986. Решите систему неравенств и укажите все целые числа, которые являются её решениями:

а) $\begin{cases} 3-2a<13, \\ 5a<17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2-6y<14, \\ 1<21-5y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12-6x\leqslant 0, \\ 3x+1\leqslant 25-x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3-4x<15, \\ 1-2x>0. \end{cases}$

987. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ 7{,}2-y\geqslant 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6-4b>0, \\ 3b-1>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12a-37>0, \\ 6a\leqslant 42; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3-18x<0, \\ 0{,}2-0{,}1x>0. \end{cases}$

988. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2{,}5a-0{,}5(8-a)<a+1{,}6, \\ 1{,}5(2a-1)-2a<a+2{,}9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}7(5a+1)-0{,}5(1+a)<3a, \\ 2a-(a-1{,}7)>6{,}7. \end{cases}$

989. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}<7, \\ 1-\dfrac{x}{6}>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-x\leqslant 2, \\ 2x-\dfrac{x}{3}\geqslant 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-\dfrac{y-1}{2}>1, \\ \dfrac{y}{3}<5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2p-\dfrac{p-2}{5}>4, \\ \dfrac{p}{2}-\dfrac{p}{8}\leqslant 6. \end{cases}$

990. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-3}{3}<2, \\ \dfrac{13x-1}{2}>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4-\dfrac{y-1}{3}\geqslant y, \\ \dfrac{7y-1}{8}\geqslant 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{2}<-1, \\ \dfrac{x}{2}-1<x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{5a+8}{3}-a\geqslant 2a, \\ 1-\dfrac{6-15a}{4}\geqslant a. \end{cases}$

991. Решите двойное неравенство:

а) $-3<2x-1<3$; в) $2<6-2y<5$;
б) $-12<5-x<17$; г) $-1<5y+4<19$.

992. Решите двойное неравенство и укажите три числа, являющиеся его решениями:

а) $-6{,}5 < \frac{7x+6}{2} \leqslant 20{,}5$; в) $-2 \leqslant \frac{3x-1}{8} \leqslant 0$;

б) $-1 < \frac{4-a}{3} \leqslant 5$; г) $-2{,}5 \leqslant \frac{1-3y}{2} \leqslant 1{,}5$.

993. Решите двойное неравенство:

а) $-1 \leqslant 15x + 14 < 44$; в) $-1{,}2 < 1 - 2y < 2{,}4$;

б) $-1 \leqslant \frac{6-a}{3} \leqslant 1$; г) $-2 < \frac{4x-1}{3} \leqslant 0$.

994. а) При каких y значения двучлена $3y - 5$ принадлежат промежутку $(-1; 1)$?

б) При каких b значения дроби $\frac{5-2b}{4}$ принадлежат промежутку $[-2; 1]$?

995. При каких значениях a уравнение

$$x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$$

имеет два корня, принадлежащие промежутку $(-6; 6)$?

996. При каких значениях b уравнение

$$x^2 - 6bx + 9b^2 - 16 = 0$$

имеет два отрицательных корня?

997. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 8, \\ x > 7, \\ x > -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < -1, \\ y < -5, \\ y < 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m > 9, \\ m > 10, \\ m < 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} q < 6, \\ q < 5, \\ q < 1. \end{cases}$

998. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x - 4 < 8, \\ 2x + 5 < 13, \\ 3 - x > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 < x + 3, \\ 5x - 1 > 6 - 2x, \\ x - 5 < 0. \end{cases}$

999. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3 - 2a < 13, \\ a - 1 > 0, \\ 5a - 35 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6 - 4a < 2, \\ 6 - a > 2, \\ 3a - 1 < 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5a - 8 > 7, \\ 4 - a < 3, \\ 2 - 3a > 10. \end{cases}$

П

1000. Укажите допустимые значения переменной:

а) $\dfrac{\sqrt{12-25x}}{6}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{5x-11}}$; в) $\dfrac{4x}{\sqrt{(3x-2)^2}}$.

1001. Найдите все натуральные значения n, при которых значение дроби $\dfrac{9n^2+12n+12}{n}$ — натуральное число.

