в степень. Здесь вы познакомитесь с новой функцией, которая называется обратной пропорциональностью. Её свойства существенно отличаются от свойств изученных ранее функций.

§ 1 РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Рациональные выражения

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, а также деления на число, отличное от нуля, называют *целыми выражениями*. Так, целыми являются выражения

$$7a^2b,\ m^3+n^3,\quad (x-y)(x^2+y^2),$$
$$x^4y+2x^2y^2+8y,\quad m^8+n^6+m^2n^2,$$
$$b^{10}-\frac{b(3b+c)}{7},\ \frac{a+5}{8},\ 2x:9.$$

В отличие от них выражения

$$4a-\frac{b}{2a+1},\quad \frac{x+y}{x^2-3xy+y^2},$$
$$\frac{n}{3}-\frac{5}{n^2+1},\ 2p:q,$$

помимо действий сложения, вычитания и умножения, содержат деление на выражение с переменными. Такие выражения называют *дробными выражениями*.

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями*.

Выражение вида $\frac{a}{b}$ называется, как известно, дробью.

Дробь, числитель и знаменатель которой многочлены, называют *рациональной (алгебраической) дробью*.

Примерами рациональных дробей служат дроби

$$\frac{5}{a},\ \frac{b-3}{10},\ \frac{x+y}{x^2-xy+y^2},\ \frac{3}{m^2-n^2}.$$

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных, так как для нахождения значения целого выражения нужно выполнить действия, которые всегда возможны.

Дробное выражение имеет смысл только при тех значениях переменных, при которых все знаменатели рациональных дробей, содержащихся в этом выражении, будут отличны от нуля. Например, выражение $10+\frac{1}{a}$ имеет смысл при всех значениях a, кроме нуля, так как при $a = 0$ знаменатель дроби $\frac{1}{a}$ обращается в нуль, а делить на нуль, как известно, нельзя. Выражение $x+\frac{y}{x-y}$ имеет смысл при тех значениях x и y, при которых $x \neq y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*.

В рациональной дроби допустимыми являются те значения переменных, при которых не обращается в нуль знаменатель дроби.

Пример 1. Найдём допустимые значения переменной в дроби

$$\frac{5}{a(a-9)}.$$

ИСААК НЬЮТОН (1643—1727) — английский физик, механик, математик и астроном. Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения, разработал, независимо от Лейбница, основы математического анализа.

▶ Допустимыми значениями переменной будут те значения a, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль, то есть выполнено условие:

$$a(a - 9) \neq 0.$$

Произведение в данном случае не равно нулю тогда и только тогда, когда каждый множитель не равен нулю, то есть

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 9. \end{cases}$$

Следовательно, допустимыми значениями переменной a являются все числа, кроме 0 и 9. ◁

Пример 2. Найдём область определения функции $y = \frac{x+3}{x-7}$.

▶ Область определения данной функции составляют те значения x, при которых выполнено условие $x - 7 \neq 0$, откуда $x \neq 7$. Значит, область определения функции составляют все числа, кроме числа 7. ◁

Пример 3. При каком значении x значение дроби $\frac{(x-2)^2 - 25}{2x+6}$ равно нулю?

▶ *Дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$.*

Числитель дроби $\frac{(x-2)^2 - 25}{2x+6}$ равен нулю, если

$$(x - 2)^2 = 25,$$

т. е.

$$x - 2 = 5 \text{ или } x - 2 = -5.$$

Итак, числитель дроби равен нулю при $x = 7$ и $x = -3$. Знаменатель данной дроби не равен нулю, если $x \neq -3$. Значит, данная дробь равна нулю при $x = 7$. ◁

Упражнения

1. Какие из выражений

$$\frac{1}{3}a^2b,\ (x - y)^2 - 4xy,\ \frac{m+3}{m-3},\ \frac{8}{x^2+y^2},\ \frac{a^2-2ab}{12},\ (c + 3)^2 + \frac{2}{c}$$

являются целыми, какие — дробными?

2. Из рациональных выражений $7x^2 - 2xy$, $\frac{a}{9}$, $\frac{12}{b}$, $a(a - b) - \frac{b}{3a}$, $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{3}n^2$, $\frac{a}{a+3} - 8$ выпишите те, которые являются:

а) целыми выражениями; б) дробными выражениями.

3. Найдите значение дроби $\frac{y-1}{4}$ при $y = 3;\ 1;\ -5;\ \frac{1}{2};\ -1{,}6;\ 100$.

4. Найдите значение дроби:

а) $\frac{a-8}{2a+5}$ при $a = -2$; б) $\frac{b^2+6}{2b}$ при $b = 3$.

5. Чему равно значение дроби $\frac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$ при:

а) $a = -3$, $b = -1$; б) $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 0{,}5$?

6. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

x	-13	-5	$-0{,}2$	0	$\frac{1}{17}$	1	$5\frac{2}{3}$	7
$\frac{x+5}{x-3}$								

7. а) Из формулы $v = \frac{s}{t}$ выразите: переменную s через v и t; переменную t через s и v.

б) Из формулы $\rho = \frac{m}{V}$ выразите переменную V через ρ и m.

8. Из городов A и B, расстояние между которыми s км, вышли в одно и то же время навстречу друг другу два поезда. Первый шёл со скоростью v_1 км/ч, а второй — со скоростью v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Выразите переменную t через s, v_1 и v_2. Найдите значение t, если известно, что:
а) $s = 250$, $v_1 = 60$, $v_2 = 40$; б) $s = 310$, $v_1 = 75$, $v_2 = 80$.

9. а) Составьте дробь, числитель которой — произведение переменных x и y, а знаменатель — их сумма.
б) Составьте дробь, числитель которой — разность переменных a и b, а знаменатель — их произведение.
в) Составьте дробь, числитель которой — сумма переменных c и d, а знаменатель — их разность.

10. При каких значениях переменной имеет смысл рациональное выражение:

а) $\frac{x}{x-2}$; б) $\frac{b+4}{b^2+7}$; в) $\frac{y^2-1}{y} + \frac{y}{y-3}$; г) $\frac{a+10}{a(a-1)} - 1$?

11. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а) $x^2 - 8x + 9$; в) $\frac{3x-6}{7}$; д) $\frac{x-5}{x^2+25} - 3x$;

б) $\frac{1}{6x-3}$; г) $\frac{x^2-8}{4x(x+1)}$; е) $\frac{x}{x+8} + \frac{x-8}{x}$.

12. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{5y-8}{11}$; в) $\frac{y^2+1}{y^2-2y}$; д) $\frac{y}{y-6} + \frac{15}{y+6}$;

б) $\frac{25}{y-9}$; г) $\frac{y-10}{y^2+3}$; е) $\frac{32}{y} - \frac{y+1}{y+7}$.

13. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{x-2}$; б) $y = \frac{2x+3}{x(x+1)}$; в) $y = x + \frac{1}{x+5}$.

14. При каком значении переменной значение дроби $\frac{x-3}{5}$ равно:
а) 1; б) 0; в) −1; г) 3?

15. При каких значениях переменной равно нулю значение дроби:

а) $\frac{y-5}{8}$; б) $\frac{2y+3}{10}$; в) $\frac{x(x-1)}{x+4}$; г) $\frac{x(x+3)}{2x+6}$?

16. Найдите значения переменной, при которых равно нулю значение дроби:

а) $\frac{m+4}{6}$; б) $\frac{7-5n}{11}$; в) $\frac{b^2-b}{b+2}$; г) $\frac{y^2-25}{3y-15}$.

17. Определите знак дроби $\frac{a}{b}$, если известно, что:
а) $a > 0$ и $b > 0$;
б) $a > 0$ и $b < 0$;
в) $a < 0$ и $b > 0$;
г) $a < 0$ и $b < 0$.

18. Докажите, что при любом значении переменной значение дроби:

а) $\frac{3}{x^2+1}$ положительно; в) $\frac{(a-1)^2}{a^2+10}$ неотрицательно;

б) $\frac{-5}{y^2+4}$ отрицательно; г) $\frac{(b-3)^2}{-b^2-1}$ неположительно.

19. При каком значении a принимает наибольшее значение дробь:

а) $\frac{4}{a^2+5}$; б) $\frac{10}{(a-3)^2+1}$?

20. При каком значении b принимает наименьшее значение дробь:

а) $\frac{b^2+7}{21}$; б) $\frac{(b-2)^2+16}{8}$?

21. Верно ли утверждение:

а) наибольшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 1;

б) наибольшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 2;

в) наименьшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 2?

22. Преобразуйте в многочлен:

а) $(2a+3)(2a-3)$; г) $(b+0{,}5)^2$;

б) $(y-5b)(y+5b)$; д) $(a-2x)^2$;

в) $(0{,}8x+y)(y-0{,}8x)$; е) $(ab-1)^2$.

23. Разложите на множители:

а) x^2-25; в) a^2-6a+9; д) a^3-8;

б) $16-c^2$; г) $x^2+8x+16$; е) b^3+27.

24. Анне Александровне в подарок необходимо купить пять одинаковых коробок конфет. В магазине «Сладость» одна коробка конфет стоит 350 р., но сейчас там проходит акция: три коробки по цене двух. В магазине «Джем» каждая коробка стоит 390 р., но при покупке больше четырёх коробок действует скидка 30% на всю покупку. В каком магазине покупка будет более выгодной? Сколько рублей при этом сможет сэкономить Анна Александровна?

2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

Мы знаем, что для обыкновенных дробей выполняется следующее свойство: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится. Иначе говоря, при любых натуральных значениях a, b и c верно равенство $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

Докажем, что это равенство верно не только при натуральных, но и при любых других значениях a, b и c, при которых знаменатели отличны от нуля, т. е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

Пусть $\frac{a}{b} = m$. Тогда по определению частного $a = bm$. Умножим обе части этого равенства на c:

$$ac = (bm)c.$$

На основании сочетательного и переместительного свойств умножения имеем

$$ac = (bc)m.$$

Так как $bc \neq 0$, то по определению частного

$$\frac{ac}{bc} = m.$$

Значит,

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Мы показали, что для любых числовых значений переменных a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, верно равенство

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.} \qquad (1)$$

Равенство (1) сохраняет силу и в том случае, когда под буквами a, b и c понимают многочлены, причём b и c — *ненулевые многочлены*, т. е. многочлены, не равные тождественно нулю.

Равенство (1) выражает *основное свойство рациональной дроби*:

> если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей дробь.

Например,

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x+2)(x+y)}{(x-3)(x+y)}.$$

Это равенство верно при всех допустимых значениях переменных.

Такие равенства будем называть *тождествами*. Ранее тождествами мы называли равенства, верные при всех значениях переменных. Теперь мы расширяем понятие тождества.

> **Определение.** Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Основное свойство рациональной дроби позволяет выполнять приведение дроби к новому знаменателю и сокращение дробей.

Приведём примеры.

Пример 1. Приведём дробь $\frac{2x}{7y}$ к знаменателю $35y^3$.

▶ Так как

$$35y^3 = 7y \cdot 5y^2,$$

то, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2x}{7y}$ на $5y^2$, получим

$$\frac{2x}{7y} = \frac{2x \cdot 5y^2}{7y \cdot 5y^2} = \frac{10xy^2}{35y^3}. \ \triangleleft$$

Множитель $5y^2$ называют дополнительным множителем к числителю и знаменателю дроби $\frac{2x}{7y}$.

Пример 2. Приведём дробь $\frac{5}{2y - x}$ к знаменателю $x - 2y$.

▶ Для этого числитель и знаменатель данной дроби умножим на -1:

$$\frac{5}{2y - x} = \frac{5 \cdot (-1)}{(2y - x) \cdot (-1)} = \frac{-5}{x - 2y}.$$

Дробь $\frac{-5}{x - 2y}$ можно заменить тождественно равным выражением $-\frac{5}{x - 2y}$, поставив знак «минус» перед дробью и изменив знак в числителе:

$$\frac{-5}{x - 2y} = -\frac{5}{x - 2y}. \ \triangleleft$$

Вообще

> если изменить знак числителя (или знак знаменателя) дроби и знак перед дробью, то получим выражение, тождественно равное данному.

Пример 3. Сократим дробь $\frac{a^2 - 9}{ab + 3b}$.

▶ Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{a^2 - 9}{ab + 3b} = \frac{(a + 3)(a - 3)}{b(a + 3)}.$$

Сократим полученную дробь на общий множитель $a + 3$:

$$\frac{(a + 3)(a - 3)}{b(a + 3)} = \frac{a - 3}{b}.$$

Итак,

$$\frac{a^2-9}{ab+3b}=\frac{a-3}{b}.$$

Это равенство верно при всех a и b, при которых обе его части имеют смысл. ◁

Пример 4. Сократим дробь $\frac{x-1}{x(1-x)}$.

▶ Вынесем в числителе множитель -1 за скобки:

$$\frac{-(1-x)}{x(1-x)}.$$

При этом говорят, что мы вынесли минус за скобки.
Сократим полученную дробь на общий множитель $1-x$:

$$\frac{-(1-x)}{x(1-x)}=\frac{-1}{x}=-\frac{1}{x}.$$

Таким образом, $\frac{x-1}{x(1-x)}=-\frac{1}{x}$ при всех значениях x, при которых обе его части имеют смысл. ◁

Пример 5. Построим график функции $y=\frac{x^2-16}{2x-8}$.

▶ Область определения функции $y=\frac{x^2-16}{2x-8}$ — множество всех чисел, кроме числа 4. Сократим дробь $\frac{x^2-16}{2x-8}$:

$$\frac{x^2-16}{2x-8}=\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-4)}=\frac{x+4}{2}.$$

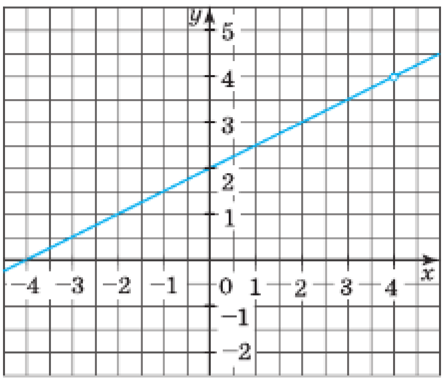


Рис. 1

Графиком функции $y=\frac{x+4}{2}$ является прямая, а графиком функции $y=\frac{x^2-16}{2x-8}$ — та же прямая, но с «выколотой» точкой (4; 4) (рис. 1). ◁

Упражнения

25. Укажите общий множитель числителя и знаменателя и сократите дробь:

а) $\frac{2x}{3x}$; б) $\frac{15x}{25y}$; в) $\frac{6a}{24a}$; г) $\frac{7ab}{21bc}$; д) $\frac{-2xy}{5x^2y}$; е) $\frac{8x^2y^2}{24xy}$.

26. Сократите дробь:

а) $\frac{10xz}{15yz}$; б) $\frac{6ab^2}{9bc^2}$; в) $\frac{2ay^3}{-4a^2b}$; г) $\frac{-6p^2q}{-2q^3}$; д) $\frac{24a^2c^2}{36ac}$; е) $\frac{63x^2y^3}{42x^6y^4}$.

27. Представьте частное в виде дроби и сократите её:

а) $4a^2b^3 : (2a^4b^2)$; г) $36m^2n : (18mn)$;
б) $3xy^2 : (6x^3y^3)$; д) $-32b^5c : (12b^4c^2)$;
в) $24p^4q^4 : (48p^2q^2)$; е) $-6ax : (-18ax)$.

28. Сократите дробь:

а) $\frac{4a^2}{6ac}$; б) $\frac{7x^2y}{21xy^2}$; в) $\frac{56m^2n^5}{35mn^5}$; г) $\frac{25p^4q}{100p^5q}$.

29. Найдите значение выражения:

а) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$; б) $\frac{81^{25}}{27^{33}}$.

30. Сократите дробь:

а) $\frac{a(b-2)}{5(b-2)}$; б) $\frac{3(x+4)}{c(x+4)}$; в) $\frac{ab(y+3)}{a^2b(y+3)}$; г) $\frac{15a(a-b)}{20b(a-b)}$.

31. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите её:

а) $\frac{3a+12b}{6ab}$; в) $\frac{2a-4}{3(a-2)}$; д) $\frac{a-3b}{a^2-3ab}$;

б) $\frac{15b-20c}{10b}$; г) $\frac{5x(y+2)}{6y+12}$; е) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$.

32. Сократите дробь:

а) $\frac{y^2-16}{3y+12}$; в) $\frac{(c+2)^2}{7c^2+14c}$; д) $\frac{a^2+10a+25}{a^2-25}$;

б) $\frac{5x-15y}{x^2-9y^2}$; г) $\frac{6cd-18c}{(d-3)^2}$; е) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$.

33. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$; б) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$; в) $\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}$; г) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

34. Найдите значение дроби:

а) $\frac{15a^2 - 10ab}{3ab - 2b^2}$ при $a = -2$, $b = -0{,}1$;

б) $\frac{9c^2 - 4d^2}{18c^2d - 12cd^2}$ при $c = \frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{6x^2 + 12xy}{5xy + 10y^2}$ при $x = \frac{2}{3}$, $y = -0{,}4$;

г) $\frac{x^2 + 6xy + 9y^2}{4x^2 + 12xy}$ при $x = -0{,}2$, $y = -0{,}6$.

35. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$;

б) $\frac{3y^2 + 24y}{y^2 + 16y + 64}$;

в) $\frac{a^2 + a + 1}{a^3 - 1}$;

г) $\frac{b + 2}{b^3 + 8}$.

36. Представьте частное в виде дроби и сократите её:

а) $(9x^2 - y^2) : (3x + y)$;

б) $(2ab - a) : (4b^2 - 4b + 1)$;

в) $(x^2 + 2x + 4) : (x^3 - 8)$;

г) $(1 + a^3) : (1 + a)$.

37. Сократите дробь:

а) $\frac{2x + bx - 2y - by}{7x - 7y}$;

б) $\frac{8a + 4b}{2ab + b^2 - 2ad - bd}$;

в) $\frac{xy - x + y - y^2}{x^2 - y^2}$;

г) $\frac{a^2 + 2ac + c^2}{a^2 + ac - ax - cx}$.

38. *(Для работы в парах.)* Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 25}{2x + 10}$;

б) $y = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 9}$.

1) Обсудите, что общего у дробей, задающих функцию в заданиях а) и б). Как надо учитывать эту особенность при построении графиков?

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание. Исправьте замеченные ошибки.

39. Из выражений $\frac{-x}{-y}$, $\frac{-x}{y}$, $\frac{x}{-y}$, $-\frac{-x}{y}$ выпишите те, которые:

а) тождественно равны дроби $\frac{x}{y}$;

б) противоположны дроби $\frac{x}{y}$.

40. Упростите выражение:

а) $\frac{a-b}{b-a}$; г) $\frac{a-b}{(b-a)^2}$; ж) $\frac{(-a-b)^2}{a+b}$;

б) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$; д) $\frac{-a-b}{a+b}$; з) $\frac{a-b-c}{b+c-a}$.

в) $\frac{(a-b)^2}{b-a}$; е) $\frac{(a+b)^2}{(-a-b)^2}$;

41. Какой из графиков, изображённых на рисунке 2, является графиком функции $y = \frac{(1-x)^2}{x-1}$?

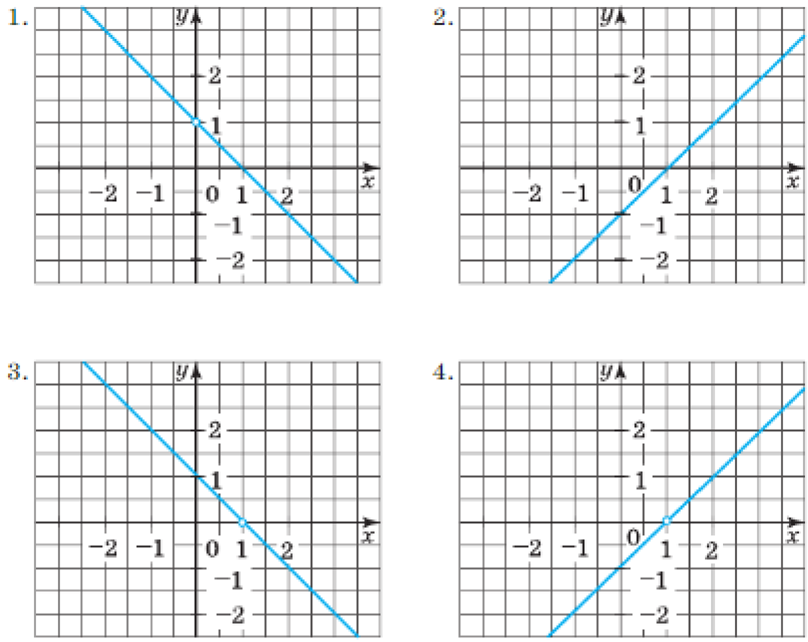


Рис. 2

42. Сократите дробь:

а) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$; г) $\frac{7b-14b^2}{42b^2-21b}$; ж) $\frac{8b^2-8a^2}{a^2-2ab+b^2}$;

б) $\frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}$; д) $\frac{25-a^2}{3a-15}$; з) $\frac{(b-2)^3}{(2-b)^2}$.

в) $\frac{3a-36}{12b-ab}$; е) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$;

43. Сократите дробь:

а) $\frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$; б) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$.

44. Упростите выражение:

а) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$; б) $\frac{y^6-y^8}{y^4-y^2}$; в) $\frac{b^7-b^{10}}{b^5-b^2}$; г) $\frac{c^6-c^4}{c^3-c^2}$.

45. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^8+a^5}{a^5+a^2}$ при $a=-\frac{1}{2}$; б) $\frac{b^{10}-b^8}{b^8-b^6}$ при $b=-0{,}1$.

46. Сократите дробь:

а) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b}$; б) $\frac{(3c+9d)^2}{c+3d}$; в) $\frac{(3x+6y)^2}{5x+10y}$; г) $\frac{4x^2-y^2}{(10x+5y)^2}$.