1002. а) Выразите переменную h через S и a, если $S=\frac{1}{2}ah$.

б) Выразите переменную p через s и m, если $\frac{s}{p}=0{,}5m$.

в) Выразите переменную t через s и a, если $s=\frac{at^2}{2}$ и $t>0$.

1003. Велосипедист проехал 20 км по дороге, ведущей в гору, и 60 км по ровной местности, затратив на весь путь 6 ч. С какой скоростью ехал велосипедист на каждом участке пути, если известно, что в гору он ехал со скоростью, на 5 км/ч меньшей, чем по ровной местности?

Контрольные вопросы и задания

1 Что называется пересечением двух множеств? объединением двух множеств?

2 Изобразите на координатной прямой известные вам виды числовых промежутков. Назовите и обозначьте их.

3 Что называется решением неравенства? Является ли решением неравенства $3x-11>1$ число 5? число 2? Что значит решить неравенство?

4 Что называется решением системы неравенств? Является ли решением системы неравенств $\begin{cases}2x+1>3,\\3x<10\end{cases}$ число 3? число 5? Что значит решить систему неравенств?

Для тех, кто хочет знать больше

41. Доказательство неравенств

Один из приёмов доказательства неравенств состоит в том, что составляют разность левой и правой частей неравенства и показывают, что она сохраняет знак при любых указанных значениях переменных. Этот приём вам уже приходилось применять в простых случаях. Покажем его применение на более сложном примере.

Пример 1. Докажем, что

$$2\sqrt{a+1} > \sqrt{a} + \sqrt{a+2} \text{ при } a \geqslant 0.$$

▶ Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:

$$2\sqrt{a+1} - \sqrt{a} - \sqrt{a+2} = (\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}).$$

Для того чтобы оценить составленную разность, каждое из выражений, записанных в скобках, представим в виде дроби со знаменателем 1 и освободимся от иррациональности в её числителе. Получим

$$(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}) = \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{1} + \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}}{1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2})(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2})}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}}.$$

Так как функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей, то знаменатель первой дроби меньше, чем знаменатель второй, т. е. первая дробь больше второй. Следовательно, разность дробей является положительной. Заданное неравенство доказано. ◁

Ещё один приём доказательства неравенств состоит в том, чтобы показать, что данное неравенство следует из других неравенств, справедливость которых известна.

Пример 2. Докажем, что

$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geqslant 8a^2b^2c^2$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

▶ Из соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел следует, что при указанных значениях переменных

$$\frac{a^2 + bc}{2} \geqslant \sqrt{a^2bc}, \quad \frac{b^2 + ac}{2} \geqslant \sqrt{b^2ac}, \quad \frac{c^2 + ab}{2} \geqslant \sqrt{c^2ab}.$$

Перемножив эти неравенства, получим, что

$$\frac{a^2 + bc}{2} \cdot \frac{b^2 + ac}{2} \cdot \frac{c^2 + ab}{2} \geqslant \sqrt{a^4b^4c^4}.$$

Отсюда

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geqslant 8a^2b^2c^2.$$

Неравенство доказано. ◁

В отдельных случаях удаётся доказать неравенство, используя некоторые очевидные соотношения. В качестве таких очевидных соотношений могут быть взяты, например, такие: $(1 + a)^2 > 1 + 2a$ при любом a, не равном нулю, $\frac{1}{c+1} < \frac{1}{c}$ при $c > 0$, $\sqrt{x+2} > \sqrt{x+1}$ при $x \geqslant -1$ и т. п.

Пример 3. Докажем, что двойное неравенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

верно при любом $x \geqslant 1$.

▶ Заменим разности $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ соответственно равными им дробями $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ и $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$. Тогда данное неравенство примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Так как $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$ при $x \geqslant 1$, то

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} > \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

т. е. $$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Неравенство доказано. ◁

Пример 4. Докажем, что при любом натуральном $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

▶ Очевидно, что при любом натуральном $n > 1$ верны следующие неравенства:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n},\quad \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n},\quad \ldots,\quad \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}.$$

Складывая почленно эти неравенства и прибавляя к левой и правой частям полученного неравенства по $\frac{1}{2n}$, будем иметь

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

Неравенство доказано. ◁

Упражнения

1004. Докажите неравенство:

а) $a^2+b^2+4 \geqslant 2(a+b+1)$; б) $4a^2+b^2>4(a+b-2)$.