47. *(Задача-исследование.)* Верно ли, что при всех значениях a, отличных от -2 и 2, значение дроби $\frac{a^2-4}{12+a^2-a^4}$ является отрицательным числом?

1) Выберите произвольное значение a, отличное от -2 и 2, и сравните с нулём соответствующее значение дроби.
2) Обсудите, какое преобразование дроби поможет найти ответ на вопрос задачи.
3) Выполните это преобразование и сделайте вывод.

48. Докажите, что значение дроби не зависит от n, где n — натуральное число:

а) $\frac{3^{n+2}-3^n}{3^{n+2}+3^{n+1}+3^n}$; б) $\frac{16^{n+1}-2^{n+4}}{4\cdot 2^n(2^{3n}-1)}$.

49. Приведите к знаменателю $24a^3b^2$ следующие дроби:

$$\frac{5b}{8a^3},\quad \frac{7a}{3b^2},\quad \frac{1}{2ab},\quad \frac{2}{a^2b^2}.$$

50. Представьте выражение $2a + b$ в виде дроби со знаменателем, равным:

а) b; б) 5; в) $3a$; г) $2a - b$.

51. Приведите дробь:

а) $\frac{x}{a-b}$ к знаменателю $(a-b)^2$;

б) $\frac{y}{x-a}$ к знаменателю $x^2 - a^2$;

в) $\frac{a}{a-10}$ к знаменателю $10 - a$;

г) $\frac{p}{p-2}$ к знаменателю $4 - p^2$;

д) $\frac{mn}{n-m}$ к знаменателю $m^2 - n^2$.

П

52. Решите уравнение:

а) $-5x = 16$; в) $\frac{1}{3}x = 4$; д) $0,6x = 3$;

б) $2x = \frac{1}{5}$; г) $4x = -2$; е) $-0,7x = 5$.

53. Разложите на множители:

а) $5bc - 5c$; г) $5y - 5x + y^2 - xy$; ж) $y^2 - 2y + 1$;

б) $10n + 15n^2$; д) $a^2 - 9$; з) $a^3 + 64$;

в) $8ab + 12bc$; е) $x^2 + 10x + 25$; и) $b^3 - 1$.

54. Расположите выражения:

а) $\frac{5}{16} : 6$, $\frac{5}{16} \cdot 0,1$, $\frac{5}{16} \cdot (-7)$ в порядке возрастания их значений;

б) $0,8 \cdot (-0,4)$, $0,8 : (-0,4)$, $0,8 - (-0,4)$, $0,8 + (-0,4)$ в порядке убывания их значений.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры целых выражений; дробных выражений.
2. Какую дробь называют рациональной? Приведите пример.
3. Дайте определение тождества. Приведите пример.
4. Сформулируйте и докажите основное свойство дроби.
5. Сформулируйте правило об изменении знака перед дробью.

§ 2 СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ

3. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

При сложении обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями складывают их числители, а знаменатель оставляют прежним. Например:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}.$$

Таким же образом складывают любые рациональные дроби с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

где a, b и c — многочлены, причём c — ненулевой многочлен.

> Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Вычитание рациональных дробей выполняется аналогично сложению:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

> Чтобы выполнить вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{3a-7b}{15ab}$ и $\frac{2a+2b}{15ab}$.

$$\frac{3a-7b}{15ab} + \frac{2a+2b}{15ab} = \frac{3a-7b+2a+2b}{15ab} =$$

$$= \frac{5a-5b}{15ab} = \frac{5(a-b)}{15ab} = \frac{a-b}{3ab}.$$

Пример 2. Вычтем из дроби $\frac{a^2+9}{5a-15}$ дробь $\frac{6a}{5a-15}$.

▶ $\frac{a^2+9}{5a-15}-\frac{6a}{5a-15}=\frac{a^2+9-6a}{5a-15}=\frac{(a-3)^2}{5(a-3)}=\frac{a-3}{5}$. ◁

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2+2x}-\frac{2x-1}{x^2+2x}.$$

▶ Здесь удобно сложение и вычитание дробей выполнять не последовательно, а совместно:

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2+2x}-\frac{2x-1}{x^2+2x}=\frac{x^2-3+2-(2x-1)}{x^2+2x}=$$

$$=\frac{x^2-1-2x+1}{x^2+2x}=\frac{x^2-2x}{x^2+2x}=\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}. \triangleleft$$

Пример 4. Сложим дроби $\frac{3a}{2x-a}$ и $\frac{6x}{a-2x}$.

▶ Знаменатели дробей являются противоположными выражениями. Изменим знаки в знаменателе второй дроби и перед этой дробью. Получим

$$\frac{6x}{a-2x}=-\frac{6x}{2x-a}.$$

Теперь можно применить правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{3a}{2x-a}+\frac{6x}{a-2x}=\frac{3a}{2x-a}-\frac{6x}{2x-a}=\frac{3a-6x}{2x-a}=\frac{-3(2x-a)}{2x-a}=-3. \triangleleft$$

Упражнения

55. Выполните действие:

а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$; б) $\frac{5b^2}{a}-\frac{13b^2}{a}$; в) $\frac{x+y}{9}-\frac{x}{9}$; г) $\frac{2c-x}{b}+\frac{x}{b}$.

56. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{m}{2p}-\frac{m-p}{2p}$; в) $\frac{7y-13}{10y}-\frac{2y+3}{10y}$;

б) $\frac{a+b}{6}-\frac{a-2b}{6}$; г) $\frac{8c+25}{6c}+\frac{5-2c}{6c}$.

57. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{2x-3y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$;

б) $\frac{5a+b^5}{8b}-\frac{5a-7b^5}{8b}$;

в) $\frac{a-2}{8a}+\frac{2a+5}{8a}-\frac{3-a}{8a}$;

г) $\frac{11a-2b}{4a}+\frac{2a-3b}{4a}-\frac{a-b}{4a}$.

58. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{17-12x}{x}-\frac{10-x}{x}$;

б) $\frac{12p-1}{3p^2}-\frac{1-3p}{3p^2}$;

в) $\frac{6y-3}{5y}-\frac{y+2}{5y}$;

г) $\frac{3p-q}{5p}-\frac{2p+6q}{5p}+\frac{p-4q}{5p}$;

д) $\frac{5c-2d}{4c}-\frac{3d}{4c}+\frac{d-5c}{4c}$;

е) $\frac{2a}{b}-\frac{1-6a}{b}+\frac{13-8a}{b}$.

59. Выполните действие:

а) $\frac{16}{x-4}-\frac{x^2}{x-4}$;

б) $\frac{25}{a+5}-\frac{a^2}{a+5}$;

в) $\frac{3a-1}{a^2-b^2}-\frac{3b-1}{a^2-b^2}$;

г) $\frac{x-3}{x^2-64}+\frac{11}{x^2-64}$;

д) $\frac{2a+b}{(a-b)^2}-\frac{2b-5a}{(a-b)^2}$;

е) $\frac{13x+6y}{(x+y)^2}-\frac{11x+4y}{(x+y)^2}$.

60. Докажите, что:

а) выражение $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$ тождественно равно 4;

б) выражение $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ тождественно равно 2.

61. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^2-43}{a-6}+\frac{7}{a-6}$ при $a = 10{,}25$;

б) $\frac{9b-1}{b^2-9}-\frac{6b-10}{b^2-9}$ при $b = 3{,}5$.

62. Найдите значение выражения $\frac{a^2-12b}{a^2-3ab}-\frac{3ab-4a}{a^2-3ab}$ при $a = -0{,}8$, $b = -1{,}75$. Нет ли в задаче лишних данных?

63. Выполните действие:

а) $\frac{x}{y-1}+\frac{5}{1-y}$;

б) $\frac{a}{c-3}-\frac{6}{3-c}$;

в) $\frac{2m}{m-n}+\frac{2n}{n-m}$;

г) $\frac{5p}{2q-p}+\frac{10q}{p-2q}$;

д) $\frac{a^2+16}{a-4}+\frac{8a}{4-a}$;

е) $\frac{x^2+9y^2}{x-3y}+\frac{6xy}{3y-x}$.

64. Выполните действие:

а) $\frac{10p}{p-q}+\frac{3p}{q-p}$; в) $\frac{x-3}{x-1}-\frac{2}{1-x}$; д) $\frac{a}{a^2-9}+\frac{3}{9-a^2}$;

б) $\frac{5a}{a-b}+\frac{5b}{b-a}$; г) $\frac{a}{2a-b}+\frac{3a-b}{b-2a}$; е) $\frac{y^2}{y-1}+\frac{1}{1-y}$.

65. Докажите, что при всех допустимых значениях x значение выражения не зависит от x:

а) $\frac{3x+5}{2x-1}+\frac{7x+3}{1-2x}$; б) $\frac{5x+1}{5x-20}+\frac{x+17}{20-5x}$.

66. Выполните действие:

а) $\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}$; б) $\frac{x^2+25}{(x-5)^3}+\frac{10x}{(5-x)^3}$.

67. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{8(x-2)}{x^2-16}$; б) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2}+\frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$.

68. Пользуясь тождеством $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, представьте дробь в виде суммы дробей:

а) $\frac{a+b}{x}$; б) $\frac{2a^2+a}{y}$; в) $\frac{x^2+6y^2}{2xy}$; г) $\frac{12a+y^2}{6ay}$.

69. Представьте дробь в виде суммы или разности дробей:

а) $\frac{x^2+y^2}{x^4}$; б) $\frac{2x-y}{b}$; в) $\frac{a^2+1}{2a}$; г) $\frac{a^2-3ab}{a^3}$.

70. Представьте дробь $\frac{5n^2+3n+6}{n}$ в виде суммы двучлена и дроби. Выясните, при каких натуральных n данная дробь принимает натуральные значения.

71. При каких целых значениях m дробь $\frac{(m-1)(m+1)-10}{m}$ принимает целые значения?

П

72. Решите уравнение:

а) $3(5x-4)-8x=4x+9$;

б) $19x-8(x-3)=66-3x$;

в) $0,2(0,7x-5)+0,02=1,4(x-1,6)$;

г) $2,7(0,1x+3,2)+0,6(1,3-x)=16,02$.

73. Разложите на множители:

а) $8x^4 - 16x^3y$; г) $18b^2 - 98a^2$; ж) $ab + 8a + 9b + 72$;
б) $15xy^5 + 10y^2$; д) $x^3 - 125$; з) $6m - 12 - 2n + mn$.
в) $8a^2 - 50y^2$; е) $y^3 + 8$;

74. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{3a}{2a+25}$; б) $\frac{2y}{9+y^2}$; в) $\frac{5x}{3x(x+12)}$; г) $\frac{7a}{(a+1)(a-4)}$.

4. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию рациональных дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого данные дроби приводят к общему знаменателю.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{x}{4a^3b}$ и $\frac{5}{6ab^4}$.

▶ Знаменатели дробей представляют собой одночлены. Наиболее простым общим знаменателем является одночлен $12a^3b^4$. Коэффициент этого одночлена равен наименьшему общему кратному коэффициентов знаменателей дробей, а каждая переменная взята с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей. Разделив общий знаменатель $12a^3b^4$ на знаменатели $4a^3b$ и $6ab^4$, получим, что дополнительные множители к числителям и знаменателям этих дробей соответственно равны $3b^3$ и $2a^2$.
Имеем

$$\frac{x}{4a^3b} + \frac{5}{6ab^4} = \frac{x \cdot 3b^3 + 5 \cdot 2a^2}{12a^3b^4} = \frac{3b^3x + 10a^2}{12a^3b^4}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Преобразуем разность $\frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2}$.

▶ Чтобы найти общий знаменатель, разложим знаменатель каждой дроби на множители:

$$\frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2} = \frac{a+3}{a(a+b)} - \frac{b-3}{b(a+b)}.$$

Простейшим общим знаменателем служит выражение $ab(a + b)$. Дополнительные множители к числителям и знаменателям этих дробей соответственно равны b и a.

Имеем

$$\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}=\frac{a+3}{a(a+b)}-\frac{b-3}{b(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+3)b-(b-3)a}{ab(a+b)}=\frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)}=\frac{3(a+b)}{ab(a+b)}=\frac{3}{ab}. \ \triangleleft$$

Преобразование рационального выражения, которое является суммой или разностью целого выражения и дроби, сводится к преобразованию суммы или разности дробей.

Пример 3. Упростим выражение $a-1-\frac{a^2-3}{a+1}$.

▶ Представим выражение $a-1$ в виде дроби со знаменателем 1 и выполним вычитание дробей:

$$a-1-\frac{a^2-3}{a+1}=\frac{a-1}{1}-\frac{a^2-3}{a+1}=\frac{(a-1)(a+1)-(a^2-3)}{a+1}=$$

$$=\frac{a^2-1-a^2+3}{a+1}=\frac{2}{a+1}. \ \triangleleft$$

Пример 4. Докажем равенство $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$.

▶ Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{x+1}{x(x-1)}-\frac{x-1}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+1)-(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{4x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{4}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{x^2-1}.$$

Преобразуем также правую часть равенства:

$$\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x+2-2x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{x^2-1}.$$

В результате преобразований левой и правой частей равенства мы получили одно и то же выражение, следовательно, равенство верно. ◁

Упражнения

75. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$; в) $\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}$; д) $\frac{5x}{8y}+\frac{x}{4y}$; ж) $\frac{1}{5a}-\frac{8}{25a}$;

б) $\frac{c}{4}-\frac{d}{12}$; г) $\frac{3}{2x}-\frac{2}{3x}$; е) $\frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}$; з) $\frac{3b}{4c}+\frac{c}{2b}$.

76. Выполните действие:

а) $\frac{5y-3}{6y}+\frac{y+2}{4y}$; в) $\frac{b+2}{15b}-\frac{3c-5}{45c}$;

б) $\frac{3x+5}{35x}+\frac{x-3}{21x}$; г) $\frac{8b+y}{40b}-\frac{6y+b}{30y}$.

77. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{15a-b}{12a}-\frac{a-4b}{9a}$; б) $\frac{7x+4}{8y}-\frac{3x-1}{6y}$.

78. Выполните действие:

а) $\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}$; в) $\frac{1}{2a^7}+\frac{4-2a^3}{a^{10}}$; д) $\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}$;

б) $\frac{1-x}{x^3}+\frac{1}{x^2}$; г) $\frac{a+b}{a^2}+\frac{a-b}{ab}$; е) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{2y-x}{x^2y}$.

79. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{2xy-1}{4x^3}-\frac{3y-x}{6x^2}$; в) $\frac{1}{3a^3}-\frac{2}{5a^5}$;

б) $\frac{1-b^2}{3ab}+\frac{2b^3-1}{6ab^2}$; г) $\frac{b^2}{6x^5}-\frac{b}{3x^6}$.

80. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$; в) $\frac{b-a}{ab}+\frac{c-b}{bc}-\frac{c-a}{ac}$;

б) $\frac{ab-b}{a}-\frac{ab-a}{b}-\frac{a^2-b^2}{ab}$; г) $\frac{3ab+2b^2}{ab}-\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b}{b}$.

81. Выполните вычитание дробей:

а) $\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}$; в) $\frac{p-q}{p^3q^2}-\frac{p+q}{p^2q^3}$;

б) $\frac{a-2b}{3b}-\frac{b-2a}{3a}$; г) $\frac{3m-n}{3m^2n}-\frac{2n-m}{2mn^2}$.

82. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $x+\frac{1}{y}$; в) $3a-\frac{a}{4}$; д) $\frac{a^2+b}{a}-a$; ж) $\frac{(a-b)^2}{2a}+b$;

б) $\frac{1}{a}-a$; г) $5b-\frac{2}{b}$; е) $2p-\frac{4p^2+1}{2p}$; з) $c-\frac{(b+c)^2}{2b}$.

83. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $5-\frac{c}{2}$; в) $a+b-\frac{a-3}{3}$;

б) $5y^2-\frac{15y^2-1}{3}$; г) $\frac{2b^2-1}{b}-b+5$.

84. Представьте в виде дроби:

а) $1-\frac{a}{5}-\frac{b}{4}$; г) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

б) $12-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; д) $\frac{a+b}{4}-a+b$;

в) $\frac{a-2}{2}-1-\frac{a-3}{3}$; е) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a}$.

85. Представьте выражение в виде дроби:

а) $x-\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{4}$; в) $3-\frac{2x-y}{4}+\frac{x+4y}{12}$;

б) $\frac{3}{x}-2-\frac{5}{x}$; г) $\frac{6a-4b}{5}-\frac{b+7a}{3}-2$.

86. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{b-c}{b}+\frac{b}{b+c}$; в) $\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m+n}$; д) $\frac{a}{a+2}-\frac{a}{a-2}$;

б) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x}$; г) $\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1}$; е) $\frac{p}{3p-1}-\frac{p}{1+3p}$.

87. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{3x}{5(x+y)}-\frac{2y}{3(x+y)}$; в) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;

б) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$; г) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$.

88. Выполните действие:

а) $\frac{p}{2x+1}-\frac{p}{3x-2}$; в) $\frac{a}{5x-10}+\frac{a}{6x-12}$;

б) $\frac{6a}{x-2y}+\frac{2a}{x+y}$; г) $\frac{5b}{12a-36}-\frac{b}{48-16a}$.

89. Докажите, что при всех допустимых значениях y значение выражения не зависит от y:

а) $\frac{5y+3}{2y+2}-\frac{7y+4}{3y+3}$; б) $\frac{11y+13}{3y-3}+\frac{15y+17}{4-4y}$.

90. Выполните действие:

а) $\frac{a^2}{ax-x^2}+\frac{x}{x-a}$; б) $\frac{b^2-4by}{2y^2-by}-\frac{4y}{b-2y}$.

91. Выполните действие:

а) $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{ab+b^2}$; б) $\frac{1}{b^2-ab}-\frac{1}{ab-a^2}$.

92. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $1-\frac{a+b}{a-b}$; в) $m-n+\frac{n^2}{m+n}$; д) $x-\frac{9}{x-3}-3$;

б) $\frac{a^2+b^2}{a-b}-a$; г) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$; е) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

93. Выполните вычитание дробей:

а) $\frac{a^2+3a}{ab-5b+8a-40}-\frac{a}{b+8}$; б) $\frac{y}{3x-2}-\frac{3y}{6xy+9x-4y-6}$.

94. Выполните действие:

а) $\frac{c}{b-c}+\frac{b^2-3bc}{b^2-c^2}$; б) $\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}$.

95. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{b-6}{4-b^2}+\frac{2}{2b-b^2}$; в) $\frac{x-12a}{x^2-16a^2}-\frac{4a}{4ax-x^2}$;

б) $\frac{b}{ab-5a^2}-\frac{15b-25a}{b^2-25a^2}$; г) $\frac{a-30y}{a^2-100y^2}-\frac{10y}{10ay-a^2}$.

96. Выполните действие:

а) $\frac{a+4}{a^2-2a}-\frac{a}{a^2-4}$; в) $\frac{(a+b)^2}{a^2+ab}+\frac{(a-b)^2}{a^2-ab}$;

б) $\frac{4-x^2}{16-x^2}-\frac{x+1}{x+4}$; г) $\frac{x^2-4}{5x-10}-\frac{x^2+4x+4}{5x+10}$.

97. Упростите выражение и найдите его значение при $x=-1{,}5$:

а) $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x+2}{x^2-1}$; б) $\frac{x+2}{x^2+3x}-\frac{1+x}{x^2-9}$.

98. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y-2}+\frac{12}{y^2-4}$;

б) $\frac{a}{a-6}-\frac{3}{a+6}+\frac{a^2}{36-a^2}$;

в) $\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{x+y}{2x-2y}$;

г) $\frac{b}{(a-b)^2}-\frac{a+b}{b^2-ab}$.

99. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{2a+b}{2a^2-ab}-\frac{16a}{4a^2-b^2}-\frac{2a-b}{2a^2+ab}$;

б) $\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{2}{a^2-9}+\frac{1}{(a+3)^2}$;

в) $\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{x^3-8}+\frac{1}{x-2}$;

г) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}-\frac{3}{a-1}$.

100. Выполните действие:

а) $\frac{1}{a-4b}-\frac{1}{a+4b}-\frac{2a}{16b^2-a^2}$;

б) $\frac{1}{2b-2a}+\frac{1}{2b+2a}+\frac{a^2}{a^2b-b^3}$.

101. Докажите, что тождественно равны выражения:

а) $\frac{3}{a^2-3a}+\frac{a^2}{a-3}$ и $a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a}$;

б) $\frac{a^3}{a^2-4}-\frac{a}{a-2}-\frac{2}{a+2}$ и $a-1$.

102. *(Для работы в парах.)* Докажите, что при любых допустимых значениях переменной значение выражения:

а) $\frac{x^3+3x}{x+2}-\frac{3x^2-14x+16}{x^2-4}+2x$ является положительным числом;

б) $y+\frac{2y^2+3y+1}{y^2-1}-\frac{y^3+2y}{y-1}$ является отрицательным числом.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены преобразования.
3) Обсудите, для чего в условии указано, что рассматриваются допустимые значения переменных. Укажите допустимые значения переменной в заданиях а) и б).

103. Учащимся была поставлена задача: «Представить дробь $\frac{x^2+7x-25}{x-5}$ в виде суммы целого выражения и дроби». Были получены ответы:

1. $x+5+\frac{7x}{x-5}$ 2. $x+12+\frac{35}{x-5}$ 3. $-x+\frac{2x-25}{x-5}$ 4. $x+\frac{12x-25}{x-5}$

Укажите неверный ответ.

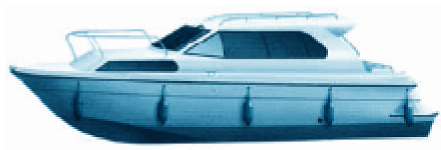
104. Докажите тождество

$$\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}=\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}.$$

Используя это тождество, упростите выражение

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}.$$

105. Две речные пристани A и B расположены на расстоянии s км друг от друга. Между ними курсирует катер, скорость которого в стоячей воде равна v км/ч. Сколько времени t ч потребуется катеру на путь от A до B и обратно, если скорость течения реки равна 5 км/ч? Найдите t при:



а) $s = 50$, $v = 25$;
б) $s = 105$, $v = 40$.