1005. Докажите, что если $x>0$ и $y>0$, то:

а) $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; б) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geqslant x+y$.

1006. Докажите, что при $a>0$ и $b>0$ верно неравенство:

а) $(a+b)(ab+16)\geqslant 16ab$; б) $(a^2+4b)(4b+25)\geqslant 80ab$.

1007. Докажите, что:

а) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geqslant 6$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;

б) $(1+a)(1+b)(1+c)>24$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $abc=9$.

1008. Докажите, что куб полусуммы любых двух положительных чисел не превосходит полусуммы их кубов.

1009. Докажите, что

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd},$$

если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

1010. Докажите, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ верно неравенство

$$\frac{3}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

1011. Докажите, что если $x + y + z = 1$, то

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leqslant 5.$$

1012. Докажите, что при любом a, большем 1, верно неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

1013. Велосипедист рассчитал, с какой скоростью он должен ехать из посёлка в город и обратно, чтобы, пробыв в городе полчаса, вернуться в посёлок к намеченному сроку. Однако на пути из посёлка в город он ехал со скоростью, на 2 км/ч меньшей намеченной, а спустя полчаса возвращался из города в посёлок со скоростью, на 2 км/ч большей намеченной. Успел ли велосипедист вернуться в посёлок к назначенному сроку?

Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 11

1014. Докажите неравенство:

а) $(6y - 1)(y + 2) < (3y + 4)(2y + 1)$;
б) $(3y - 1)(2y + 1) > (2y - 1)(2 + 3y)$.

1015. Докажите неравенство:

а) $(x + 1)^2 \geqslant 4x$; в) $4(x + 2) < (x + 3)^2 - 2x$;
б) $(3b + 1)^2 > 6b$; г) $1 + (m + 2)^2 > 3(2m - 1)$.

1016. Верно ли неравенство:

а) $\sqrt{7} + 2\sqrt{5} < 2 + \sqrt{35}$; б) $4\sqrt{6} + 2 > 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$?

1017. Докажите неравенство:

а) $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2(a + b)$;
б) $a^2 + b^2 + c^2 + 5 > 2(a + b + c)$.

1018. а) Докажите, что при $a > 3$ значение выражения

$$\left(\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3}\right)\left(1 + \frac{3}{a}\right)$$

отрицательно.

б) Докажите, что при $y > 1$ значение выражения

$$\frac{y^2+3}{y-1} - \frac{2}{y} : \left(\frac{1}{y^2-y} + \frac{y-3}{y^2-1}\right)$$

положительно.

1019. В каком случае катер затратит больше времени: если он пройдёт 20 км по течению реки и 20 км против течения или если он пройдёт 40 км в стоячей воде?

1020. (*Задача-исследование.*) Моторная лодка прошла в один день некоторое расстояние по течению реки и вернулась обратно. В другой день она прошла такое же расстояние по течению более быстрой реки и также вернулась обратно. В какой из дней лодка затратила на весь путь больше времени?
1) Выскажите предположение об ожидаемом ответе.
2) Введите обозначения:
x км/ч — скорость лодки в стоячей воде;
y км/ч и z км/ч — скорости течения первой и второй рек;
s км — расстояние, на которое отплывала лодка.
3) Запишите формулы для вычисления времени t_1 ч и t_2 ч, затраченного лодкой на весь путь в каждый из дней.
4) Найдите разность $t_1 - t_2$ и, оценив её, ответьте на вопрос задачи.
5) Подтвердилось ли ваше предположение?

1021. Велосипедисты Смирнов и Антонов отправились одновременно из посёлка в город и, пробыв в городе одинаковое время, вернулись в посёлок. Смирнов в город и обратно ехал со скоростью 15 км/ч, а Антонов в город ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем Смирнов, а возвращался со скоростью, на 1 км/ч меньшей, чем Смирнов. Кто из велосипедистов вернулся в посёлок раньше?