106. Туристы прошли s км по шоссе со скоростью v км/ч и вдвое больший путь по просёлочной дороге. Сколько времени t ч затратили туристы, если известно, что по просёлочной дороге они шли со скоростью, на 2 км/ч меньшей, чем по шоссе? Найдите t при $s = 10$, $v = 6$.

П

107. Функция задана формулой $y=\frac{2x-5}{3}$. Найдите значение функции при x, равном -2; 0; 16. При каком x значение функции равно 3; 0; -9?

108. Постройте графики функций $y = -4x + 1$ и $y = 2x - 3$ и найдите координаты точки их пересечения. Ту же задачу решите без построения графиков. Сравните полученные ответы.

109. В одну силосную яму заложили 90 т силоса, а в другую — 75 т. Когда из первой ямы взяли силоса в 3 раза больше, чем из второй, в первой яме силоса осталось в 2 раза меньше, чем во второй. Сколько тонн силоса взяли из первой ямы?

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

2 Сформулируйте правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

3 Как выполняют сложение и вычитание дробей с разными знаменателями? Поясните свой ответ на примерах:

а) $\frac{a+2}{a^2-ab}+\frac{b-2}{b^2-ab}$; б) $\frac{8}{a^2-16}-\frac{4}{a^2-4a}$.

§ 3 ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ

5. Умножение дробей. Возведение дроби в степень

При умножении обыкновенных дробей перемножают отдельно их числители и их знаменатели и первое произведение записывают в числителе, а второе — в знаменателе дроби. Например:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15}.$$

Таким же образом перемножают любые рациональные дроби:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

где a, b, c и d — некоторые многочлены, причём b и d — ненулевые многочлены.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и перемножить их знаменатели и первое произведение записать в числителе, а второе — в знаменателе дроби.

Полученное выражение затем упрощают при возможности.

Пример 1. Умножим дробь $\frac{a^3}{4b^2}$ на дробь $\frac{6b}{a^2}$.

▶ Воспользуемся правилом умножения дробей:

$$\frac{a^3}{4b^2}\cdot\frac{6b}{a^2}=\frac{a^3\cdot6b}{4b^2\cdot a^2}=\frac{3a}{2b}.$$ ◁

Пример 2. Умножим дробь $\frac{pm+2p}{m}$ на дробь $\frac{pm^2}{m^2-4}$.

▶ Имеем $\frac{pm+2p}{m} \cdot \frac{pm^2}{m^2-4} = \frac{p(m+2) \cdot pm^2}{m \cdot (m-2)(m+2)} = \frac{p^2 m}{m-2}$. ◁

Пример 3. Представим произведение $\frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x}$ в виде рациональной дроби.

▶ Имеем $\frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot x} = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$. ◁

Пример 4. Умножим дробь $\frac{x+a}{x-a}$ на многочлен $x^2 - a^2$.

▶ При умножении дроби на многочлен этот многочлен записывают в виде дроби со знаменателем 1 и затем применяют правило умножения дробей:

$$\frac{x+a}{x-a} \cdot (x^2 - a^2) = \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x^2-a^2}{1} =$$

$$= \frac{(x+a)(x-a)(x+a)}{x-a} = (x+a)^2. \quad ◁$$

Правило умножения дробей распространяется на произведение трёх и более рациональных дробей.

Например:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{m}{n} = \frac{acm}{bdn}.$$

Выясним теперь, как выполняется возведение рациональной дроби в степень.

Рассмотрим выражение $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, являющееся n-й степенью рациональной дроби $\frac{a}{b}$, и докажем, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

● По определению степени имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}}.$$

Применяя правило умножения рациональных дробей и определение степени, получим

$$\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ раз}}=\frac{\overbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{bb\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ раз}}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Следовательно, $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.}$ ○

> Чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

Пример 5. Возведём дробь $\frac{2a^2}{b^4}$ в третью степень.

▶ Воспользуемся правилом возведения в степень:

$$\left(\frac{2a^2}{b^4}\right)^3=\frac{(2a^2)^3}{(b^4)^3}=\frac{8a^6}{b^{12}}. \quad \triangleleft$$

Упражнения

110. Выполните умножение:

а) $\frac{5}{3a}\cdot\frac{2b}{3}$; б) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$; в) $\frac{b^2}{10}\cdot\frac{5}{b}$; г) $\frac{18}{c^4}\cdot\frac{c^3}{24}$.

111. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{3x}{4y}\cdot\frac{10}{3x^2}$; б) $\frac{2{,}5}{2a^2}\cdot\frac{4a^3}{5b^2}$; в) $\frac{7a^3}{24b}\cdot 8b^2$; г) $14ab\cdot\frac{1}{21b^3}$.

112. Выполните умножение:

а) $\frac{12}{5x}\cdot\frac{x^3}{12a}$; б) $\frac{8c^2}{15m}\cdot\frac{1}{4c^2}$; в) $\frac{11a^4}{6}\cdot\frac{12b}{a^5}$; г) $\frac{4n^2}{3m^2}\cdot\frac{9m}{2}$.

113. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $15x^2\cdot\frac{7}{6x^3}$; б) $\frac{25}{16y^2}\cdot 2y^2$; в) $6am^2\cdot\frac{4a}{3m^3}$; г) $\frac{2b}{5a^3}\cdot 10a^2$.

114. Упростите выражение:

а) $\frac{48x^5}{49y^4}\cdot\frac{7y^2}{16x^3}$; в) $\frac{72x^4}{25y^5}\cdot\left(-\frac{2{,}5y^4}{27x^5}\right)$;

б) $\frac{18m^3}{11n^3}\cdot\frac{22n^4}{9m^2}$; г) $-\frac{35ax^2}{12b^2y}\cdot\frac{8ab}{21xy}$.

115. Выполните умножение:

а) $-\dfrac{10x^2y^2}{9a^2} \cdot \dfrac{27a^3}{5xy}$; в) $\dfrac{13x}{12mn^2} \cdot 4m^2n$;

б) $\dfrac{2m^3}{35a^3b^2} \cdot \left(-\dfrac{7a^2b}{6m}\right)$; г) $-ab \cdot \left(-\dfrac{11x^2}{3a^2b^2}\right)$.

116. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2a^2b}{3xy} \cdot \dfrac{3x^2y}{4ab^2} \cdot \dfrac{6ax}{15b^2}$; б) $\dfrac{6m^3n^2}{35p^3} \cdot \dfrac{49n^4}{m^5p^3} \cdot \dfrac{5m^4p^2}{42n^6}$.

117. Возведите в степень:

а) $\left(\dfrac{x}{2y}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{3a}{c}\right)^4$; в) $\left(\dfrac{n^2}{10m}\right)^3$; г) $\left(\dfrac{9a^3}{2b^2}\right)^2$.

118. Возведите в степень:

а) $\left(\dfrac{2a}{p^2q^3}\right)^4$; б) $\left(\dfrac{3a^2b^3}{s^4}\right)^2$; в) $\left(-\dfrac{2a^2b}{3mn^3}\right)^2$; г) $\left(-\dfrac{3x^2}{2y^3}\right)^3$.

119. Представьте в виде дроби:

а) $\left(\dfrac{5a^3}{3b^2}\right)^4$; б) $\left(\dfrac{2x^2}{3y^3}\right)^5$; в) $\left(-\dfrac{10m^2}{n^2p}\right)^3$; г) $\left(-\dfrac{b^3c^2}{8a^3}\right)^2$.

120. Зная, что $a - \dfrac{5}{a} = 2$, найдите значение выражения $a^2 + \dfrac{25}{a^2}$.

121. Выполните умножение:

а) $\dfrac{x^2 - xy}{y} \cdot \dfrac{y^2}{x}$; г) $\dfrac{4ab}{cx + dx} \cdot \dfrac{ax + bx}{2ab}$;

б) $\dfrac{3a}{b^2} \cdot \dfrac{ab + b^2}{9}$; д) $\dfrac{ma - mb}{3n^2} \cdot \dfrac{2m}{nb - na}$;

в) $\dfrac{m - n}{mn} \cdot \dfrac{2mn}{mn - m^2}$; е) $\dfrac{ax - ay}{5x^2y^2} \cdot \left(-\dfrac{5xy}{by - bx}\right)$.

122. Выполните умножение:

а) $(3a - 15b) \cdot \dfrac{8}{a^2 - 25b^2}$; в) $\dfrac{y}{3y^2 - 12} \cdot (y^2 - 4y + 4)$;

б) $(x^2 - 4) \cdot \dfrac{2x}{(x + 2)^2}$; г) $\dfrac{2ab}{a^2 - 6ab + 9b^2} \cdot (a^2 - 9b^2)$.

123. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{xy}{a^2 + a^3} \cdot \dfrac{a + a^2}{x^2y^2}$; б) $\dfrac{6a}{x^2 - x} \cdot \dfrac{2x - 2}{3ax}$.

124. Упростите выражение:

а) $\frac{y^2-16}{10xy}\cdot\frac{5y}{3y+12}$; б) $\frac{b-a}{a}\cdot\frac{3ab}{a^2-b^2}$.

125. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}$; в) $\frac{(x+3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x+9}$;

б) $\frac{b^2+2bc}{b+3}\cdot\frac{5b+15}{b^2-4c^2}$; г) $\frac{(5-y)^2}{2y+12}\cdot\frac{y^2-36}{2y-10}$.

126. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5mn-m}{4m+n}\cdot\frac{16m^2-n^2}{5n-1}$, если $m=\frac{1}{4}$, $n=-3$;

б) $\frac{(x+2)^2}{3x+9}\cdot\frac{2x+6}{x^2-4}$, если $x=0{,}5;\ -1{,}5$.

127. Выполните умножение:

а) $\frac{a^2-b^2}{a^2-3a}\cdot\frac{2a-6}{b^2+2ab+a^2}$; б) $\frac{bx+3b}{x^2-25}\cdot\frac{25-10x+x^2}{ax+3a}$.

128. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{mx^2-my^2}{2m+8}\cdot\frac{3m+12}{my+mx}$; в) $\frac{x^3-y^3}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$;

б) $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^2-xy}{7x+7y}$; г) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\frac{a^2-a+1}{a^2+2a+1}$.

129. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-10x+25}{3x+12}\cdot\frac{x^2-16}{2x-10}$; в) $\frac{y^2-25}{y^2+12y+36}\cdot\frac{3y+18}{2y+10}$;

б) $\frac{1-a^2}{4a+8b}\cdot\frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$; г) $\frac{b^3+8}{18b^2+27b}\cdot\frac{2b+3}{b^2-2b+4}$.

130. Докажите, что если дробь $\frac{a}{b}$ является квадратом дроби, то и произведение ab можно представить в виде квадрата некоторого выражения.

П

131. Упростите выражение

$$\frac{a^2-4ac+3bc}{a^2-ab+bc-ac}+\frac{a+3b}{b-a}+\frac{a+2c}{a-c}.$$

132. Первые 30 км велосипедист ехал со скоростью v км/ч, а остальные 17 км — со скоростью, на 2 км/ч большей. Сколько времени t ч затратил велосипедист на весь путь? Найдите t, если: а) $v = 15$; б) $v = 18$.

133. Выразите x через a и b:

а) $3x + b = a$; б) $b - 7x = a - b$; в) $\frac{x}{a} + 1 = b$; г) $b - \frac{x}{10} = a$.

6. Деление дробей

При делении обыкновенных дробей первую дробь умножают на дробь, обратную второй. Например:

$$\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}.$$

Так же поступают при делении любых рациональных дробей:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},}$$

где a, b, c и d — некоторые многочлены, причём b, c и d — ненулевые многочлены.

Это равенство выражает *правило деления рациональных дробей*:

чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример 1. Разделим дробь $\frac{7a^2}{b^3}$ на дробь $\frac{14a}{b}$.

▶ Воспользуемся правилом деления дробей:

$$\frac{7a^2}{b^3} : \frac{14a}{b} = \frac{7a^2}{b^3} \cdot \frac{b}{14a} = \frac{a}{2b^2}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Разделим дробь $\frac{x-2}{x}$ на дробь $\frac{x+1}{x+2}$.

▶ Имеем $\frac{x-2}{x} : \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x+2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)} = \frac{x^2-4}{x^2+x}$. $\triangleleft$

Пример 3. Разделим дробь $\dfrac{a^2-9}{3y}$ на многочлен $a + 3$.

▶ При делении дроби на многочлен этот многочлен записывают в виде дроби, затем применяют правило деления дробей:

$$\frac{a^2-9}{3y}:(a+3)=\frac{a^2-9}{3y}:\frac{a+3}{1}=\frac{a^2-9}{3y}\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{a-3}{3y}.\ \triangleleft$$

Упражнения

134. Выполните деление:

а) $\dfrac{5m}{6n}:\dfrac{15m^2}{8}$; в) $\dfrac{a^2}{12b}:\dfrac{ab}{36}$; д) $\dfrac{11x}{4y^2}:(22x^2)$; ж) $\dfrac{18c^4}{7d}:(9c^2d)$;

б) $\dfrac{14}{9x^3}:\dfrac{7x}{2y^2}$; г) $\dfrac{3x}{10a^3}:\dfrac{1}{5a^2}$; е) $27a^3:\dfrac{18a^4}{7b^2}$; з) $35x^5y:\dfrac{7x^3}{34}$.

135. Упростите выражение:

а) $\dfrac{6x^2}{5y}:\dfrac{3x}{10y^3}$; в) $\dfrac{3ab}{4xy}:\left(-\dfrac{21a^2b}{10x^2y}\right)$;

б) $\dfrac{8c}{21d^2}:\dfrac{6c^2}{7d}$; г) $-\dfrac{18a^2b^2}{5cd}:\left(-\dfrac{9ab^3}{5c^2d^4}\right)$.

136. Выполните деление:

а) $\dfrac{6x^2}{m^3n}:\dfrac{x}{3mn^2}$; в) $\dfrac{8mx^2}{3y^3}:(4m^2x)$;

б) $\dfrac{35x^2y}{12ab}:\dfrac{7xy}{8ab^2}$; г) $15a^2bx:\dfrac{a^3b^2}{30x^2}$.

137. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{3x^2}{5y^3}:\dfrac{9x^3}{2y^2}\cdot\dfrac{5y}{3x}$; б) $\dfrac{7p^4}{10q^3}\cdot\dfrac{5q}{14p^2}:\dfrac{3p}{4q^4}$.

138. Упростите выражение:

а) $\dfrac{11m^4}{6n^2}\cdot\dfrac{5m}{6n^3}:\dfrac{11n^3}{12m^3}$; б) $\dfrac{8x^3}{7y^3}:\dfrac{4x^4}{49y^2}:\dfrac{7x}{y^2}$.

139. Представьте выражение в виде дроби и сократите её:

а) $(x + 3y) : (x^2 - 9y^2)$;
б) $(a^2 - 6ab + 9b^2) : (a^2 - 9b^2)$;
в) $(x^2 - 49y^2) : (49y^2 + 14xy + x^2)$;
г) $(m - 4n)^2 : (32n^2 - 2m^2)$.

140. Выполните деление:

а) $\dfrac{m^2-3m}{8x^2}:\dfrac{3m}{8x}$; д) $\dfrac{a^2-3ab}{3b}:(7a-21b)$;

б) $\dfrac{5a^2}{6b^3}:\dfrac{a^3}{ab-b^2}$; е) $(x^2-4y^2):\dfrac{5x-10y}{x}$;

в) $\dfrac{x^2+x^3}{11a^2}:\dfrac{4+4x}{a^3}$; ж) $(2a-b)^2:\dfrac{4a^3-ab^2}{3}$;

г) $\dfrac{6ax}{m^2-2m}:\dfrac{8ax}{3m-6}$; з) $(10m-15n):\dfrac{(2m-3n)^2}{2m}$.

141. Выполните действие:

а) $\dfrac{x^2-xy}{9y^2}:\dfrac{2x}{3y}$; в) $(m^2-16n^2):\dfrac{3m+12n}{mn}$;

б) $\dfrac{2a^3-a^2b}{36b^2}:\dfrac{2a-b}{9b^3}$; г) $\dfrac{9p^2-1}{pq-2q}:\dfrac{1-3p}{3p-6}$.

142. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4x^2-4x}{x+3}:(2x-2)$, если $x=2{,}5;\ -1$;

б) $(3a+6b):\dfrac{2a^2-8b^2}{a+b}$, если $a=26$, $b=-12$.

143. Выполните деление:

а) $\dfrac{3x+6y}{x^2-y^2}:\dfrac{5x+10y}{x^2-2xy+y^2}$; б) $\dfrac{a^2+4a+4}{16-b^4}:\dfrac{4-a^2}{4+b^2}$.

144. Выполните действие:

а) $\dfrac{a^2+ax+x^2}{x-1}:\dfrac{a^3-x^3}{x^2-1}$; б) $\dfrac{ap^2-9a}{p^3-8}:\dfrac{p+3}{2p-4}$.

145. Из формулы $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ выразите:

а) переменную c через a и b; б) переменную b через a и c.

146. Выполните действия:

а) $\dfrac{2b}{2b+3}-\dfrac{5}{3-2b}-\dfrac{4b^2+9}{4b^2-9}$;

б) $\dfrac{c+6b}{ac+2bc-6ab-3a^2}+\dfrac{2b}{a^2+2ab}-\dfrac{b}{ac-3a^2}$.

147. От пристани против течения реки отправилась моторная лодка, собственная скорость которой 10 км/ч. Через 45 мин после выхода лодки у неё испортился мотор, и её течением через 3 ч принесло обратно к пристани. Какова скорость течения реки?

148. Из формулы $y = \frac{ab}{2c}$ выразите:

а) переменную c через a, b и y;
б) переменную a через b, c и y.

149. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx$, если $k > 0$? если $k < 0$?

7. Преобразование рациональных выражений

Рациональное выражение

$$\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{2y}{x-y}\right):(x^2 - 3y^2)$$

представляет собой частное от деления суммы рациональных дробей на многочлен. Деление на $x^2 - 3y^2$ можно заменить умножением на дробь $\frac{1}{x^2 - 3y^2}$. Поэтому преобразование данного выражения сводится к сложению дробей $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{2y}{x-y}$ и умножению результата на дробь $\frac{1}{x^2-3y^2}$. Вообще преобразование любого рационального выражения можно свести к сложению, вычитанию, умножению или делению рациональных дробей.

Из правил действий с дробями следует, что сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей всегда можно представить в виде рациональной дроби. Значит, и всякое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

Пример 1. Преобразуем в рациональную дробь выражение

$$x + 1 - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}.$$

▶ Сначала выполним умножение дробей, затем полученный результат вычтем из многочлена $x + 1$:

1) $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x} = \frac{x-2}{x}$;

2) $x+1-\frac{x-2}{x}=\frac{x(x+1)-(x-2)}{x}=\frac{x^2+x-x+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$. ◁

Запись можно вести иначе:

$$x+1-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}=x+1-\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x}=x+1-\frac{x-2}{x}=$$

$$=\frac{x^2+x-x+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}.$$

Пример 2. Представим выражение

$$\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}+1$$

в виде рациональной дроби.

▶ Сначала сложим дроби, заключённые в скобки, затем найденный результат умножим на дробь $\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}$ и, наконец, к полученному произведению прибавим 1:

1) $\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}=\frac{b}{a(a-b)}+\frac{a}{b(a-b)}=\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}$;

2) $\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)\cdot ab(a+b)}{ab(a-b)\cdot(a^2+b^2)}=\frac{a+b}{a-b}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}+1=\frac{a+b+a-b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}$. ◁

Пример 3. Представим выражение $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$ в виде рациональной дроби.

▶ Преобразование можно вести по-разному. Можно представить в виде рациональных дробей отдельно числитель и знаменатель, а затем разделить первый результат на второй. А можно умножить числитель и знаменатель на xy, воспользовавшись основным свойством дроби:

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}=\frac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)xy}=\frac{\frac{x}{y}\cdot xy-\frac{y}{x}\cdot xy}{\frac{x}{y}\cdot xy+\frac{y}{x}\cdot xy-2xy}=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}.$$ ◁

Пример 4. Пешеход отправился из посёлка A на станцию B со скоростью v_1 км/ч. Придя на станцию, он обнаружил, что оставил дома необходимые документы, и возвратился обратно в посёлок со скоростью v_2 км/ч. Взяв документы, он снова пошёл на станцию со скоростью v_3 км/ч. Выясните, какой была средняя скорость пешехода на всём пройденном им пути.

▶ Пусть расстояние AB равно s км. Тогда на путь от A до B пешеход затратил сначала $\frac{s}{v_1}$ ч, на путь от B до A — $\frac{s}{v_2}$ ч, а на повторное прохождение пути от A до B — $\frac{s}{v_3}$ ч. На весь путь пешеход затратил $\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3}$ ч. За это время он прошёл $3s$ км. Теперь можно найти среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ пешехода на всём пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{3s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3}}.$$

Сократив данную дробь на s, найдём, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}. \quad \triangleleft$$

Мы получили формулу для вычисления средней скорости движения при условии, что известны скорости v_1, v_2, v_3 на каждом из трёх участков одинаковой длины. Из полученного равенства видно, что средняя скорость движения пешехода не равна среднему арифметическому скоростей v_1, v_2 и v_3. Она вычисляется по более сложной формуле, которую называют формулой *среднего гармонического* трёх чисел.

Средняя скорость движения на двух участках пути одинаковой длины вычисляется по формуле среднего гармонического двух чисел:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}},$$

где v_1 и v_2 — скорости на этих участках.

Средняя скорость движения на четырёх участках пути одинаковой длины вычисляется по формуле среднего гармонического четырёх чисел:

$$v_{\text{ср}} = \frac{4}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}},$$

где v_1, v_2, v_3, v_4 — скорости на этих участках.

Вообще если мы имеем некоторый ряд положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, то среднее гармоническое этого ряда вычисляется по формуле

$$a_{ср} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Эту формулу иногда записывают в другом виде:

$$\frac{1}{a_{ср}} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Из этой записи видно, что величина, обратная среднему гармоническому нескольких положительных чисел, равна среднему арифметическому чисел, им обратных.

Упражнения

150. Выполните действия:

а) $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$;

б) $\left(\frac{a}{m^2} + \frac{a^2}{m^3}\right) : \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m}{a}\right)$;

в) $\frac{ab + b^2}{3} : \frac{b^3}{3a} + \frac{a + b}{b}$;

г) $\frac{x - y}{x} - \frac{5y}{x^2} \cdot \frac{x^2 - xy}{5y}$.

151. Выполните действия:

а) $\left(\frac{x}{x + 1} + 1\right) \cdot \frac{1 + x}{2x - 1}$;

б) $\left(\frac{5y^2}{1 - y^2}\right) : \left(1 - \frac{1}{1 - y}\right)$;

в) $\left(\frac{4a}{2 - a} - a\right) : \frac{a + 2}{a - 2}$;

г) $\frac{x - 2}{x - 3} \cdot \left(x + \frac{x}{2 - x}\right)$.

152. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2m + 1}{2m - 1} - \frac{2m - 1}{2m + 1}\right) : \frac{4m}{10m - 5}$;

б) $\frac{x + 3}{x^2 + 9} \cdot \left(\frac{x + 3}{x - 3} + \frac{x - 3}{x + 3}\right)$.

153. Выполните действия:

а) $\frac{a^2 - 9}{2a^2 + 1} \cdot \left(\frac{6a + 1}{a - 3} + \frac{6a - 1}{a + 3}\right)$;

б) $\left(\frac{5x + y}{x - 5y} + \frac{5x - y}{x + 5y}\right) : \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 25y^2}$.

154. Выполните действия:

а) $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{1}{a^2+5a}-\frac{a+5}{a^2-3a}$;

б) $\frac{1-2x}{2x+1}+\frac{x^2+3x}{4x^2-1}:\frac{3+x}{4x+2}$;

в) $\frac{b-c}{a+b}-\frac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$;

г) $\frac{a^2-4}{x^2-9}:\frac{a^2-2a}{xy+3y}+\frac{2-y}{x-3}$.

155. Упростите выражение:

а) $(a^2+2a+1)\cdot\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}\right)$;

б) $\left(1-\frac{9x^2+4}{12x}\right):\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{2}\right)+1$;

в) $1-\left(\frac{2}{a-2}-\frac{2}{a+2}\right)\cdot\left(a-\frac{3a+2}{4}\right)$;

г) $(y^2-4)\left(\frac{3}{y+2}-\frac{2}{y-2}\right)+5$.

156. Выполните действия:

а) $\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$;

б) $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}\right)$;

в) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)$;

г) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

157. Упростите выражение:

а) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

б) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}$.

158. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\frac{3x-3}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}$;

б) $\frac{a-2}{4a^2+16a+16}:\left(\frac{a}{2a-4}-\frac{a^2+4}{2a^2-8}-\frac{2}{a^2+2a}\right)$.

159. При каком значении a выражение

$$(0{,}5(a-1)^2-18)\left(\frac{a+5}{a-7}+\frac{a-7}{a+5}\right)$$

принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

160. При каком значении b выражение $\frac{81}{(0{,}5b+9)^2+(0{,}5b-9)^2}$ принимает наибольшее значение? Найдите это значение.

161. Докажите тождество:

а) $\frac{2p-q}{pq}-\frac{1}{p+q}\cdot\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{q}$;

б) $\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}=\frac{b}{a-b}-\frac{b^2-ab}{a^2-b^2}$.

162. Докажите тождество:

а) $\frac{1{,}2x^2-xy}{0{,}36x^2-0{,}25y^2}=\frac{20x}{6x+5y}$; б) $\frac{4{,}5a+4x}{0{,}81a^2-0{,}64x^2}=\frac{50}{9a-8x}$.

163. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений входящих в него переменных:

а) $\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{b-a}$;

б) $\frac{y}{x-y}-\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)$.

164. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)$ является натуральным числом.

165. Представьте в виде многочлена или рациональной дроби:

а) $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2$; в) $\left(\frac{x}{y}+1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2$;

б) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$; г) $\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)^2-\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)^2$.

166. Упростите выражение:

а) $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$; б) $\frac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}$; в) $\frac{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}$; г) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

167. Представьте в виде отношения многочленов дробь:

а) $\dfrac{2-\dfrac{a}{x}}{2+\dfrac{a}{x}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a-b}{c}+3}{\dfrac{a+b}{c}-1}$; в) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$; г) $\dfrac{x-y}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}$.

168. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{x-a}{x-b}$, если $x=\dfrac{ab}{a+b}$; б) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-x}{\dfrac{b}{a}+x}$, если $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

169. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{a+b}{a-b}$, если $a=\dfrac{1}{1-x}$, $b=\dfrac{1}{1+x}$;

б) $\dfrac{ax}{a+x}-\dfrac{bx}{b-x}$, если $x=\dfrac{ab}{a-b}$.

170. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b^2}{9}}{\dfrac{a}{12}+\dfrac{b}{18}}$ при $a=\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{0{,}2a-b}{\dfrac{a^2}{25}-b^2}$ при $a=-8$, $b=0{,}6$.

171. *(Для работы в парах.)* При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{x-2}}$; б) $\dfrac{6x}{2+\dfrac{1}{x+8}}$?

1) Обсудите, о каких значениях переменной x в заданиях а) и б) можно сказать сразу, что они не являются допустимыми. Что надо сделать, чтобы найти другие значения x, которые не являются допустимыми?

2) [illegible]

3) [illegible]

172. Найдите среднее гармоническое чисел:

а) 3, 5; б) 2, 4, 8; в) 5, 10, 15, [illegible]

173. Из пункта A в пункт B автобус ехал со скоростью 90 км/ч. На обратном пути из-за непогоды он снизил скорость до 60 км/ч. Какова средняя скорость автобуса на всём пути следования?

174. Мастер может выполнить заказ на изготовление деталей за 4 ч, а его ученик — за 6 ч. За какое время они смогут выполнить два заказа, работая совместно?

175. Готовясь к соревнованиям, школьник трижды прошёл на лыжах одну и ту же дистанцию: сначала со скоростью 9 км/ч, затем со скоростью 12 км/ч и, наконец, со скоростью 10 км/ч. Какова была средняя скорость школьника на всём пути?

П

176. Найдите координаты точек пересечения с осью x и осью y графика функции: а) $y=\frac{1}{2}x-2$; б) $y = -0{,}4x + 2$. Постройте график этой функции.

177. Напишите уравнение прямой: а) проходящей через точку (0; 4) и параллельной прямой $y = 3x$; б) проходящей через начало координат и параллельной прямой $y=-\frac{1}{2}x-8$.

178. Изобразите схематически график функции, заданной формулой вида $y = kx + b$, если:

а) $k > 0$, $b > 0$; в) $k < 0$, $b < 0$;
б) $k < 0$, $b > 0$; г) $k = 0$, $b > 0$.

179. Одна сторона прямоугольника на 20 см больше другой. Если меньшую сторону увеличить вдвое, а бóльшую — втрое, то периметр нового прямоугольника окажется равным 240 см. Найдите стороны данного прямоугольника.

180. Скорый и пассажирский поезда идут навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 710 км. Скорый поезд вышел на час раньше пассажирского и идёт со скоростью 110 км/ч. Через сколько часов после своего отправления он встретится с пассажирским поездом, если скорость пассажирского поезда равна 90 км/ч?

8. Функция $y=\frac{k}{x}$ и её график

Пусть длина прямоугольника равна x, а ширина — y см. Известно, что площадь этого прямоугольника равна 24 см^2. Тогда $x \cdot y = 24$, откуда получаем $y = \frac{24}{x}$. Функцию, задаваемую формулой вида $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$, называют *обратной пропорциональностью*.

В рассмотренном примере переменные x и y принимают лишь положительные значения. В дальнейшем, изучая функцию, задаваемую формулой вида $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$, будем считать, что x и y могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Определение. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.

Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех чисел, отличных от нуля. Это следует из того, что выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$.

Рассмотрим свойство обратной пропорциональности. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента ($x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$), а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции. Так как $k \neq 0$, то $y_1 \neq 0$ и $y_2 \neq 0$.

Из формулы $y = \frac{k}{x}$ следует, что $x_1 y_1 = k$ и $x_2 y_2 = k$, и потому верна пропорция $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$, т. е. *отношение двух произвольных значений аргумента равно обратному отношению соответствующих значений функции*. С этим связано название функции — обратная пропорциональность.

В повседневной жизни мы часто встречаемся со случаями, когда зависимость между переменными является обратной пропорциональностью.

Например:

1) время t ч, которое автомобиль, двигаясь со скоростью v км/ч, затрачивает на путь, равный 450 км, вычисляется по формуле $t = \frac{450}{v}$, т. е. зависимость t от v является обратной пропорциональностью;

2) масса m кг муки, которую можно купить на 85 р. по цене n р. за килограмм, вычисляется по формуле $m = \frac{85}{n}$, т. е. зависимость m от n является обратной пропорциональностью.

Построим график функции $y = \frac{12}{x}$. Для этого найдём значения y, соответствующие некоторым положительным значениям и противоположным им отрицательным значениям x:

x	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2,4	2	1,5	1

x	-1	$-1,5$	-2	-3	-4	-5	-6	-8	-12
y	-12	-8	-6	-4	-3	$-2,4$	-2	$-1,5$	-1

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице (рис. 3).

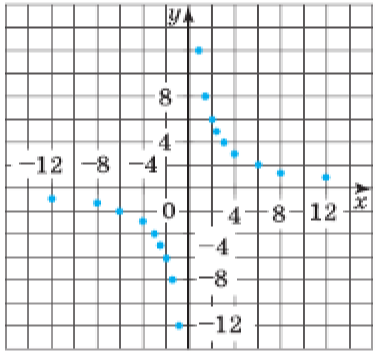


Рис. 3

Выясним некоторые особенности графика функции $y = \frac{12}{x}$. Так как число нуль не входит в область определения функции, то на графике нет точки с абсциссой 0, т. е. график не пересекает ось y. Так как ни при каком x значение y не равно нулю, то график не пересекает ось x. Положительным значениям x соответствуют положительные значения y. Чем больше положительное значение x, тем меньше соответствующее значение y. Например,

если $x = 10$, то $y = 1,2$;
если $x = 100$, то $y = 0,12$;
если $x = 1000$, то $y = 0,012$.

Заметим, что чем больше положительная абсцисса точки графика, тем ближе эта точка к оси абсцисс. При увеличении больших значений x это расстояние может стать как угодно малым. Чем ближе положительная абсцисса точки графика к нулю, тем больше ордината этой точки. Например,

если $x = 0,03$, то $y = 400$;
если $x = 0,0001$, то $y = 120\,000$.

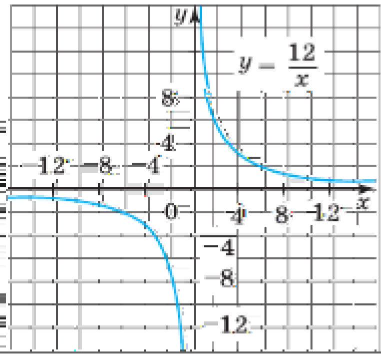


Рис. 4

Через отмеченные точки (рис. 3) проведём две плавные линии, одна из которых соединяет точки с положительными абсциссами, а другая — точки с отрицательными абсциссами. Получим график функции $y = \frac{12}{x}$ (рис. 4).

Этот график состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Одна из этих ветвей расположена в первой координатной четверти, а другая — в третьей. Такой же вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k > 0$.

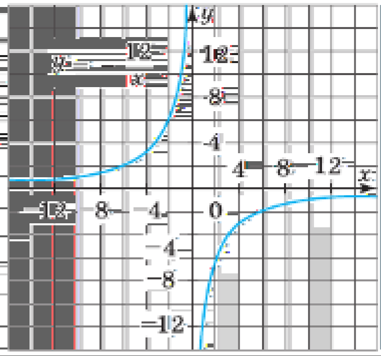


Рис. 5

На рисунке 5 на с. 47 построен график функции $y=-\frac{12}{x}$. Он так же, как и график функции $y=\frac{12}{x}$, представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Однако в отличие от графика функции $y=\frac{12}{x}$ одна из них лежит во второй, а другая — в четвёртой координатной четверти.

График функции $y=\frac{k}{x}$ при любом $k<0$ имеет такой же вид, что и график функции $y=-\frac{12}{x}$.

Кривую, являющуюся графиком обратной пропорциональности, называют *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей.

Упражнения

181. Функция задана формулой $y=\frac{8}{x}$. Перечертите в тетрадь таблицу и заполните её.

x	−4		−0,25	2	5	16	
y		−4					0,4

182. Обратная пропорциональность задана формулой $y=\frac{120}{x}$. Перечертите в тетрадь таблицу и заполните её.

x	−1200	−600			76	120		1000
y			−0,5	−1			0,4	

183. Двигаясь со скоростью v км/ч, поезд проходит расстояние между городами A и B, равное 600 км, за t ч. Запишите формулу, выражающую зависимость: а) v от t; б) t от v.

184. Обратная пропорциональность задана формулой $y=\frac{10}{x}$.

1) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 100; 1000; 0,1; 0,02.

2) Определите, принадлежит ли графику этой функции точка $A(-0{,}05;\ -200)$; $B(-0{,}1;\ 100)$; $C(400;\ 0{,}025)$; $D(500;\ -0{,}02)$.

185. Известно, что некоторая функция — обратная пропорциональность. Задайте её формулой, зная, что значению аргумента, равному 2, соответствует значение функции, равное 12.

186. На рисунке 6 построен график функции, заданной формулой $y = \frac{8}{x}$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 2; 4; −1; −4; −5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное −4; −2; 8.

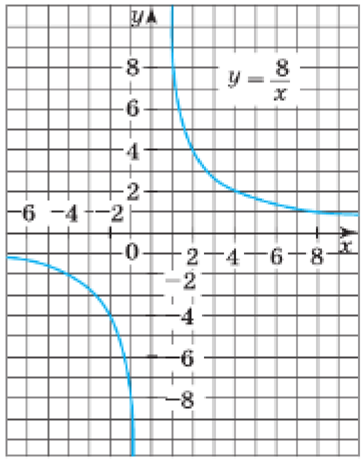


Рис. 6

187. Постройте график функции, заданной формулой $y = \frac{-8}{x}$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 4; 2,5; 1,5; −1; −2,5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное 8; −2.

188. Постройте график функции:

а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{3}{x}$; г) $y = -\frac{4}{x}$; д) $y = \frac{1}{2x}$; е) $y = -\frac{2}{5x}$.

189. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$ и, используя его, решите уравнение: а) $\frac{6}{x} = x$; б) $\frac{6}{x} = -x + 6$.

190. Решите графически уравнение: а) $\frac{8}{x} = x^2$; б) $\frac{8}{x} = x^3$.

191. *(Для работы в парах.)* Используя графические представления, выясните, сколько решений имеет уравнение:

а) $\frac{k}{x} = x^2$, где $k > 0$; в) $\frac{k}{x} = x^3$, где $k > 0$;

б) $\frac{k}{x} = x^2$, где $k < 0$; г) $\frac{k}{x} = x^3$, где $k < 0$.

1) Распределите, кто выполняет задания а) и г), а кто — задания б) и в), и выполните их.

2) Проверьте друг у друга, верно ли построены графики функций $y = \frac{k}{x}$.

3) Обсудите правильность сделанных выводов о числе решений уравнения.

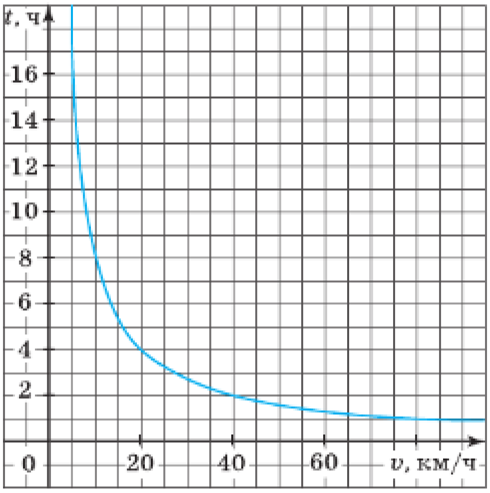


Рис. 7

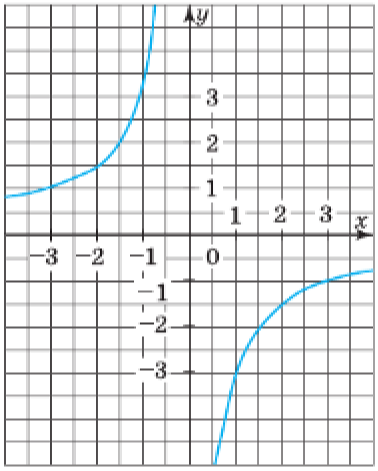


Рис. 8

192. Прямоугольный параллелепипед со сторонами основания a см и b см и высотой 20 см имеет объём, равный 120 см^3. Выразите формулой зависимость b от a. Является ли эта зависимость обратной пропорциональностью? Какова область определения этой функции? Постройте график.

193. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что её график проходит через точку:

а) $A\ (8;\ 0{,}125)$; б) $B\left(\frac{2}{3};\ 1\frac{4}{5}\right)$; в) $C\ (-25;\ -0{,}2)$.

194. На рисунке 7 построен график зависимости времени, затрачиваемого на путь из пункта A в пункт B, от скорости движения. С помощью графика ответьте на вопросы:

а) Сколько времени потребуется на путь из A в B при скорости движения 80 км/ч? 25 км/ч? 40 км/ч?
б) С какой скоростью надо двигаться, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 1 ч? за 4 ч? за 8 ч? за 16 ч?
в) Каково расстояние между пунктами A и B?

195. Определите знак числа k, зная, что график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен:

а) в первой и третьей координатных четвертях;
б) во второй и четвёртой координатных четвертях.

196. На рисунке 8 построен график одной из следующих функций:

1. $y = -\frac{5}{x}$ 2. $y = -\frac{3}{x}$ 3. $y = \frac{3}{x}$ 4. $y = \frac{5}{x}$

Укажите эту функцию.

197. Установите соответствие между функциями и их графиками (рис. 9).

а) $y=\frac{6}{x}$; б) $y=\frac{1}{6x}$; в) $y=-\frac{6}{x}$; г) $y=-\frac{1}{6x}$.

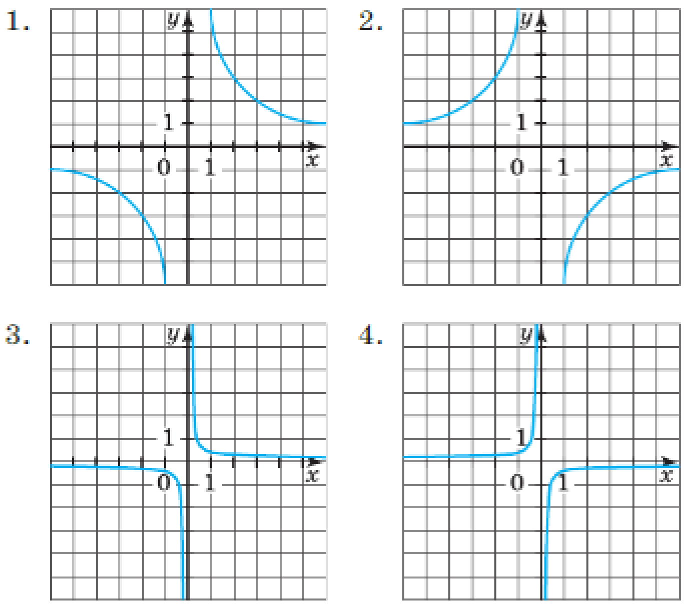


Рис. 9

198. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение дроби не зависит от значений этих переменных:

а) $\frac{5(x-y)^2}{(3y-3x)^2}$; б) $\frac{(3x-6y)^2}{4(2y-x)^2}$.

199. *(Задача-исследование.)* При каких значениях a и b является тождеством равенство

$$\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)}=\frac{a}{x-5}+\frac{b}{x+2}?$$

1) Обсудите, какие преобразования надо выполнить и каким условием воспользоваться, чтобы ответить на вопрос задачи.
2) Выполните необходимые преобразования, составьте систему уравнений и решите её.

3) Ответьте на вопрос задачи и проверьте полученный ответ.

200. Упростите выражение $\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}\right):\frac{x+7}{x-2}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правила умножения и деления дробей.
2. Сформулируйте правило возведения дроби в степень.
3. Какая функция называется обратной пропорциональностью?
4. В каких координатных четвертях расположен график функции $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$? при $k<0$?

Для тех, кто хочет знать больше

9. Представление дроби в виде суммы дробей

Сумму двух рациональных дробей, как известно, всегда можно представить в виде несократимой дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены с переменными или числа (в частности, число 1). Обратная задача — представление дроби в виде суммы двух дробей — неопределённая.

Так, например, дробь $\frac{4x^2-16x+1}{4x^2}$ можно представить в виде суммы (или разности) двух слагаемых разными способами:

$$\frac{4x^2-16x+1}{4x^2}=\frac{4x^2}{4x^2}+\frac{1-16x}{4x^2}=1+\frac{1-16x}{4x^2};$$

$$\frac{4x^2-16x+1}{4x^2}=\frac{4x^2+1}{4x^2}-\frac{16x}{4x^2}=\frac{4x^2+1}{4x^2}-\frac{4}{x}.$$

Вообще задача представления дроби в виде суммы дробей допускает сколь угодно много решений. Действительно, если требуется представить дробь $\frac{a}{b}$ в виде суммы двух дробей, то в качестве одного из слагаемых можно взять произвольную дробь $\frac{c}{d}$.

Тогда другая дробь будет равна разности $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, т. е. равна дроби

$$\frac{ad-bc}{bd}.$$

Для представления дроби в виде суммы дробей можно воспользоваться *методом неопределённых коэффициентов*. Разъясним на примере, в чём состоит этот метод.