1022. Докажите, что полупериметр треугольника больше длины каждой из его сторон.

1023. Сравните площадь квадрата с площадью произвольного прямоугольника, имеющего тот же периметр.

1024. Используя выделение из трёхчлена квадрата двучлена, докажите неравенство:
а) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
б) $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$.

1025. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ верно неравенство:

а) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$; б) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

1026. Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, докажите, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ верно неравенство:

а) $ac + \frac{b}{c} \geqslant 2\sqrt{ab}$; б) $\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geqslant 8$.

1027. *Старинная задача (из книги «Начала» Евклида).* Докажите, что если a — наибольшее число в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где a, b, c, d — положительные числа, то верно неравенство

$$a + d > b + c.$$

1028. Известно, что $12 \leqslant y \leqslant 16$. Оцените значение выражения:

а) $-0{,}5y$; б) $42 - 2y$; в) $\frac{1}{y} + 2$.

1029. Оцените значение выражения:

а) $a + 2b$, если $0 < a < 1$ и $-3 < b < -2$;

б) $\frac{1}{2}a - b$, если $7 < a < 10$ и $14 < b < 15$.

1030. Оцените длину средней линии треугольника ABC, которая параллельна стороне AB, если $10{,}4 < AB < 10{,}5$.

1031. Оцените длину средней линии трапеции с основаниями a см и c см, если $3{,}4 \leqslant a \leqslant 3{,}5$ и $6{,}2 \leqslant c \leqslant 6{,}3$.

К параграфу 12

1032. а) Принадлежит ли промежутку [8; 41) число 40,9? Можно ли указать число, большее чем 40,9, принадлежащее этому промежутку?

б) Существует ли в промежутке [8; 41) наибольшее число; наименьшее число?

1033. а) Принадлежит ли промежутку (7; 17] число 7,01? Можно ли указать число, меньшее чем 7,01, принадлежащее этому промежутку?

б) Существует ли в промежутке (7; 17] наименьшее число; наибольшее число?

1034. Укажите, если это возможно, наименьшее и наибольшее числа, принадлежащие промежутку:

а) [12; 37]; б) [8; 13); в) (11; 14); г) (3; 19].

1035. Верно ли, что:

а) $(-5; 5) \cap (-3; 2) = (-3; 2)$;

б) $(4; 11) \cup (0; 6) = (4; 6)$;

в) $(-\infty; 4) \cup (1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$;

г) $(-\infty; 2) \cap (-2; +\infty) = (-2; 2)$?

1036. Найдите пересечение и объединение:
а) множества целых чисел и множества положительных чисел;
б) множества простых чисел и множества нечётных натуральных чисел.

1037. Является ли число $\sqrt{19}$ решением неравенства $x < 5$? Укажите какое-нибудь число, большее $\sqrt{19}$, удовлетворяющее этому неравенству.

1038. Является ли число $\sqrt{11}$ решением неравенства $x > 3$? Укажите какое-нибудь число, меньшее $\sqrt{11}$, удовлетворяющее этому неравенству.

1039. Решите неравенство:
а) $0{,}01(1 - 3x) > 0{,}02x + 3{,}01$;
б) $12(1 - 12x) + 100x > 36 - 49x$;
в) $(0{,}6y - 1) - 0{,}2(3y + 1) < 5y - 4$;
г) $\frac{2}{3}(6x + 4) - \frac{1}{6}(12x - 5) \leqslant 4 - 6x$;
д) $(3a + 1)(a - 1) - 3a^2 > 6a + 7$;
е) $15x^2 - (5x - 2)(3x + 1) < 7x - 8$.

1040. При каких значениях a верно неравенство:
а) $\frac{a-1}{4} - 1 > \frac{a+1}{3} + 8$; в) $\frac{1-2a}{4} - 2 < \frac{1-5a}{8}$;
б) $\frac{3a-1}{2} - \frac{a-1}{4} > 0$; г) $\frac{5a}{6} - \frac{3a-1}{3} + \frac{2a-1}{2} < 1$?