Пример 1. Представим дробь $\frac{7x}{(x-3)(x+4)}$ в виде суммы дробей со знаменателями $x-3$ и $x+4$.

▶ Допустим, что

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}.$$

Сложим дроби в правой части равенства:

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}=\frac{a(x+4)+b(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\frac{(a+b)x+(4a-3b)}{(x-3)(x+4)}.$$

Получаем, что

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)}=\frac{(a+b)x+(4a-3b)}{(x-3)(x+4)}.$$

Это равенство будет тождеством, если $a+b=7$ и $4a-3b=0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases}a+b=7,\\4a-3b=0,\end{cases}$$

найдём, что $a=3$, $b=4$.

Следовательно,

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)}=\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x+4}. \quad ◁$$

Приведём теперь примеры задач, при решении которых используется представление дроби в виде суммы целого выражения и дроби.

Пример 2. Найдём все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению $x-xy+3y=5$.

▶ Выразим из уравнения переменную x через y:

$$x-xy=5-3y,\ x(1-y)=5-3y,\ x=\frac{5-3y}{1-y},\ x=\frac{3y-5}{y-1}.$$

Выделив из дроби $\frac{3y-5}{y-1}$ целую часть, получим

$$x = \frac{3y-3-2}{y-1} = \frac{3(y-1)-2}{y-1} = \frac{3(y-1)}{y-1} - \frac{2}{y-1} = 3 - \frac{2}{y-1}.$$

Значение дроби $\frac{2}{y-1}$ является целым числом тогда и только тогда, когда $y - 1 = -2$, $y - 1 = -1$, $y - 1 = 1$, $y - 1 = 2$.

Отсюда $y = -1; 0; 2; 3$. Вычисляя соответствующее значение x, получаем искомые пары целых чисел: $(4; -1)$, $(5; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$.◁

Пример 3. Найдём, при каких значениях n значение дроби $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ является целым числом.

▶ Представим дробь $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ в виде суммы многочлена и дроби.

Для этого многочлен $n^2 - 2n - 10$ разделим на двучлен $n - 5$. Деление выполним уголком аналогично тому, как выполняется деление натуральных чисел.

$$\begin{array}{rr|l} & n^2-2n-10 & n-5 \\ \cline{3-3} - & \underline{n^2-5n} & n+3 \\ & 3n-10 & \\ - & \underline{3n-15} & \\ & 5 & \end{array}$$

Получаем, что частное равно $n + 3$, а остаток равен 5. Значит,

$$n^2 - 2n - 10 = (n - 5)(n + 3) + 5.$$

Отсюда

$$\frac{n^2-2n-10}{n-5} = n + 3 + \frac{5}{n-5}.$$

Значение двучлена $n + 3$ при любом целом n является целым числом.

Значение дроби $\frac{5}{n-5}$ является целым числом тогда и только тогда, когда $n - 5$ равно 1, -1, 5 или -5.

Значит, дробь $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ принимает целые значения при n, равном 0, 4, 6 и 10. ◁

Упражнения

201. При каких значениях a и b равенство

$$\frac{6x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

является тождеством?

202. Представьте дробь $\frac{5x-1}{(x+4)(x-2)}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x + 4$ и $x - 2$.

203. Представьте дробь $\frac{4x+3}{x^2-1}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x - 1$ и $x + 1$.

204. Выясните, при каких целых a дробь $\frac{a^2-4a+1}{a-2}$ принимает целые значения, и найдите эти значения.

205. *(Для работы в парах.)* Зная, что m — целое число, найдите целые значения дроби:

а) $\frac{m^2-6m+10}{m-3}$; б) $\frac{(m-4)^2}{m-2}$.

1) Обсудите, какие преобразования надо выполнить, чтобы найти целые значения дроби.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены преобразования и верно ли найдены целые значения дроби. Исправьте замеченные ошибки.

206. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:

а) $5x + y - xy = 2$; б) $xy - x + y = 8$.

207. Найдите все точки графика функции $y = \frac{x^2-6x+1}{x-3}$ с целочисленными координатами.

208. Докажите, что при любом целом a, отличном от нуля, значение дроби $\frac{5a^2+6}{a^2+1}$ не является целым числом.

209. Найдите все пары натуральных чисел a и b, если известно, что сумма обратных им чисел равна $\frac{1}{7}$.

210. Найдите значение дроби $\frac{3x^2 - xy + 6y^2}{y^2}$, если $\frac{x - y}{y} = 2$.

211. Зная, что $\frac{a + 2b}{a} = 11$, найдите значение дроби $\frac{(a - 3b)^2}{b^2}$.

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

212. Найдите значение дроби:

а) $\frac{51 + 17^2}{10}$; б) $\frac{37^2 + 111}{40}$.

213. Расстояние между городами A и B равно 600 км. Первый поезд вышел из A в B и шёл со скоростью 60 км/ч. Второй поезд вышел из B в A на 3 ч позже, чем первый из A, и шёл со скоростью v км/ч. Поезда встретились через t ч после выхода первого поезда. Выразите v через t. Найдите скорость v при $t = 7$; при $t = 6$.

214. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{3x - 8}{25}$; в) $\frac{9}{x^2 - 7x}$; д) $\frac{12}{|x| - 3}$;

б) $\frac{37}{2y + 7}$; г) $\frac{2y + 5}{y^2 + 8}$; е) $\frac{45}{|y| + 2}$.

215. Составьте какую-либо дробь с переменной x, которая имеет смысл при всех значениях переменной, кроме:

а) $x = 2$; в) $x = -3$ и $x = 3$;

б) $x = 0$ и $x = 3$; г) $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$.

216. Укажите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{x - 2}$; б) $y = \frac{3x}{x + 5}$; в) $y = \frac{7x + 1}{2x - 6}$.

217. Сократите дробь:

а) $\frac{\overline{a0a0}}{101}$; б) $\frac{\overline{a00a}}{91}$.

218. Сократите дробь:

а) $\frac{(3a - 3c)^2}{9a^2 - 9c^2}$; б) $\frac{(a^2 - 9)^2}{(3 - a)^3}$; в) $\frac{8y^3 - 1}{y - 4y^3}$; г) $\frac{5a^2 - 3ab}{a^2 - 0{,}36b^2}$.

219. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-4a+4}{a^2+ab-2a-2b}$; в) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^3+8b^3}$;

б) $\frac{6x^2-3xy+4x-2y}{9x^2+12x+4}$; г) $\frac{27x^3-y^3}{18x^2+6xy+2y^2}$.

220. Выполните сокращение:

а) $\frac{b^{14}-b^7+1}{b^{21}+1}$; в) $\frac{x(y-z)-y(x-z)}{x(y-z)^2-y(x-z)^2}$;

б) $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$; г) $\frac{a(b+1)^2-b(a+1)^2}{a(b+1)-b(a+1)}$.

221. Докажите, что если в дроби $\frac{x^2-2y^2}{3y^2+5xy}$ переменные x и y заменить соответственно на kx и ky, где $k \neq 0$, то получится дробь, тождественно равная первоначальной.

222. Известно, что $a - b = 9$. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36}{(a-b)^2}$; б) $\frac{108}{(b-a)^2}$; в) $\frac{(5a-5b)^2}{45}$; г) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$.

223. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, то $a = b = c$.

К параграфу 2

224. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-2x}{x-3}-\frac{4x-9}{x-3}$; в) $\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{b^2-a^2}$;

б) $\frac{y^2-10}{y-8}-\frac{54}{y-8}$; г) $\frac{x^2-2x}{x^2-y^2}-\frac{2y-y^2}{y^2-x^2}$.

225. Докажите, что данное выражение тождественно равно многочлену:

а) $\frac{(y-b)^2}{y-b+1}+\frac{y-b}{y-b+1}$; в) $\frac{x^2-y^2}{x-y-1}+\frac{x+y}{y-x+1}$;

б) $\frac{(a+x)^2}{a+x-2}-\frac{2a+2x}{a+x-2}$; г) $\frac{b^2-9c^2}{b+3c-2}+\frac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

226. Докажите, что если правильная обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то дробь, дополняющая её до единицы, также несократима.

227. При каких натуральных n является натуральным числом значение выражения:

а) $\frac{n+6}{n}$; б) $\frac{5n-12}{n}$; в) $\frac{36-n^2}{n^2}$?

228. Найдите значение выражения, зная, что $\frac{x}{y}=5$:

а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{x-y}{y}$; в) $\frac{y}{x}$; г) $\frac{x+2y}{x}$.

229. Зная, что $\frac{x+y}{y}=3$, найдите значение выражения:

а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{y}{x+y}$; в) $\frac{x-y}{y}$; г) $\frac{y}{x}$.

230. Выполните действие:

а) $\frac{3b^2-5b-1}{b^2y}+\frac{5b-3}{by}$; в) $\frac{1+c}{c^3y^4}-\frac{c^3+y^4}{c^2y^8}$;

б) $\frac{a^2-a+1}{a^3x}-\frac{x^2-1}{ax^3}$; г) $\frac{c^2+x^2}{c^2x^5}-\frac{c+x}{c^3x^3}$.

231. Представьте в виде дроби:

а) $x+y+\frac{x-y}{4}$; в) $a-\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$;

б) $m+n-\frac{1+mn}{n}$; г) $a^2-b^2-\frac{a^3-b^3}{a+b}$.

232. Упростите выражение:

а) $\frac{mn+1}{m+n}+\frac{mn-1}{m-n}$; б) $\frac{x+4a}{3a+3x}-\frac{a-4x}{3a-3x}$.

233. Упростите выражение:

а) $\frac{2y^2-y}{y^2-y+\frac{1}{4}}-\frac{2y^2+y}{y^2+y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{y^2-\frac{1}{4}}$;

б) $\frac{6a}{2{,}5a^2-0{,}64}-\frac{8}{6a-3{,}2}$.

234. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения равно нулю:

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}.$$

235. Упростите выражение:

а) $\frac{5}{y-3}+\frac{1}{y+3}-\frac{4y-18}{y^2-9}$;

б) $\frac{2a}{2a+3}+\frac{5}{3-2a}-\frac{4a^2+9}{4a^2-9}$;

в) $\frac{4m}{4m^2-1}-\frac{2m+1}{6m-3}+\frac{2m-1}{4m+2}$;

г) $\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$;

д) $\frac{4a^2+3a+2}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}$;

е) $\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}-\frac{3xy}{x^3-y^3}+\frac{1}{x-y}$.

236. Докажите, что тождественно равны выражения

$$\frac{ax+by}{(a-b)(x+y)}-\frac{bx-ay}{(a+b)(x+y)} \quad \text{и} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

237. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

б) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

238. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

а) $\frac{x^2-3x+6}{x-3}$; б) $\frac{y^2+5y-8}{y+5}$; в) $\frac{a^2+7a+2}{a+6}$; г) $\frac{3b^2-10b-1}{b-3}$.

239. При каком значении a тождественно равны выражения:

а) $\frac{2x}{x+3}$ и $2+\frac{a}{x+3}$;

б) $\frac{x}{x-5}$ и $1+\frac{a}{x-5}$;

в) $\frac{2x}{3-x}$ и $\frac{a}{3-x}-2$;

г) $\frac{x+2}{5-x}$ и $\frac{a}{5-x}-1$?

240. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

а) $\frac{5x}{x+2}$; б) $\frac{-2x}{x-1}$; в) $\frac{2x}{5-x}$; г) $\frac{x-3}{2-x}$.

241. При каких целых n значение дроби является целым числом:

а) $\frac{5n^2+2n+3}{n}$; б) $\frac{(n-3)^2}{n}$; в) $\frac{3n}{n+2}$; г) $\frac{7n}{n-4}$?

242. Найдите такие значения a и b, при которых выполняется тождество:

а) $\frac{5x}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$;

б) $\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)}=\frac{a}{x-5}-\frac{b}{x+2}$.

К параграфу 3

243. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\dfrac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$;

б) $\dfrac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab}:\dfrac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}$.

244. Докажите, что если $m\neq n$, $m\neq 0$ и $n\neq 0$, то значение выражения $\dfrac{2}{mn}:\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)^2-\dfrac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$ не зависит от значений переменных.

245. Докажите, что при любом целом a и дробном x значение выражения

$$\left(a-\frac{a^2+x^2}{a+x}\right)\cdot\left(\frac{2a}{x}+\frac{4a}{a-x}\right)$$

является чётным числом.

246. Докажите, что при любом значении x, большем 2, значение выражения

$$\left(\frac{x+1}{2x}+\frac{4}{x+3}-2\right):\frac{x+1}{x+3}-\frac{x^2-5x+3}{2x}$$

является отрицательным числом.

247. Упростите выражение:

а) $ab+\dfrac{ab}{a+b}\left(\dfrac{a+b}{a-b}-a-b\right)$;

б) $\left(\dfrac{y^2-xy}{x^2+xy}-xy+y^2\right)\cdot\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}$;

в) $\left(\dfrac{1}{(2a-b)^2}+\dfrac{2}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{(2a+b)^2}\right)\cdot\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$;

г) $\dfrac{4c^2}{(c-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(c+2)^2}+\dfrac{1}{(c-2)^2}+\dfrac{2}{c^2-4}\right)$.

248. Упростите выражение:

а) $\left(x-\dfrac{4xy}{x+y}+y\right)\cdot\left(x+\dfrac{4xy}{x-y}-y\right)$;

б) $\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}+1\right):\left(1-\dfrac{1}{1-a}\right)$.

249. Докажите тождество

$$\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}=-\frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right).$$

250. Одно из тождеств, приведённых знаменитым математиком XVIII в. Л. Эйлером, выглядит так:

$$a^3+b^3+\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Докажите его.

251. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$\frac{\frac{3}{2}a^2-2ab+\frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2}+\frac{6b}{\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b}$$

не зависит от a и b.

252. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{x-\dfrac{yz}{y-z}}{y-\dfrac{xz}{x-z}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a-x}{a}+\dfrac{x}{a-x}}{\dfrac{a+x}{a}-\dfrac{x}{a+x}}$; в) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$; г) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

253. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{3x}{x^2-4}}$; б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$?

254. Три вязальщицы получили одинаковые заказы на изготовление салфеток. Первая из них может выполнить заказ за 8 ч, вторая — за 9 ч, а их ученица — за 12 ч. Они объединили заказы и стали выполнять их совместно. Через сколько часов работа была закончена?

255. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B. До пункта C, находящегося в середине пути, он ехал со скоростью 60 км/ч, а далее из C в B — со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути следования.

256. Докажите, что если z является средним гармоническим положительных чисел a и b, причём $a \neq b$, то верно равенство

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

257. Известно, что точка $P(-9;\ 18)$ принадлежит графику функции, заданной формулой вида $y=\frac{k}{x}$. Найдите значение k.

258. Принадлежит ли графику функции $y=\frac{1}{x}$ точка:

а) $A(40;\ 0{,}025)$;
б) $B(0{,}03125;\ 32)$;
в) $C\left(0{,}016;\ 6\frac{1}{4}\right)$;
г) $D(0{,}125;\ 0{,}8)$?

259. Известно, что график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A(10;\ 2{,}4)$. Проходит ли график этой функции через точку:

а) $B(1;\ 24)$;
б) $C\left(-\frac{1}{5};\ -120\right)$;
в) $D(-2;\ 12)$;
г) $E(-10;\ -2{,}4)$;
д) $K(5;\ -1{,}2)$;
е) $M(-2{,}5;\ -0{,}6)$?

260. Найдите область определения функции и постройте её график:

а) $y=\frac{36}{(x+1)^2-(x-1)^2}$;
б) $y=\frac{18-12x}{x^2-3x}-\frac{6}{3-x}$;
в) $y=\frac{16}{(2-x)^2-(2+x)^2}$;
г) $y=\frac{3x(x+1)-3x^2+15}{x(x+5)}$.

261. Постройте график функции $y=-4-\frac{x+2}{x^2+2x}$. Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

262. Постройте график функции:

а) $y=\frac{4}{|x|}$;
б) $y=\frac{2{,}4}{|x|}$;
в) $y=\frac{1}{|x|}$;
г) $y=\frac{-1}{|x|}$;
д) $y=-\frac{6}{|x|}$;
е) $y=\frac{-3{,}6}{|x|}$.

263. Постройте график функции:

а) $y=\frac{|2x-18|}{x-9}$;
б) $y=\frac{|x+3|}{3x+9}$.

264. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 16}{|x - 4|}$; б) $y = \frac{x^2 - 25}{5 + |x|}$.

265. При каких значениях k и b гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = kx + b$ проходят через точку:

а) $P(2;\ 1)$; б) $Q(-2;\ 3)$; в) $R(-1;\ 1)$?

266. Могут ли графики функций $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ и $y = ax + b$ пересекаться:

а) только в одной точке;
б) только в двух точках;
в) в трёх точках?

267. Могут ли графики функций $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ и $y = ax + b$ пересекаться в двух точках, лежащих:

а) в одной четверти;
б) в первой и второй четвертях;
в) в первой и третьей четвертях?

Глава II КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

При изучении этой главы вы узнаете, что кроме известных вам рациональных чисел существуют ещё и так называемые иррациональные числа. Эти числа вместе с рациональными числами образуют множество действительных чисел. Вы познакомитесь с понятием квадратного корня, изучите свойства арифметических квадратных корней, научитесь применять их в вычислениях и преобразованиях, а также рассмотрите свойства и график функции, которая задаётся формулой $y = \sqrt{x}$.

§ 4 АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

10. Действительные числа

До сих пор при изучении алгебры вы имели дело только с рациональными числами. Известно, что всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, причём одно и то же рациональное число можно представить в таком виде разными способами.

Например, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20}$; $-1{,}2 = \frac{-12}{10} = \frac{-6}{5}$; $7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2}$.

Для рациональных чисел используют также десятичные представления. В 7 классе было показано, что *каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби.*

Например, $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8(3)$; $\frac{4}{25} = 0{,}16 = 0{,}16(0)$; $-1{,}6 = -1{,}6(0)$.

Верно и обратное: *каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.*

Например, $0,(7) = \frac{7}{9}$; $2,(36) = 2\frac{36}{99} = 2\frac{4}{11}$.

При этом дроби с периодом 9 не рассматриваются; их считают другой записью дробей с периодом 0.

Известно, что всякому рациональному числу соответствует некоторая точка на координатной прямой. Однако обратное неверно: оказывается, на координатной прямой есть точки, которые не имеют рациональной координаты. Этим точкам соответствуют новые числа, которые называют *иррациональными числами*.

Пример 1. Построим на координатной прямой какую-нибудь точку, координатой которой является иррациональное число.

▶ Пусть точка O — начальная точка координатной прямой и OE — единичный отрезок. Измерим длину отрезка OK — диагонали квадрата, стороной которого служит единичный отрезок (рис. 10, *а*).

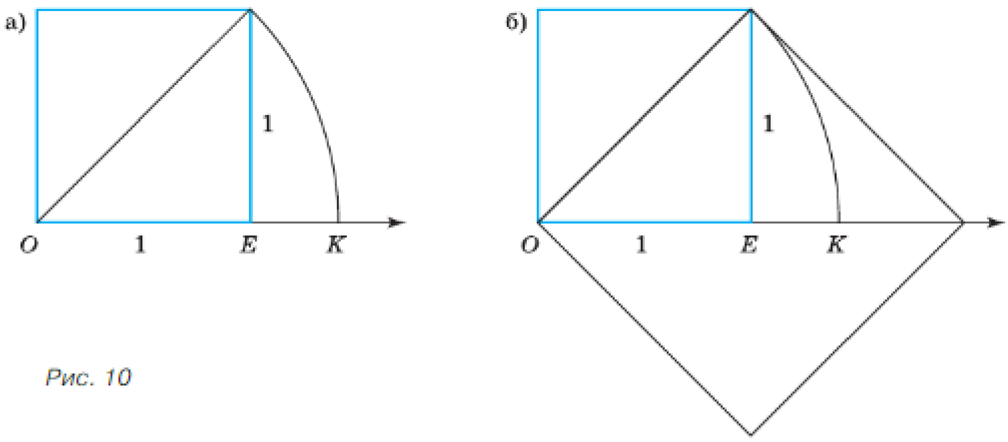


Рис. 10

Построим на диагонали единичного квадрата новый квадрат (рис. 10, *б*). Из рисунка видно, что площадь этого квадрата в два раза больше площади единичного квадрата. Значит, она равна 2. Так как отрезок OK равен стороне нового квадрата, то длина отрезка OK равна числу, квадрат которого равен 2. ◁

При десятичном измерении отрезка OK получится бесконечная десятичная дробь, которая не является периодической, так как

> среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2.

Предположим, что число, квадрат которого равен 2, является рациональным. Тогда это число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное. Так как $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, то $\frac{m^2}{n^2} = 2$ и $m^2 = 2n^2$. Число $2n^2$ чётное, значит, и равное ему число m^2 чётное.

Но тогда и само число m является чётным (если бы число m было нечётным, то и число m^2 было бы нечётным). Поэтому число m можно представить в виде $m = 2k$, где k — целое число. Подставим $2k$ вместо m в равенство $m^2 = 2n^2$. Получим:

$$(2k)^2 = 2n^2,\ 4k^2 = 2n^2,\ 2k^2 = n^2.$$

Число $2k^2$ чётное, значит, число n^2 тоже чётное. Тогда и число n является чётным, т. е. числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — числа чётные. Это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Значит, неверно предположение, что число, квадрат которого равен 2, является рациональным. ○

Итак, десятичное измерение длин отрезков каждой точке координатной прямой, лежащей справа от начальной точки O, ставит в соответствие положительную бесконечную десятичную дробь. Наоборот, взяв произвольную положительную бесконечную десятичную дробь, мы можем найти на координатной прямой справа от точки O единственную точку A, такую, что длина отрезка OA выражается этой дробью.

Если к положительным бесконечным десятичным дробям присоединить противоположные им числа и число нуль, то получим множество чисел, которые называют *действительными числами*.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой, и каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число. Говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует *взаимно однозначное соответствие*.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$ (от первой буквы латинского слова *realis* — реальный, существующий в действительности).

Напомним, что существует формула, по которой можно найти длину отрезка на координатной прямой, зная координаты его концов. Так, если $A(x_1)$ и $B(x_2)$ — две точки координатной прямой, то расстояние между ними, т. е. длина отрезка AB, вычисляется по формуле

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Бесконечные десятичные дроби могут быть периодическими и непериодическими. Бесконечные десятичные периодические дроби представляют рациональные числа. Каждое такое число можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют *иррациональными числами* (приставка «ир» означает отрицание). Иррациональные числа нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Таким образом,

> множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Приведём примеры иррациональных чисел:

1) 8,0506070809010011... (нули разделяются цифрами, начиная с пяти и каждый раз увеличиваясь на единицу);

2) −3,14114111411114... (единицы разделяются четвёрками, при этом единицы увеличиваются на одну каждый раз);

3) число π = 3,14159265358979..., выражающее отношение длины окружности к диаметру.

Действительные числа, записанные с помощью бесконечных десятичных дробей, сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

Сравним, например, числа 2,46366... и 2,47011... . В этих положительных бесконечных десятичных дробях совпадают целые части и цифры десятых, а в разряде сотых у первой дроби число единиц меньше, чем у второй. Поэтому 2,46366... $<$ 2,47011... .

Сравним числа 0,253... и −0,149... . Первое из этих чисел положительное, а второе — отрицательное. Поэтому 0,253... $>$ −0,149... .

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (при условии, что делитель отличен от нуля), причём действия над действительными числами обладают теми же свойствами, что и действия над рациональными числами. При выполнении действий над действительными числами в практических задачах их заменяют приближёнными значениями. Повышая точность, с которой берутся приближённые значения, получают более точное значение результата.

Пример 2. Найдём приближённое значение суммы чисел a и b, где $a = \frac{1}{3}$, b = 1,7132... .

▶ Возьмём приближённые значения слагаемых с точностью до 0,1: $a \approx 0{,}3$, $b \approx 1{,}7$. Получим $a + b \approx 0{,}3 + 1{,}7 = 2{,}0$.

Если взять приближённые значения слагаемых с точностью до 0,01, т. е. $a \approx 0{,}33$ и $b \approx 1{,}71$, то получим

$$a + b \approx 0{,}33 + 1{,}71 = 2{,}04. \ \triangleleft$$

Пример 3. Найдём длину окружности, радиус r которой равен 5 м.

▶ Длина окружности l вычисляется по формуле $l = 2\pi r$. Взяв $\pi \approx 3{,}14$, получим $l \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ (м). ◁

Упражнения

268. Приведите пример:
а) рационального числа; б) иррационального числа.

269. Верно ли, что:
а) каждое рациональное число является действительным;
б) каждое действительное число является рациональным;
в) каждое иррациональное число является действительным;
г) каждое действительное число является иррациональным?

270. Среди чисел $\frac{1}{7}$; 0; 0,25; −2,(3); 0,818118111... (число единиц, разделяющих восьмёрки, каждый раз увеличивается на одну); 4,2(51); 217; π укажите рациональные и иррациональные.

271. Верно ли, что:
а) $7{,}16 \in \boldsymbol{N}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Z}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Q}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{R}$;
б) $409 \in \boldsymbol{N}$; $409 \in \boldsymbol{Z}$; $409 \in \boldsymbol{Q}$; $409 \in \boldsymbol{R}$;
в) $\pi \in \boldsymbol{N}$; $\pi \in \boldsymbol{Z}$; $\pi \in \boldsymbol{Q}$; $\pi \in \boldsymbol{R}$?

272. Сравните:
а) 7,653... и 7,563...; в) −48,075... и −48,275...;
б) 0,123... и 0,114...; г) −1,444... и −1,456... .

273. Какое из чисел больше:
а) 1,(56) или 1,56; в) $1\frac{2}{3}$ или 1,6668; д) π или 3,1415;
б) −4,(45) или −4,45; г) −0,228 или $-\frac{5}{22}$; е) 3,(14) или π?

КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС (1815—1897) — немецкий математик, почётный член Петербургской академии наук. Имеет многочисленные труды по математическому анализу и другим разделам математики. С его именем связано построение теории действительных чисел на основе десятичных дробей.

274. Сравните числа:

а) 9,835... и 9,847...;
г) $2\frac{1}{7}$ и 2,142;

б) −1,(27) и −1,272;
д) 1,(375) и $1\frac{3}{8}$;

в) 0,06(3) и 0,0624;
е) −3,(16) и $-3\frac{4}{25}$.

275. Какая из точек — C или D — координатной прямой ближе к точке M, если:
а) $C(4{,}514)$, $D(-1{,}9368...)$, $M(1{,}304)$;
б) $C(-2{,}4815...)$, $D(11{,}454)$, $M(4{,}586)$.

276. Расположите в порядке возрастания числа

4,62; 3,(3); −2,75...; −2,63... .

277. Расположите в порядке убывания числа

1,371...; 2,065; 2,056...; 1,(37); −0,078... .

278. Какие целые числа расположены между числами:
а) −3,168... и 2,734...;
в) −4,06 и −1,601;
б) −5,106... и −1,484...;
г) −1,29 и 0,11?

279. Найдите приближённое значение выражения $a + b$, где $a = 1{,}0539...$ и $b = 2{,}0610...$, округлив предварительно a и b:
а) до десятых; б) до сотых; в) до тысячных.

280. Найдите приближённое значение выражения $a - b$, где $a = 59{,}678...$ и $b = 43{,}123...$, округлив предварительно a и b:
а) до десятых; б) до сотых.

281. Найдите приближённое значение длины окружности, радиус которой равен 4,5 см (число π округлите до сотых).

282. Найдите приближённое значение площади круга, радиус которого равен 10 м (число π округлите до сотых).

283. Является ли рациональным или иррациональным числом сумма $a + b$, где $a = 1{,}323223222...$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трёх двоек и т. д., разделяются тройками) и $b = 2{,}313113111...$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трёх единиц и т. д., разделяются тройками)?

284. Известно, что a^2, b^2, $a - b$ — рациональные числа и $a \neq b$. Каким числом, рациональным или иррациональным, является сумма $a + b$?

П

285. Упростите выражение:

а) $\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right):\left(\frac{x}{x+1}+1\right)$;

б) $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a}-\frac{b}{a+b}\right)$;

в) $\frac{3a^2-a+3}{a^3-1}-\frac{a-1}{a^2+a+1}+\frac{2}{1-a}$;

г) $\left(\frac{2b}{1-b}-b\right):\frac{3b+3}{b-1}$;

д) $\left(a-x+\frac{x^2}{a+x}\right)\cdot\frac{a-x}{a}$.

286. Найдите значение выражения:

а) $|28x-8|$ при $x=-2{,}5;\ 0;\ 4;\ 5;\ 9{,}5$;
б) $|6-12x|$ при $x=-3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 4$.
в) $|x|+|x-2|$ при $x=0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$;
г) $|y-3|+|y+3|$ при $y=-6;\ -5;\ 5;\ 6$.

287. Известно, что график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A(4;\ -0{,}5)$. Найдите k и постройте этот график.

288. При каких значениях a и b графики функций $y=x+b$ и $y=ax-2b$ пересекаются в точке $(3;\ 1)$?

11. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Пусть площадь квадрата равна 64 см^2. Чему равна длина стороны этого квадрата?

Обозначим длину стороны квадрата (в сантиметрах) буквой x. Тогда площадь квадрата будет x^2 см^2. По условию площадь равна 64 см^2, значит, $x^2=64$.

Корнями уравнения $x^2=64$ являются числа 8 и −8. Действительно, $8^2=64$ и $(-8)^2=64$. Так как длина не может выражаться отрицательным числом, то условию задачи удовлетворяет только один из корней — число 8. Итак, длина стороны квадрата равна 8 см.

Корни уравнения $x^2 = 64$, т. е. числа, квадраты которых равны 64, называют *квадратными корнями* из числа 64.

Определение. Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Число 8 — неотрицательный корень уравнения $x^2 = 64$ — называют *арифметическим квадратным корнем* из 64. Иначе говоря, арифметический квадратный корень из 64 — это неотрицательное число, квадрат которого равен 64.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ называют *знаком арифметического квадратного корня* или знаком радикала (от латинского слова *radex* — корень). Выражение, стоящее под знаком корня, называют *подкоренным выражением*. Запись $\sqrt{a}$ читают: квадратный корень из a (слово «арифметический» при чтении опускают).

Приведём примеры нахождения (или, как говорят иначе, извлечения) арифметических квадратных корней:

$\sqrt{4} = 2$, так как 2 — число неотрицательное и $2^2 = 4$;

$\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$, так как 1,1 — число неотрицательное и $1{,}1^2 = 1{,}21$;

$\sqrt{0} = 0$, так как 0 — число неотрицательное и $0^2 = 0$.

Вообще

$\sqrt{a} = b$, если выполняются два условия: $b \geqslant 0$; $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Выражение $\sqrt{-4}$ не имеет смысла, так как не существует такого числа, квадрат которого равен отрицательному числу.

Пользуясь определением арифметического квадратного корня, можно решать некоторые уравнения, содержащие квадратные корни.

П р и м е р. Решим уравнение $\sqrt{5x-1}=7$.

▶ Из определения арифметического квадратного корня следует, что $5x - 1 = 7^2$, т. е. $5x - 1 = 49$. Отсюда $5x = 50$; $x = 10$. ◁

Упражнения

289. Докажите, что число:
а) 5 есть арифметический квадратный корень из 25;
б) 0,3 есть арифметический квадратный корень из 0,09;
в) −7 не является арифметическим квадратным корнем из 49;
г) 0,6 не является арифметическим квадратным корнем из 3,6.

290. Докажите, что:
а) $\sqrt{121}=11$; б) $\sqrt{169}=13$; в) $\sqrt{1,44}=1,2$; г) $\sqrt{0,49}=0,7$.

291. Найдите значение корня:
а) $\sqrt{81}$; в) $\sqrt{1600}$; д) $\sqrt{0,04}$; ж) $\sqrt{\frac{81}{4}}$;
б) $\sqrt{36}$; г) $\sqrt{10\,000}$; е) $\sqrt{0,81}$; з) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

292. Вычислите:
а) $\sqrt{900}$; б) $\sqrt{0,01}$; в) $\sqrt{0,64}$; г) $\sqrt{\frac{121}{64}}$; д) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

293. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{a+b}$ при $a = 33$; $b = -8$; $a = 0,65$; $b = 0,16$;
б) $\sqrt{3x-5}$ при $x = 23$; $1,83$;
в) $x+\sqrt{x}$ при $x = 0$; $0,01$; $0,36$; $0,64$; 1; 25; 100; 3600.

294. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ при $x=\frac{9}{25}$, $y = 0,36$; б) $\sqrt{4-2a}$ при $a = 2$; $-22,5$.

295. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{0,09}+\sqrt{0,25}$; в) $3\sqrt{9}-16$; д) $0,1\sqrt{400}+0,2\sqrt{1600}$;
б) $\sqrt{0,04}-\sqrt{0,01}$; г) $-7\sqrt{0,36}+5,4$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{0,36}+\frac{1}{5}\sqrt{900}$.

296. Найдите значение выражения:
а) $0,6\sqrt{36}$; г) $\sqrt{0,64}-\sqrt{0,04}$; ж) $\frac{1}{3}\sqrt{0,81}-1$;
б) $-2,5\sqrt{25}$; д) $-\sqrt{0,0036}+\sqrt{0,0025}$; з) $4-10\sqrt{0,01}$.
в) $\sqrt{0,49}+\sqrt{0,16}$; е) $\sqrt{0,01}-\sqrt{0,0001}$;

297. Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, найдите:

а) $\sqrt{225}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{361}$;

б) $\sqrt{1{,}44}$, $\sqrt{3{,}24}$, $\sqrt{2{,}56}$, $\sqrt{2{,}25}$;

в) $\sqrt{576}$, $\sqrt{1764}$, $\sqrt{3721}$, $\sqrt{7396}$;

г) $\sqrt{7{,}29}$, $\sqrt{13{,}69}$, $\sqrt{56{,}25}$, $\sqrt{77{,}44}$.

298. Какие из чисел $\sqrt{0{,}04}$; $\sqrt{0{,}025}$; $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{6{,}4}$; $\sqrt{0{,}0036}$; $\sqrt{0{,}256}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}000001}$; $\sqrt{52{,}9}$ являются рациональными, а какие — иррациональными?

299. Приведите контрпример для утверждения:

а) при любом натуральном значения n значение выражения $\sqrt{11-n}$ является иррациональным числом;

б) при любом натуральном значения n значение выражения $\sqrt{25-n}$ является иррациональным числом.

300. Какая из точек — A или B — координатной прямой ближе к точке с координатой нуль, если:

а) $A(\sqrt{15{,}21})$, $B(-\sqrt{16})$; б) $A\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)$, $B\left(-\sqrt{1\frac{13}{36}}\right)$?

301. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{100}$; в) $-\sqrt{100}$; д) $\sqrt{(-25)\cdot(-4)}$;

б) $\sqrt{-100}$; г) $\sqrt{(-10)^2}$; е) $\sqrt{-25\cdot 4}$?

302. Найдите число, арифметический квадратный корень из которого равен 0; 1; 3; 10; 0,6.

303. Найдите значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x}=4$; в) $2\sqrt{x}=0$; д) $\sqrt{x}-8=0$;

б) $\sqrt{x}=0{,}5$; г) $4\sqrt{x}=1$; е) $3\sqrt{x}-2=0$.

304. Существует ли значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x}=0{,}1$; б) $\sqrt{x}=-10$; в) $\sqrt{x}+1=0$; г) $\sqrt{x}-3=0$?

305. *(Для работы в парах.)* При каком значении переменной x верно равенство:

а) $\sqrt{x}=11$; в) $\sqrt{x}=-20$; д) $5-\sqrt{x}=0$;

б) $10\sqrt{x}=3$; г) $2\sqrt{x}-1=0$; е) $2+\sqrt{x}=0$?

1) Обсудите, о каких равенствах можно сразу сказать, что они не являются верными ни при каких значениях x. Исключите их из рассмотрения.
2) Распределите, кто выполняет оставшиеся задания из первой строки, а кто — из второй строки, и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания. Исправьте замеченные ошибки.

306. Найдите значение переменной x, при котором верно равенство:

а) $\sqrt{3+5x}=7$; б) $\sqrt{10x-14}=11$; в) $\sqrt{\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}}=0$.

307. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x-1}=1$; б) $\sqrt{6x+4}=2$; в) $\sqrt{12-x}=6$; г) $\sqrt{8x-1}=1$.

308. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{12+x}-7=3$; в) $16-\sqrt{x-2}=7$;
б) $\sqrt{5x-1}-4=6$; г) $12-\sqrt{3-6x}=-2$.

П

309. Найдите значение выражения $1{,}5x^3y^2 \cdot 6{,}2xy$, если $x = 1{,}25$, $y = 4$.

310. Найдите:
а) $|x|$, если $x = 10;\ 0{,}3;\ 0;\ -2{,}7;\ -9$;
б) x, если $|x| = 6;\ 3{,}2;\ 0$.

311. Запишите без знака модуля:
а) $|a|$, где $a > 0$; в) $|a^2|$; д) $|a^3|$, где $a < 0$.
б) $|c|$, где $c < 0$; г) $|a^3|$, где $a > 0$;

12. Уравнение $x^2 = a$

Вы уже знакомы с графиком функции $y = x^2$ (рис. 11). Рассмотрим некоторые его особенности.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** Поэтому график функции проходит через начало координат.

2. **Если $x \neq 0$, то $y > 0$.** Значит, все точки графика функции, кроме точки (0; 0), расположены выше оси x.

3. **Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y.** Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, симметричны относительно оси y.

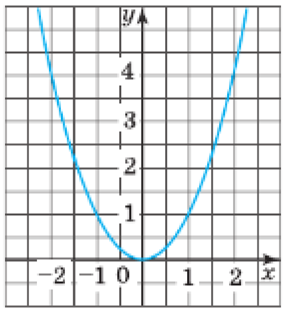


Рис. 11

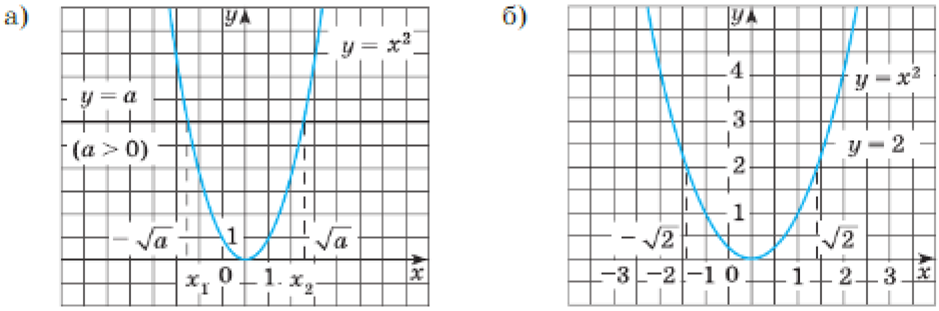


Рис. 12

С помощью графика функции $y = x^2$ можно находить корни некоторых уравнений. Рассмотрим уравнение $x^2 = a$, где a — произвольное число. В зависимости от числа a при решении этого уравнения возможны три случая.

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ корней не имеет. Действительно, не существует числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.

Если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень, равный нулю, так как существует единственное число 0, квадрат которого равен нулю.

Если $a > 0$, то уравнение имеет два корня. Чтобы убедиться в этом, обратимся к графику функции $y = x^2$ (рис. 12, *а*). Прямая $y = a$ при $a > 0$ пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках. Обозначим абсциссы точек пересечения x_1 и x_2. Тогда $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$, значит, числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = a$. Так как x_2 есть положительное число, квадрат которого равен a, то x_2 является арифметическим квадратным корнем из a, т. е. $x_2 = \sqrt{a}$. Так как x_1 есть число, противоположное x_2, то $x_1 = -\sqrt{a}$.

Например, уравнение $x^2 = 6{,}25$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{6{,}25}$ и $x_2 = \sqrt{6{,}25}$, т. е. $x_1 = -2{,}5$ и $x_2 = 2{,}5$; уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{4}{9}}$, т. е. $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

Уравнение $x^2 = 2$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$. Эти корни являются иррациональными числами, так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. С помощью графика функции $y = x^2$ легко найти приближённые значения этих корней: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ и $-\sqrt{2} \approx -1{,}4$ (рис. 12, *б*). Уравнения $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, $x^2 = 6{,}5$ имеют соответственно корни $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$, $-\sqrt{6{,}5}$ и $\sqrt{6{,}5}$. Эти корни также являются иррациональными числами.

Вообще при любом $a \geqslant 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет неотрицательный корень $\sqrt{a}$; иными словами, какое бы число $a \geqslant 0$ мы ни взяли, найдётся неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это означает, что

> выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при любом $a \geqslant 0$.
> При любом a, при котором выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, верно равенство $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Упражнения

312. Имеет ли корни уравнение:
а) $x^2 = 81$; б) $x^2 = 18$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = -25$?

313. Решите уравнение:
а) $x^2 = 36$; в) $x^2 = 121$; д) $x^2 = 8$;
б) $x^2 = 0{,}49$; г) $x^2 = 11$; е) $x^2 = 2{,}5$.

314. Решите уравнение и с помощью графика функции $y = x^2$ найдите приближённые значения его корней:
а) $x^2 = 3$; б) $x^2 = 5$; в) $x^2 = 4{,}5$; г) $x^2 = 8{,}5$.

315. Решите уравнение:
а) $80 + y^2 = 81$; в) $20 - b^2 = -5$; д) $\frac{1}{4}a^2 = 10$;
б) $19 + c^2 = 10$; г) $3x^2 = 1{,}47$; е) $-5y^2 = 1{,}8$.

316. Найдите корни уравнения:
а) $16 + x^2 = 0$; в) $0{,}5x^2 = 30$; д) $x^3 - 3x = 0$;
б) $0{,}3x^2 = 0{,}027$; г) $-5x^2 = \frac{1}{20}$; е) $x^3 - 11x = 0$.

317. Решите уравнение:
а) $(x - 3)^2 = 25$; в) $(x - 6)^2 = 7$;
б) $(x + 4)^2 = 9$; г) $(x + 2)^2 = 6$.

318. Имеет ли смысл выражение $\sqrt{8 - 5x}$ при $x = -3{,}4$; 0; $1{,}2$; $1{,}6$; $2{,}4$?

319. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
а) $3\sqrt{a}$; б) $-5\sqrt{x}$; в) $\sqrt{8c}$; г) $\sqrt{-10b}$?

320. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{-x}$?

321. Найдите квадрат числа:

$$\sqrt{25};\quad \sqrt{81};\quad \sqrt{2};\quad \sqrt{3};\quad -\sqrt{4};\quad \sqrt{5};\quad -\sqrt{6};\quad \sqrt{\frac{1}{2}};\quad \sqrt{1{,}3}.$$

322. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{7})^2$; в) $-2\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}$; д) $0{,}5(-\sqrt{8})^2$; ж) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

б) $(-\sqrt{26})^2$; г) $(3\sqrt{5})^2$; е) $(-2\sqrt{15})^2$; з) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

323. Вычислите:

а) $0{,}49+2(\sqrt{0{,}4})^2$; в) $(2\sqrt{6})^2+(-3\sqrt{2})^2$;

б) $(3\sqrt{11})^2-\sqrt{6400}$; г) $-0{,}1(\sqrt{120})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)^2$.

324. Вычислите:

а) $(2-\sqrt{5})^2+4\sqrt{5}$; в) $(2-\sqrt{5})^2+(2+\sqrt{5})^2$;

б) $(5+\sqrt{3})^2-10\sqrt{3}$; г) $(5+\sqrt{3})^2+(5-\sqrt{3})^2$.

325. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{6}\cdot(-\sqrt{6})$; в) $\sqrt{1{,}44}-2(\sqrt{0{,}6})^2$;

б) $-(3\sqrt{5})^2$; г) $(0{,}1\sqrt{70})^2+\sqrt{1{,}69}$.

326. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ при $x=-0{,}5$; б) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}$ при $x=-0{,}4$.

П

327. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x-|x-1|}{x+2}$ при x, равном 4; 38; −42;

б) $\dfrac{2|3-x|-1}{4}$ при x, равном 2; 11; −6.

328. Изобразите схематически в одной и той же системе координат графики функций $y=\frac{10}{x}$ и $y = 10x$. Имеют ли эти графики общие точки, и если имеют, то сколько?

13. Нахождение приближённых значений квадратного корня

Рассмотрим, как можно находить приближённые значения арифметического квадратного корня.

Найдём, например, приближённое значение $\sqrt{2}$ с тремя знаками после запятой.

Так как 1^2 меньше 2, а 2^2 больше 2, то число $\sqrt{2}$ заключено между целыми числами 1 и 2 (рис. 13, *а*). Значит, десятичная запись числа $\sqrt{2}$ начинается так:

$$\sqrt{2} = 1,\dots\ .$$

Найдём теперь цифру десятых. Для этого будем возводить в квадрат десятичные дроби 1,1; 1,2; 1,3; ... , пока не получим число, большее двух. Имеем

$$1,1^2 = 1,21;\ 1,2^2 = 1,44;\ 1,3^2 = 1,69;$$
$$1,4^2 = 1,96;\ 1,5^2 = 2,25.$$

Так как $1,4^2$ меньше 2, а $1,5^2$ больше 2, то число $\sqrt{2}$ больше 1,4, но меньше 1,5 (рис. 13, *б*). Значит,

$$\sqrt{2} = 1,4\dots\ .$$

Чтобы найти цифру сотых, будем последовательно возводить в квадрат десятичные дроби 1,41; 1,42; ... . Так как $1,41^2 = 1,9881$, а $1,42^2 = 2,0164$, то число $\sqrt{2}$ больше 1,41 и меньше 1,42 (рис. 13, *в*).

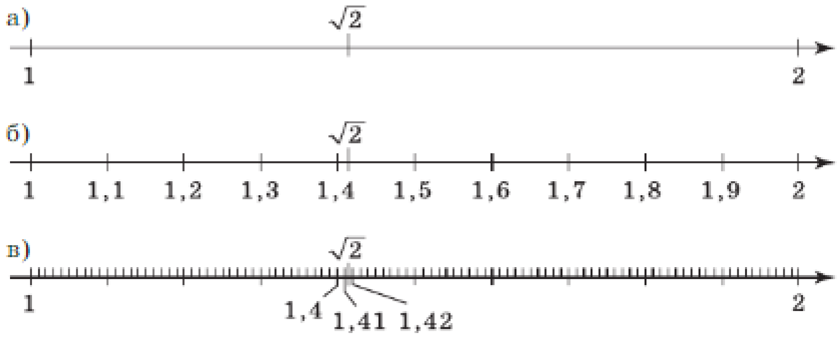


Рис. 13

Значит,

$$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots\ .$$

Продолжая этот процесс, найдём, что десятичная запись числа $\sqrt{2}$ начинается так: 1,414... . Поэтому

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Рассмотренный приём позволяет извлекать арифметический квадратный корень из числа с любой точностью.

В практических расчётах для нахождения приближённых значений квадратных корней используют специальные таблицы или вычислительную технику.

Для извлечения квадратных корней с помощью калькулятора используют клавишу, на которой помещён знак $\sqrt{\ }$.

Упражнения

329. Подберите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{27}$; в) $\sqrt{120}$; д) $\sqrt{0{,}4}$; ж) $\sqrt{167}$;

б) $\sqrt{40}$; г) $\sqrt{9{,}2}$; е) $\sqrt{15}$; з) $\sqrt{288}$.

330. Найдите цифры разрядов единиц, десятых, сотых в десятичной записи иррациональных чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$.

331. Верно ли утверждение:

а) число $\sqrt{5}$ больше 2;

б) число $\sqrt{5{,}2}$ меньше 2;

в) число $\sqrt{170}$ меньше 13;

г) число $\sqrt{39}$ больше числа $\sqrt{38}$?

332. Какое из чисел $\sqrt{1{,}4}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$ $\sqrt{5{,}2}$ отмечено на координатной прямой точкой A; точкой B (рис. 14)?

333. Какое из чисел 0,6; $\frac{142}{29}$; 3; $\sqrt{33}$ отмечено на координатной прямой точкой A (рис. 15)?

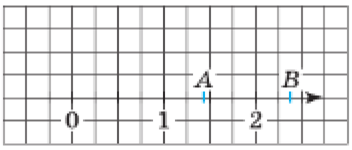


Рис. 14

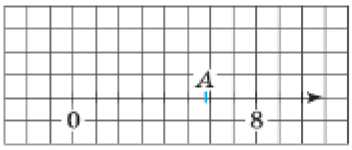


Рис. 15

334. Выберите из отмеченных точек те, которые соответствуют числам $\sqrt{159}$ и $\sqrt{127}$ (рис. 16).

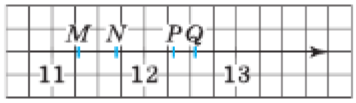


Рис. 16

335. Сравните с нулём значение выражения:

а) $\sqrt{7} - 3$; в) $\sqrt{85} - 4$; д) $15 - \sqrt{225}$;

б) $11 - \sqrt{107}$; г) $19 - \sqrt{326}$; е) $\sqrt{625} - 25$.

336. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{5} - 3}$; б) $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$?

337. Площадь квадрата равна 18 см^2. Найдите с помощью калькулятора его сторону с точностью до 0,1 см.

338. Длина стороны a_8 правильного восьмиугольника, вписанного в круг радиуса R, вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Найдите a_8 с помощью калькулятора (с точностью до 0,1), если: а) R = 9,4 см; б) R = 10,5 см.

339. Свободно падающее тело в безвоздушном пространстве проходит s см за t с, где $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$, g — ускорение свободного падения, $g \approx 10$ м/с^2. Пользуясь калькулятором, вычислите t с точностью до 0,1 с, если:
а) $s = 175$; б) $s = 225$.

340. Время t (с) полного колебания маятника вычисляется по формуле $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l (см) — длина маятника, $g \approx 10$ м/с^2, $\pi \approx 3{,}14$. Найдите t с помощью калькулятора с точностью до 0,1 с, если l равно:

а) 22; б) 126.

341. Решите данные уравнения и укажите те из них, у которых оба корня не превосходят числа 2:

а) $x^2 = 30$; в) $0{,}2x^2 = 3$.
б) $7x^2 = 10$;

342. Вычислите:

а) $3\sqrt{0,16} - 0,1\sqrt{225}$; в) $0,3\sqrt{1,21} \cdot \sqrt{400}$;

б) $0,2\sqrt{900} + 1,8\sqrt{\frac{1}{9}}$; г) $5 : \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,81}$.

343. Найдите значение выражения $x + |x|$, если $x = 7; 10; 0; -3; -8$. Упростите выражение $x + |x|$, если: а) $x \geqslant 0$; б) $x < 0$.

344. Сократите дробь:

а) $\frac{4a^2 - 20a + 25}{25 - 4a^2}$; б) $\frac{9x^2 + 4y^2 - 12xy}{4y^2 - 9x^2}$.

14. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

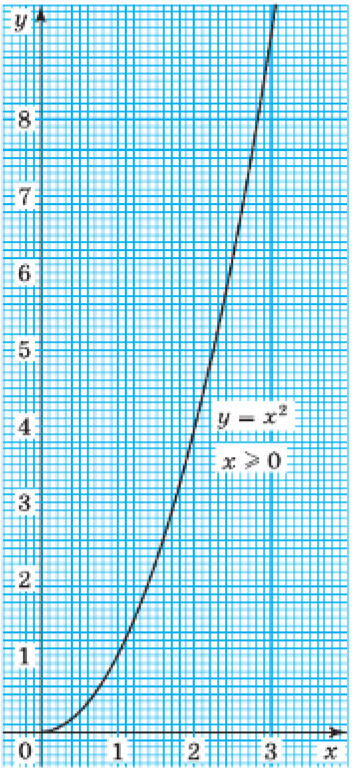


Рис. 17

Пусть длина стороны квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2. Каждому значению длины a стороны квадрата соответствует единственное значение его площади S. Зависимость площади квадрата от длины его стороны выражается формулой $S = a^2$, где $a \geqslant 0$.

Наоборот, для каждого значения площади квадрата S можно указать соответствующее ему единственное значение длины стороны a. Зависимость длины стороны квадрата от его площади выражается формулой $a = \sqrt{S}$.

Формулами

$$S = a^2, \text{ где } a \geqslant 0, \text{ и } a = \sqrt{S}$$

задаются функциональные зависимости между одними и теми же переменными, однако в первом случае независимой переменной является длина a стороны квадрата, а во втором — площадь S.

Если в каждом случае обозначить независимую переменную буквой x, а зависимую переменную буквой y, то получим формулы

$$y = x^2, \text{ где } x \geqslant 0,$$

и

$$y = \sqrt{x}.$$

Мы знаем, что графиком функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, является часть параболы — её правая ветвь (рис. 17). Построим теперь график функции $y = \sqrt{x}$.

Так как выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл при $x \geqslant 0$, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ служит множество неотрицательных чисел.

Составим таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$ (приближённые значения y для значений x, не являющихся квадратами целых чисел, можно найти с помощью калькулятора).

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

Построим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Проведя от начала координат через эти точки плавную линию так, как это показано на рисунке 18, получим график функции $y = \sqrt{x}$.

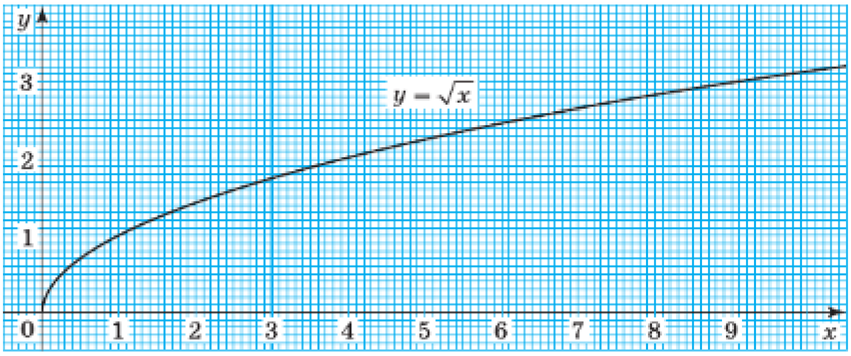


Рис. 18

Сформулируем некоторые *свойства* функции $y = \sqrt{x}$.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$,** поэтому начало координат принадлежит графику функции.
2. **Если $x > 0$, то $y > 0$;** график расположен в первой координатной четверти.
3. **Большему значению аргумента соответствует большее значение функции;** график функции идёт вверх.

Например: $\sqrt{2,6} > \sqrt{1,5}$; $\sqrt{6} > \sqrt{3}$.

График функции $y=\sqrt{x}$, как и график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, представляет собой ветвь параболы. Эти графики симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 19). Доказательство симметрии графиков основано на том, что точки с координатами $(a; b)$ и $(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

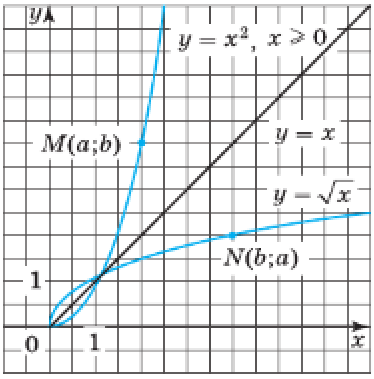


Рис. 19

- Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Тогда верно равенство $b = a^2$. По условию a — неотрицательное число, поэтому $a=\sqrt{b}$. Значит, при подстановке координат точки $N(b; a)$ в формулу $y=\sqrt{x}$ получается верное равенство, т. е. точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y=\sqrt{x}$. Верно и обратное: если некоторая точка принадлежит второму графику, то точка, у которой координатами являются те же числа, но взятые в другом порядке, принадлежит первому графику.

  Таким образом, каждой точке $M(a; b)$ графика функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, соответствует точка $N(b; a)$ графика функции $y=\sqrt{x}$, и наоборот. Так как точки $M(a; b)$ и $N(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$, то и сами графики симметричны относительно этой прямой. ○

Упражнения

345. Площадь круга может быть вычислена по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга, или по формуле $S=\frac{\pi d^2}{4}$, где d — диаметр круга. Задайте формулой зависимость:

а) r от S; б) d от S.

346. Задайте формулой зависимость:

а) площади поверхности куба S от длины его ребра a;
б) длины ребра куба a от площади его поверхности S.

347. Площадь поверхности шара радиуса R вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$. Задайте формулой зависимость R от S.

348. Пользуясь графиком функции $y=\sqrt{x}$, найдите:

а) значение $\sqrt{x}$ при $x = 2{,}5$; $5{,}5$; $8{,}4$;
б) значение x, которому соответствует $\sqrt{x} = 1{,}2$; $1{,}7$; $2{,}5$.

349. С помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ найдите:
а) значение функции при $x = 0{,}5$; $1{,}5$; $6{,}5$; $7{,}2$;
б) значение аргумента, которому соответствует значение $y = 0{,}5$; $1{,}5$; $1{,}8$; $2{,}3$.

350. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точка $A(64;\ 8)$? точка $B(10\ 000;\ 100)$? точка $C(-81;\ 9)$? точка $D(25;\ -5)$?

351. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямая:
а) $y = 1$; в) $y = 100$;
б) $y = 10$; г) $y = -100$?
Если пересекает, то в какой точке?

352. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 0{,}5$ не имеют общих точек.

353. *(Для работы в парах.)* Имеют ли общие точки графики функций:
а) $y = \sqrt{x}$ и $y = x$; в) $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 10$;
б) $y = \sqrt{x}$ и $y = 1000$; г) $y = \sqrt{x}$ и $y = -x + 1{,}5$?
При положительном ответе укажите координаты этих точек.
1) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, верно ли выполнены задания. Исправьте замеченные ошибки.
3) Приведите примеры линейных функций, графики которых: не пересекают график функции $y = \sqrt{x}$; пересекают его в одной точке; пересекают его в двух точках. Обсудите правильность этих примеров.

354. Какой из графиков линейных функций не пересекает графика функции $y = \sqrt{x}$?
1. $y = -x + 2$ 2. $y = -x$
3. $y = -x + 0{,}1$ 4. $y = -x - 0{,}1$

355. Решите графически уравнение:
а) $\sqrt{x} = 6 - x$; б) $\sqrt{x} = \frac{4}{x}$; в) $-x - 5 = \sqrt{x}$.

356. Что больше:
а) $\sqrt{10}$ или $\sqrt{11}$; г) 7 или $\sqrt{50}$; ж) $\sqrt{3}$ или $1{,}8$;
б) $\sqrt{0{,}12}$ или $\sqrt{0{,}15}$; д) $\sqrt{60}$ или 8; з) $\sqrt{28}$ или $5{,}2$;
в) $\sqrt{50}$ или $\sqrt{60}$; е) $\sqrt{2}$ или $1{,}4$; и) 9 или $\sqrt{95}$?

357. Сравните числа:

а) $\sqrt{27}$ и $\sqrt{28}$; г) $\sqrt{6{,}25}$ и $2{,}5$; ж) $\sqrt{0{,}18}$ и $0{,}4$;

б) $\sqrt{1{,}3}$ и $\sqrt{1{,}5}$; д) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ и $\sqrt{\frac{1}{6}}$; з) $\sqrt{\frac{4}{5}}$ и $\sqrt{\frac{5}{6}}$;

в) $\sqrt{7}$ и 3; е) $\sqrt{0{,}8}$ и 1; и) $\sqrt{3{,}5}$ и $\sqrt{3\frac{2}{3}}$.

358. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{2{,}3}$, $\sqrt{16{,}4}$, $\sqrt{19{,}5}$, $\sqrt{0{,}6}$, $\sqrt{0{,}07}$;

б) $\sqrt{0{,}5}$, $\frac{1}{9}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $2\frac{1}{7}$, $\sqrt{2\frac{1}{9}}$.

П

359. Найдите значение выражения:

а) $0{,}5\sqrt{121}+3\sqrt{0{,}81}$; г) $\sqrt{144}\cdot\sqrt{900}\cdot\sqrt{0{,}01}$;

б) $\left(-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2-10\sqrt{0{,}64}$; д) $\left(-\sqrt{\frac{1}{11}}\right)^2-5\sqrt{0{,}16}$;

в) $\sqrt{400}-(4\sqrt{0{,}5})^2$; е) $\left(-6\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2-4\sqrt{0{,}36}$.

360. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{(-9)^2}$; б) $(\sqrt{-9})^2$; в) $-\sqrt{9^2}$; г) $-\sqrt{(-9)^2}$?

361. Решите уравнения:

а) $x^2=11$ и $\sqrt{x}=11$; б) $2x^2=\frac{1}{2}$ и $2\sqrt{x}=\frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа образуют множество действительных чисел?
2. Какие действительные числа можно и какие нельзя представить в виде отношения целого числа к натуральному?
3. Приведите пример бесконечной десятичной дроби, которая является: а) рациональным числом; б) иррациональным числом.
4. Сформулируйте определение арифметического квадратного корня. При каких значениях a выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл?
5. Имеет ли уравнение $x^2=a$ корни при $a>0$, $a=0$, $a<0$, и если имеет, то сколько?
6. Какова область определения функции $y=\sqrt{x}$?
7. Как расположен график функции $y=\sqrt{x}$ в координатной плоскости? Пересекает ли этот график прямую $y=25$; $y=100$; $y=10\ 000$?

§ 5 СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

15. Квадратный корень из произведения и дроби

Сравним значения выражений $\sqrt{81 \cdot 4}$ и $\sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$:

$$\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{324} = 18, \quad \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18.$$

Мы видим, что $\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$. Аналогичным свойством обладает корень из произведения любых двух неотрицательных чисел.

ТЕОРЕМА 1

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

● Каждое из выражений $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{ab}$ имеет смысл, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Покажем, что выполняются два условия:

$$1)\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0; \qquad 2)\ (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Так как выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ принимают лишь неотрицательные значения, то произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ неотрицательно.

Используя свойство степени произведения, получим

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Мы показали, что условия 1 и 2 выполняются. Значит, по определению арифметического квадратного корня при любых неотрицательных значениях a и b верно равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}. \quad ○$$

Доказанная теорема распространяется на случай, когда число множителей под знаком корня больше двух.

Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$. Действительно, $\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$.

Таким образом, арифметический квадратный корень обладает следующим свойством:

> корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

Рассмотрим теперь арифметический квадратный корень из дроби.

ТЕОРЕМА 2

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Проведите доказательство самостоятельно.

Итак, справедливо ещё одно свойство арифметического квадратного корня:

корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя.

Пример 1. Найдём значение выражения $\sqrt{64 \cdot 0{,}04}$.

▶ Воспользуемся теоремой о корне из произведения:

$$\sqrt{64 \cdot 0{,}04} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}04} = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Вычислим значение выражения $\sqrt{32 \cdot 98}$.

▶ Представим подкоренное выражение в виде произведения множителей, каждый из которых является квадратом целого числа, и применим теорему о корне из произведения:

$$\sqrt{32 \cdot 98} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (49 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 49 \cdot 4} = 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56. \quad \triangleleft$$

Пример 3. Найдём значение выражения $\sqrt{\frac{36}{169}}$.

▶ По теореме о корне из дроби имеем

$$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \frac{6}{13}. \quad \triangleleft$$

Поменяв в тождествах $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ местами их левые и правые части, получим

$$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \text{ и } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.}$$

Этими тождествами пользуются при умножении и делении арифметических квадратных корней.

Пример 4. Найдём значение произведения $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$.

▶ Имеем
$$\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{20\cdot 5}=\sqrt{100}=10. \quad \triangleleft$$

Пример 5. Найдём значение частного $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$.

▶ Имеем
$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}}=\sqrt{16}=4. \quad \triangleleft$$

Пример 6. Найдём значение выражения $\sqrt{11\,025}$.

▶ Разложим на простые множители число 11 025:
$$\sqrt{11\,025}=\sqrt{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{49}=3\cdot 5\cdot 7=105. \quad \triangleleft$$

Пример 7. Найдём значение выражения $\sqrt{3\frac{13}{36}}$.

▶ Имеем
$$\sqrt{3\frac{13}{36}}=\sqrt{\frac{121}{36}}=\sqrt{\left(\frac{11}{6}\right)^2}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}. \quad \triangleleft$$

Упражнения

362. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{100\cdot 49}$; в) $\sqrt{64\cdot 121}$; д) $\sqrt{0{,}01\cdot 169}$;

б) $\sqrt{81\cdot 400}$; г) $\sqrt{144\cdot 0{,}25}$; е) $\sqrt{2{,}25\cdot 0{,}04}$.

363. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{25}}$; д) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$;

б) $\sqrt{\frac{36}{25}}$; г) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; е) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

364. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{81\cdot 900}$; б) $\sqrt{0{,}36\cdot 49}$; в) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$.

365. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{9\cdot 64\cdot 0{,}25}$; в) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{196}{9}}$;

б) $\sqrt{1{,}21\cdot 0{,}09\cdot 0{,}0001}$; г) $\sqrt{5\frac{1}{16}\cdot 2\frac{34}{81}}$.

366. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{0{,}04 \cdot 81 \cdot 25}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$;

б) $\sqrt{0{,}09 \cdot 16 \cdot 0{,}04}$; г) $\sqrt{\frac{121}{144} \cdot 2\frac{1}{4}}$.

367. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{810 \cdot 40}$; в) $\sqrt{72 \cdot 32}$; д) $\sqrt{50 \cdot 18}$; ж) $\sqrt{90 \cdot 6{,}4}$;

б) $\sqrt{10 \cdot 250}$; г) $\sqrt{8 \cdot 98}$; е) $\sqrt{2{,}5 \cdot 14{,}4}$; з) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4}$.

368. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{75 \cdot 48}$; б) $\sqrt{45 \cdot 80}$; в) $\sqrt{4{,}9 \cdot 360}$; г) $\sqrt{160 \cdot 6{,}4}$.

369. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; в) $\sqrt{313^2 - 312^2}$; д) $\sqrt{45{,}8^2 - 44{,}2^2}$;

б) $\sqrt{8^2 + 6^2}$; г) $\sqrt{122^2 - 22^2}$; е) $\sqrt{21{,}8^2 - 18{,}2^2}$.

370. Извлеките корень:

а) $\sqrt{17^2 - 8^2}$; в) $\sqrt{82^2 - 18^2}$; д) $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$;

б) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; г) $\sqrt{117^2 - 108^2}$; е) $\sqrt{\left(1\frac{1}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

371. Представьте выражение в виде произведения корней:

а) $\sqrt{15}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{7a}$; г) $\sqrt{3c}$.

372. Представьте выражение в виде частного корней:

а) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{10}}$; в) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; г) $\sqrt{\frac{b}{3}}$.

373. Докажите, что при любом неотрицательном a:

а) $10\sqrt{\frac{a}{100}} = \sqrt{a}$; б) $\sqrt{a} = \frac{1}{10}\sqrt{100a}$.

374. Укажите натуральные значения n, при которых $\sqrt{n^2 - 75}$ является натуральным числом.

375. Используя приближённое равенство $\sqrt{75} \approx 8{,}7$, найдите приближённое значение выражения:

а) $\sqrt{7500}$; б) $\sqrt{750\,000}$; в) $\sqrt{0{,}75}$; г) $\sqrt{0{,}0075}$.

376. Используя свойства квадратного корня и таблицу квадратов на с. 299, найдите значение выражения:

а) $\sqrt{57\,600}$; в) $\sqrt{152\,100}$; д) $\sqrt{20{,}25}$; ж) $\sqrt{0{,}0484}$;

б) $\sqrt{230\,400}$; г) $\sqrt{129\,600}$; е) $\sqrt{9{,}61}$; з) $\sqrt{0{,}3364}$.

377. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{44\,100}$; б) $\sqrt{435\,600}$; в) $\sqrt{0{,}0729}$; г) $\sqrt{15{,}21}$.

378. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; в) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$; д) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; ж) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{4{,}5}$;

б) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; е) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$; з) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{3\frac{1}{3}}$.

379. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; б) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; в) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$; г) $\frac{\sqrt{12\,500}}{\sqrt{500}}$; д) $\frac{\sqrt{7{,}5}}{\sqrt{0{,}3}}$.

380. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$; в) $\sqrt{162}\cdot\sqrt{2}$; д) $\sqrt{110}\cdot\sqrt{4{,}4}$; ж) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$;

б) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$; е) $\sqrt{1\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{0{,}2}$; з) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$.

381. Значение выражения $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ с помощью калькулятора можно вычислить двумя способами: найти значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ и результаты перемножить или заменить произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ выражением $\sqrt{6}$ и затем найти его значение. Каким из этих способов удобнее пользоваться? Выполните вычисления.

П

382. Найдите значение выражения $\sqrt{x^2}$, если $x = -4;\ -3;\ 0;\ 9;\ 20$. При каких значениях x выражение $\sqrt{x^2}$ имеет смысл?

383. Представьте в виде квадрата некоторого выражения:

а) a^4; б) a^6; в) a^{18}; г) $\frac{1}{a^{10}}$; д) a^2b^8; е) $\frac{a^6}{b^{12}}$.

384. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной a см, высота параллелепипеда равна b см, а его объём равен V см^3. Выразите переменную a через b и V.

385. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{5} - \frac{x+18}{6} = 23 + \frac{x}{30}$; б) $\frac{x-1}{3} + \frac{2x+1}{5} = \frac{3x-1}{4}$.

16. Квадратный корень из степени

Найдём значение выражения $\sqrt{x^2}$ при $x = 5$ и при $x = -6$:

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

В каждом из рассмотренных примеров корень из квадрата числа равен модулю этого числа:

$$\sqrt{5^2} = |5|, \quad \sqrt{(-6)^2} = |-6|.$$

ТЕОРЕМА

При любом значении x верно равенство

$$\sqrt{x^2} = |x|. \tag{1}$$

● Рассмотрим два случая: $x \geqslant 0$ и $x < 0$.

Если $x \geqslant 0$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{x^2} = x$.

Если $x < 0$, то $-x > 0$, поэтому $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$.

Мы знаем, что $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Значит, при любом x значение выражения $\sqrt{x^2}$ совпадает со значением выражения $|x|$. ○

Равенство (1) является тождеством. Это тождество применяется при извлечении квадратного корня из степени с чётным показателем. Чтобы извлечь корень из степени с чётным показателем, достаточно представить подкоренное выражение в виде квадрата некоторого выражения и воспользоваться тождеством (1).

Пример 1. Упростим выражение $\sqrt{a^{16}}$.

▶ Представим степень a^{16} в виде $(a^8)^2$ и воспользуемся тождеством (1):

$$\sqrt{a^{16}} = \sqrt{(a^8)^2} = |a^8|.$$

Так как $a^8 \geqslant 0$ при любом a, то $|a^8| = a^8$. Итак, $\sqrt{a^{16}} = a^8$. ◁

Пример 2. Преобразуем выражение $\sqrt{x^{10}}$, где $x < 0$.

▶ Представим x^{10} в виде $(x^5)^2$, получим

$$\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5|.$$

Так как $x < 0$, то $x^5 < 0$, поэтому

$$|x^5| = -x^5.$$

Значит, при $x < 0$

$$\sqrt{x^{10}} = -x^5. \quad \triangleleft$$

Пример 3. Найдём значение выражения $\sqrt{893\,025}$.

▶ Представим число 893 025 в виде произведения простых множителей, получим

$$\sqrt{893\,025} = \sqrt{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{3^6} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} =$$

$$= \sqrt{(3^3)^2} \cdot 5 \cdot 7 = 3^3 \cdot 35 = 27 \cdot 35 = 945. \quad \triangleleft$$

Пример 4. Упростим выражение $\sqrt{(\sqrt{7}-12)^2} + \sqrt{7}$.

▶ Имеем $\sqrt{(\sqrt{7}-12)^2} + \sqrt{7} = |\sqrt{7} - 12| + \sqrt{7} = 12 - \sqrt{7} + \sqrt{7} = 12.$ ◁

Упражнения

386. Вычислите:

а) $\sqrt{(0,1)^2}$; г) $\sqrt{(1,7)^2}$; ж) $2\sqrt{(-23)^2}$;

б) $\sqrt{(-0,4)^2}$; д) $\sqrt{(-19)^2}$; з) $5\sqrt{52^2}$;

в) $\sqrt{(-0,8)^2}$; е) $\sqrt{24^2}$; и) $0,2\sqrt{(-61)^2}$.

387. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{x^2}$ при $x = 22;\ -35;\ -1\frac{2}{3};\ 0$;

б) $2\sqrt{a^2}$ при $a = -7;\ 12$;

в) $0,1\sqrt{y^2}$ при $y = -15;\ 27$.

388. Замените выражение тождественно равным:

а) $\sqrt{p^8}$; б) $\sqrt{y^2}$; в) $3\sqrt{b^2}$; г) $-0,2\sqrt{x^2}$; д) $\sqrt{25a^2}$.

389. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$, если $a > 0$;
б) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$;
в) $3\sqrt{c^2}$, если $c \geqslant 0$;
г) $-5\sqrt{y^2}$, если $y > 0$;
д) $\sqrt{36x^2}$, если $x \leqslant 0$;
е) $-\sqrt{9y^2}$, если $y < 0$;
ж) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x \geqslant 0$;
з) $0{,}5\sqrt{16a^2}$, если $a < 0$.

390. Упростите выражение $\sqrt{a^2-4a+4}$, зная, что:

а) $0 \leqslant a < 2$; б) $a \geqslant 2$.

391. *(Для работы в парах.)* Пользуясь калькулятором, найдите значение выражения $\sqrt{9-6\sqrt{x}+x}$ при x, равном: а) 2,71; б) 12,62.

1) Обсудите, как можно упростить выражение, и выполните намеченное преобразование.
2) Распределите, кто вычисляет значение выражения для случая а), а кто — для случая б), и выполните вычисления.
3) Проверьте друг у друга правильность выполненных преобразований и вычислений.

392. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$?

393. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{3-\sqrt{8}}$.

394. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{2^4}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; г) $\sqrt{10^8}$; д) $\sqrt{(-5)^4}$; е) $\sqrt{(-2)^8}$; ж) $\sqrt{3^4\cdot 5^2}$; з) $\sqrt{2^6\cdot 7^4}$.

395. Вычислите:

а) $\sqrt{11^4}$; б) $\sqrt{4^6}$; в) $\sqrt{(-3)^6}$; г) $\sqrt{(-6)^4}$; д) $\sqrt{2^8\cdot 3^2}$; е) $\sqrt{3^4\cdot 5^6}$; ж) $\sqrt{7^2\cdot 2^8}$; з) $\sqrt{3^6\cdot 5^4}$; и) $\sqrt{8^4\cdot 5^6}$.

396. Извлеките корень, представив подкоренное выражение в виде произведения простых множителей:

а) $\sqrt{20\,736}$; б) $\sqrt{50\,625}$; в) $\sqrt{28\,224}$; г) $\sqrt{680\,625}$.

397. Вычислите:

а) $\sqrt{2304}$; б) $\sqrt{18\,225}$; в) $\sqrt{254\,016}$.

П

398. На рисунке 20 изображены графики функций $y = 2x + 2$, $y = -\frac{x}{4} - 3$ и $y = -2x + 2$. Для каждой функции укажите её график.

399. Объём цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра. Выразите переменную R через V и H.

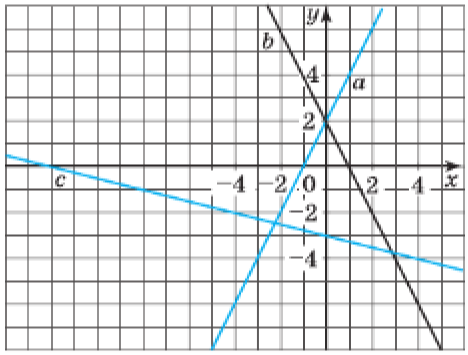


Рис. 20

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из произведения.
2. Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из дроби.
3. Докажите тождество $\sqrt{x^2} = |x|$.
4. Покажите на примере выражения $\sqrt{a^{12}}$, как извлекается квадратный корень из степени с чётным показателем.

§ 6 ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

17. Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня

Сравним значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$. Для этого преобразуем $\sqrt{50}$. Представим число 50 в виде произведения $25 \cdot 2$ и применим теорему о корне из произведения. Получим

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Так как $5\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, то $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.

Чтобы сравнить значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$, мы заменили $\sqrt{50}$ произведением $5\sqrt{2}$. Такое преобразование называют *вынесением множителя из-под знака корня*.

Значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$ можно сравнить иначе, представив произведение $6\sqrt{2}$ в виде арифметического квадратного корня. Для этого число 6 заменим $\sqrt{36}$ и выполним умножение корней.

Получим

$$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{72}.$$

Так как $50 < 72$, то $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Значит,

$$\sqrt{50} < 6\sqrt{2}.$$

При решении задачи вторым способом мы заменили $6\sqrt{2}$ выражением $\sqrt{72}$. Такое преобразование называют *внесением множителя под знак корня*.

Пример 1. Вынесем множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{a^7}$.

▶ Выражение $\sqrt{a^7}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$, так как если $a < 0$, то $a^7 < 0$.

Представим подкоренное выражение a^7 в виде произведения $a^6 \cdot a$, в котором множитель a^6 является степенью с чётным показателем.

Тогда

$$\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} =$$

$$= \sqrt{(a^3)^2} \cdot \sqrt{a} = |a^3| \cdot \sqrt{a} = a^3\sqrt{a}. \ ◁$$

Пример 2. Внесём множитель под знак корня в выражении $-4\sqrt{x}$.

▶ Отрицательный множитель -4 нельзя представить в виде арифметического квадратного корня, и поэтому множитель -4 нельзя внести под знак корня.

Однако выражение $-4\sqrt{x}$ можно преобразовать, внеся под знак корня положительный множитель 4:

$$-4\sqrt{x} = -1 \cdot 4\sqrt{x} = -1 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = -\sqrt{16x}. \ ◁$$

Пример 3. Внесём множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{2}$.

▶ Множитель a может быть любым числом (положительным, нулём или отрицательным). Поэтому рассмотрим два случая:

если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{2} = |a|\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$;

если $a < 0$, то $a\sqrt{2} = -|a|\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$. ◁

Упражнения

400. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt{80}$; д) $\sqrt{125}$; ж) $\sqrt{363}$;

б) $\sqrt{18}$; г) $\sqrt{48}$; е) $\sqrt{108}$; з) $\sqrt{84\,500}$.

401. Вынесите множитель из-под знака корня и упростите полученное выражение:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$; в) $-\frac{1}{7}\sqrt{147}$; д) $0{,}1\sqrt{20\,000}$;

б) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; г) $-\frac{1}{5}\sqrt{275}$; е) $-0{,}05\sqrt{28\,800}$.

402. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{20}$; в) $\sqrt{200}$; д) $0{,}2\sqrt{75}$; ж) $-0{,}125\sqrt{192}$;

б) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{160}$; е) $0{,}7\sqrt{300}$; з) $-\frac{1}{3}\sqrt{450}$.

403. Внесите множитель под знак корня:

а) $7\sqrt{10}$; г) $10\sqrt{y}$; ж) $a\sqrt{x^2}$;

б) $5\sqrt{3}$; д) $3\sqrt{2a}$; з) $m^2\sqrt{m^3}$;

в) $6\sqrt{x}$; е) $5\sqrt{3b}$; и) $3xy^2\sqrt{y}$.

404. Какие из выражений не имеют смысла:

а) $\sqrt{2\sqrt{17}-4}$; д) $\sqrt{\sqrt{11}-3\sqrt{2}}$; и) $\sqrt{-\sqrt{186}+5\sqrt{7}}$;

б) $\sqrt{9-\sqrt{80}}$; е) $\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$; к) $\sqrt{\sqrt{56}-4\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{8\sqrt{3}-14}$; ж) $\sqrt{6\sqrt{3}-7\sqrt{2}}$; л) $\sqrt{\sqrt{42}-6\sqrt{5}}$;

г) $\sqrt{15-2\sqrt{56}}$; з) $\sqrt{\sqrt{186}-5\sqrt{13}}$; м) $\sqrt{\sqrt{72}-6\sqrt{2}}$?

405. Представьте выражение в виде арифметического квадратного корня или выражения, ему противоположного:

а) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; г) $-10\sqrt{0{,}02}$; ж) $-0{,}1\sqrt{1{,}2a}$;

б) $2\sqrt{\frac{3}{4}}$; д) $5\sqrt{\frac{a}{5}}$; з) $-\frac{1}{3}\sqrt{0{,}9a}$;

в) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$; е) $-\frac{1}{2}\sqrt{12x}$; и) $-6\sqrt{6b}$.

406. Замените выражение арифметическим квадратным корнем или выражением, ему противоположным:

а) $2\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{y}$; в) $-7\sqrt{3}$; г) $-6\sqrt{2a}$; д) $\frac{1}{3}\sqrt{18b}$; е) $-0{,}1\sqrt{200c}$.

407. Сравните значения выражений:

а) $3\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$; в) $5\sqrt{4}$ и $4\sqrt{5}$; д) $-\sqrt{14}$ и $-3\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{20}$ и $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}$; е) $-7\sqrt{0{,}17}$ и $-11\sqrt{0{,}05}$.

408. Сравните значения выражений:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{351}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{188}$; в) $\sqrt{24}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{216}$;

б) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ и $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$ и $7\sqrt{\frac{2}{3}}$.

409. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{11}$;

б) $6\sqrt{2}$, $\sqrt{58}$, $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$, $5\sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{11}$, $-2\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $-2\sqrt{6}$, $-\sqrt{51}$;

г) $-\sqrt{83}$, $-9\sqrt{2}$, $-\sqrt{17}$, $-5\sqrt{8}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

410. *(Задача-исследование.)* Проверьте, верны ли равенства

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \sqrt{3\frac{2}{3}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}},\quad \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

Выясните, каким должно быть соотношение между числами a и b, чтобы было верно равенство $\sqrt{a+\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a \in \boldsymbol{N}$ и $b \in \boldsymbol{N}$.

1) Возведите в квадрат обе части равенства.
2) Установите, каким должно быть соотношение между числами a и b.
3) Проиллюстрируйте правильность вашего вывода на примерах.

411. *(Для работы в парах.)* Площадь треугольника S см^2 со сторонами a см, b см и c см можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника.
Найдите площадь треугольника, стороны которого равны:
а) 12 см, 16 см, 24 см; б) 18 см, 22 см, 26 см.
(Можете воспользоваться калькулятором.)
1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните вычисления.
2) Проверьте друг у друга правильность вычислений.
3) Обсудите, как изменится площадь треугольника, если каждую из его сторон увеличить в 2 раза. Выскажите предположение и выполните необходимые преобразования.

П

412. В школьной мастерской учащиеся за три дня переплели 144 книги. Сколько книг было переплетено в каждый из трёх дней, если известно, что во второй день учащиеся переплели на 12 книг больше, чем в первый, а в третий — $\frac{5}{7}$ числа книг, переплетённых в первый и во второй дни вместе?

413. Решите уравнение:

а) $\frac{4x-1}{12} + \frac{7}{4} = \frac{5-x}{9}$; б) $\frac{2x-9}{6} - \frac{2(5x+3)}{15} = \frac{1}{2}$.

18. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Мы рассмотрели ряд преобразований выражений, содержащих квадратные корни. К ним относятся преобразования корней из произведения, дроби и степени, умножение и деление корней, вынесение множителя из-под знака корня, внесение множителя под знак корня. Рассмотрим другие примеры преобразований выражений, содержащих квадратные корни.

Пример 1. Упростим выражение $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$.

▶ Вынесем из-под знака корня в выражении $\sqrt{20a}$ число 2, а в выражении $\sqrt{45a}$ число 3. Получим

$$3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} = 3\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a} + 12\sqrt{5a} =$$

$$= \sqrt{5a}(3 - 2 + 12) = 13\sqrt{5a}. \quad ◁$$

Заменив сумму $3\sqrt{5a}-2\sqrt{5a}+12\sqrt{5a}$ выражением $13\sqrt{5a}$, мы выполнили приведение подобных слагаемых. Запись можно вести короче, не выписывая промежуточный результат.

Пример 2. Сократим дробь $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$.

▶ Так как $3=(\sqrt{3})^2$, то числитель данной дроби можно представить в виде разности квадратов двух выражений. Поэтому

$$\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}=\frac{x^2-(\sqrt{3})^2}{x+\sqrt{3}}=\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}}=x-\sqrt{3}.\ \triangleleft$$

Пример 3. Преобразуем дробь $\frac{c}{\sqrt{2}}$ так, чтобы знаменатель не содержал квадратного корня.

▶ Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{c\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{c\sqrt{2}}{2}.\ \triangleleft$$

Мы заменили дробь $\frac{c}{\sqrt{2}}$ тождественно равной дробью $\frac{c\sqrt{2}}{2}$, не содержащей в знаменателе знака корня. В таких случаях говорят, что мы *освободились от иррациональности* в знаменателе дроби.

Пример 4. Выясним, между какими последовательными целыми числами заключено значение выражения $\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$.

▶ Освободимся от иррациональности в знаменателе дроби. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{6}+1$. Получим

$$\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}=\frac{(4-3\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\frac{4\sqrt{6}-3(\sqrt{6})^2+4-3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-3\cdot 6+4}{6-1}=\frac{\sqrt{6}-14}{5}.$$

Так как $2<\sqrt{6}<3$, то $-12<\sqrt{6}-14<-11$, значит,

$$-2{,}4<\frac{\sqrt{6}-14}{5}<-2{,}2.$$

Получаем

$$-3<\frac{\sqrt{6}-14}{5}<-2.\ \triangleleft$$

Упражнения

414. Упростите выражение:

а) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{300}$;

б) $3\sqrt{8}-\sqrt{50}+2\sqrt{18}$;

в) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{8}$;

г) $\sqrt{75}-0{,}1\sqrt{300}-\sqrt{27}$;

д) $\sqrt{98}-\sqrt{72}+0{,}5\sqrt{8}$.

415. Упростите выражение:

а) $\sqrt{8p}-\sqrt{2p}+\sqrt{18p}$;

б) $\sqrt{160c}+2\sqrt{40c}-3\sqrt{90c}$;

в) $5\sqrt{27m}-4\sqrt{48m}-2\sqrt{12m}$;

г) $\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{150}$;

д) $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$;

е) $2\sqrt{72}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}$.

416. Выполните действия, используя формулы сокращённого умножения:

а) $(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$;

б) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

в) $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)$;

г) $(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{10})$;

д) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$;

е) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$;

ж) $(\sqrt{2}+3)^2$;

з) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

417. Выполните действия:

а) $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)$;

б) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$;

в) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$;

г) $(1+3\sqrt{5})^2$;

д) $(2\sqrt{3}-7)^2$;

е) $(2\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$.

418. Выполните действия:

а) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$.

419. Преобразуйте выражение:

а) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$;

б) $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$;

в) $(\sqrt{m}+\sqrt{2})^2$;

г) $(\sqrt{3}-\sqrt{x})^2$;

д) $(5\sqrt{7}-13)(5\sqrt{7}+13)$;

е) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$;

ж) $(6-\sqrt{2})^2+3\sqrt{32}$;

з) $(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2-30$.

420. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов:

а) x^2-7;

б) $5-c^2$;

в) $4a^2-3$;

г) $11-16b^2$;

д) $y-3$, где $y\geqslant 0$;

е) $x-y$, где $x>0$ и $y>0$.