1041. Решите неравенство:
а) $\frac{x-0{,}5}{4} + \frac{x-0{,}25}{4} + \frac{x-0{,}125}{8} < 0$; б) $\frac{5-x}{3} - \frac{1-x}{2} > 1$.

1042. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству:
а) $3(5 - 4x) + 2(14 + x) > 0$; б) $(x + 1)(x - 1) - (x^2 - 3x) \leqslant 14$.

1043. При каких значениях x:
а) значение дроби $\frac{3x-8}{12}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{x-1}{4}$;
б) значение дроби $\frac{x+1}{3}$ меньше соответствующего значения дроби $\frac{2x+3}{6}$?

1044. Решите неравенство:

а) $2(4y - 1) - 5y < 3y + 5$;
б) $6(1 - y) - 8(3y + 1) + 30y > -5$.

1045. Найдите, при каких значениях a уравнение имеет положительный корень:

а) $3x = 9a$; в) $x - 8 = 3a + 1$;
б) $x + 2 = a$; г) $2x - 3 = a + 4$.

1046. Найдите, при каких значениях b уравнение имеет отрицательный корень:

а) $10x = 3b$; в) $3x - 1 = b + 2$;
б) $x - 4 = b$; г) $3x - 3 = 5b - 2$.

1047. При каких значениях m верно равенство:

а) $|2m - 16| = 2m - 16$; в) $|m + 6| = -m - 6$;

б) $\frac{|12-6m|}{12-6m} = 1$; г) $\frac{|10m-35|}{10m-35} = -1$?

1048. Найдите промежутки, в которых функция $y = -6x + 12$ принимает положительные значения; отрицательные значения. Ответ проиллюстрируйте на графике.

1049. Со склада вывозят болванки: железные массой по 500 кг и медные массой по 200 кг. На грузовик, который может везти не более 4 т, погрузили 12 болванок. Сколько среди них может быть железных болванок?

1050. С турбазы в город, отстоящий на расстояние 24 км, вышел первый турист со скоростью 4 км/ч. Спустя 2 ч вслед за ним отправился второй турист. С какой скоростью должен идти второй турист, чтобы догнать первого до его прихода в город?

1051. От деревни до фермы 20 км, а от фермы до станции 40 км (рис. 48). С фермы по направлению к станции выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно из деревни на станцию через ферму по той же дороге отправился мотоциклист. С какой скоростью должен ехать мотоциклист, чтобы догнать велосипедиста до его приезда на станцию?

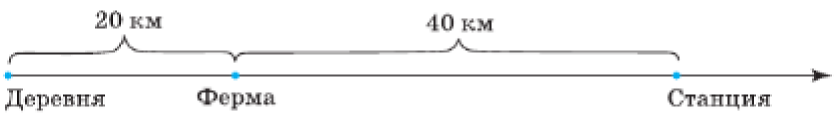


Рис. 48

1052. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а его периметр не превосходит 46 см. Какова длина боковой стороны треугольника, если известно, что она выражается целым числом сантиметров?

1053. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0,3x - 1 < x + 0,4, \\ 2 - 3x < 5x + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2,5x - 0,12 > 0,6x + 0,07, \\ 1 - 2x > -x - 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 1,4 < \frac{3x - 7}{5}, \\ 2x > 3 - \frac{2x}{5}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3(x - 2)(x + 2) - 3x^2 < x, \\ 5x - 4 > 4 - 5x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x - 4)(5x - 1) - 5x^2 > x + 1, \\ 3x - 0,4 < 2x - 0,6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 1 + \frac{1 + x}{3} > \frac{2x - 1}{6} - 2, \\ 3x - \frac{x}{4} > 4. \end{cases}$

1054. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6x(x - 1) - 3x(2x - 1) < x, \\ 0,5x - 3,7 < 0,2x - 0,7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,7x - 3(0,2x + 1) \leqslant 0,5x + 1, \\ 0,3(1 - x) + 0,8x \geqslant x + 5,3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{3}(3x - 2) + \frac{1}{6}(12x + 1) > 0, \\ \frac{1}{7}(14x - 21) + \frac{2}{9}(9x - 6) < 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0,2(5x - 1) + \frac{1}{3}(3x + 1) < x + 5,8, \\ 8x - 7 - \frac{1}{6}(6x - 2) > x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{z - 1}{2} - \frac{z - 4}{3} > 2z - 1, \\ 2z - \frac{z - 5}{3} > 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3y - \frac{1 + 5y}{4} < y, \\ \frac{4 - y}{5} - y - 1 < 0. \end{cases}$

1055. Решите двойное неравенство:

а) $-9 < 3x < 18$;   в) $3 \leqslant 5x - 1 \leqslant 4$;

б) $1 < \frac{2x - 1}{2} < 2$;   г) $0 \leqslant \frac{1 - x}{3} \leqslant 1$.

1056. а) При каких x значение выражения $2x - 4$ принадлежит интервалу $(-1; 5)$?

б) При каких x значение дроби $\frac{x-5}{2}$ принадлежит числовому отрезку $[0; 5]$?

в) При каких x значения функции $y=-\frac{1}{3}x+8$ принадлежат интервалу $(-1; 1)$?

г) При каких x значения функции $y = -2{,}5x + 6$ принадлежат числовому отрезку $[-6; -2]$?

1057. Найдите положительные значения y, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3(y-1)-4(y+8)<5(y+5), \\ 1{,}2(1+5y)-0{,}2<5(1-3y)-3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 15(y-4)-14(y-3)<y(y-9)-y^2, \\ \frac{5-y}{3}-y>14-\frac{2-y}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (2y-1)(3y+2)-6y(y-4)<48, \\ \frac{y-1}{8}-\frac{6y+1}{4}-1<0. \end{cases}$

1058. Найдите отрицательные значения y, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{5y-1}{6}-\frac{2y-1}{2}>0, \\ 1-\frac{y+4}{3}<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (y+6)(5-y)+y(y-1)>0, \\ 0{,}3y(10y+20)-3y^2+30>0. \end{cases}$

1059. При каких значениях a уравнение

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - 25 = 0$$

имеет два корня, каждый из которых больше 2?

1060. При каких значениях b уравнение

$$x^2 - (2b - 2)x + b^2 - 2b = 0$$

имеет два корня, принадлежащие интервалу $(-5; 5)$?

1061. Если туристы будут проходить в день на 5 км больше, чем сейчас, то они пройдут за 6 дней расстояние, большее 90 км. Если же они будут проходить в день на 5 км меньше, то за 8 дней они пройдут расстояние, меньшее 90 км. Сколько километров в день проходят туристы?

1062. Первую половину пути поезд прошёл со скоростью 60 км/ч, а затем увеличил скорость. Какой могла быть скорость поезда во второй половине пути, если известно, что его средняя скорость на всём участке не превышала 72 км/ч?

Глава V ФУНКЦИИ

Функция — одно из важнейших понятий математики. Первое представление об этом понятии вы получили при изучении алгебры в 7 классе. Теперь знания о функциях будут расширены: вы рассмотрите общие свойства функций, изучите некоторые конкретные виды функций, познакомитесь с новыми понятиями, при этом особое внимание будет уделено понятиям возрастающей и убывающей функций. Новый материал будет излагаться с опорой на графики функций.

§ 13 ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

42. Функция. Область определения и множество значений функции

Напомним, что означает термин *функция*:

> функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*. Переменную y называют *зависимой переменной*. Говорят также, что *переменная y является функцией от переменной x*. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*.

Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то коротко это записывают так: $y = f(x)$ (читают: «y равно f от x»). Символом $f(x)$ обозначают также значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x.

Пусть, например, функция задана формулой $y = 2x^2 - 6$. Тогда можно записать, что $f(x) = 2x^2 - 6$.

Найдём значения функции f для значений x, равных 2,5 и −3:

$$f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5^2 - 6 = 6{,}5;$$
$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 - 6 = 12.$$

Заметим, что в записи вида $y = f(x)$ вместо f употребляют и другие буквы: g, φ и т. п.

Все значения независимой переменной образуют *область определения функции*. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество значений функции*. Область определения функции принято обозначать символом $D(f)$, а множество значений функции — символом $E(f)$.

Функция $y = f(x)$ считается заданной, если указана область определения функции и правило, согласно которому каждому значению независимой переменной ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной. Если функция $y = f(x)$ задана формулой и её область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Например, областью определения функции $f(x) = 5x + x^2$ является множество всех чисел; областью определения функции $g(x) = \frac{2}{x+3}$ служит множество всех чисел, кроме −3.

Область определения функции, описывающей реальный процесс, зависит от конкретных условий его протекания.

Например, зависимость длины l железного стержня от температуры нагревания t выражается формулой $l = l_0(1 + at)$, где l_0 — начальная длина стержня, а a — коэффициент линейного расширения. Указанная формула имеет смысл при любых значениях t. Однако областью определения функции $l = f(t)$ является промежуток в несколько десятков градусов, для которого справедлив закон линейного расширения.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

На рисунке 49 изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок $[-3;\ 7]$. С помощью графика можно найти, например, что $f(-3) = -2$, $f(0) = 2{,}5$, $f(2) = 4$, $f(5) = 2$. Наименьшее значение функции равно −2, а наибольшее равно 4, при этом любое число от −2 до 4 является значением данной функции.

Таким образом, множеством значений функции $y = f(x)$ служит отрезок $[-2;\ 4]$.

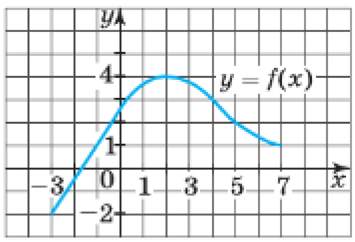


Рис. 49

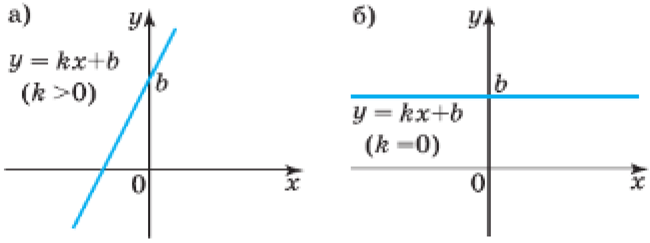


Рис. 50

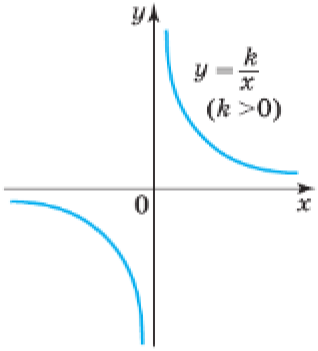


Рис. 51

Ранее были рассмотрены некоторые виды функций:
линейная функция, т. е. функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа;
прямая пропорциональность — частный случай линейной функции, она задаётся формулой $y = kx$, где $k \neq 0$;
обратная пропорциональность — функция $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

Графиком функции $y = kx + b$ служит прямая (рис. 50, *а*). Областью определения этой функции является множество всех чисел. Множество значений этой функции при $k \neq 0$ есть множество всех чисел, а при $k = 0$ её множество значений состоит из одного числа b (рис. 50, *б*).

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. На рисунке 51 изображён график функции $y = \frac{k}{x}$ для $k > 0$. Область определения этой функции есть множество всех чисел, кроме нуля. Это же множество является и множеством её значений.

Функциями такого вида описываются многие реальные процессы и закономерности.

Например, прямой пропорциональностью является зависимость массы тела m от его объёма V при постоянной плотности ρ ($m = \rho V$), зависимость длины окружности C от её радиуса R ($C = 2\pi R$).

Обратной пропорциональностью является зависимость силы тока I на участке цепи от сопротивления проводника R при постоянном напряжении U $\left(I = \frac{U}{R}\right)$, зависимость времени t, которое затрачивает равномерно движущееся тело на прохождение заданного пути s, от скорости движения v $\left(t = \frac{s}{v}\right)$.

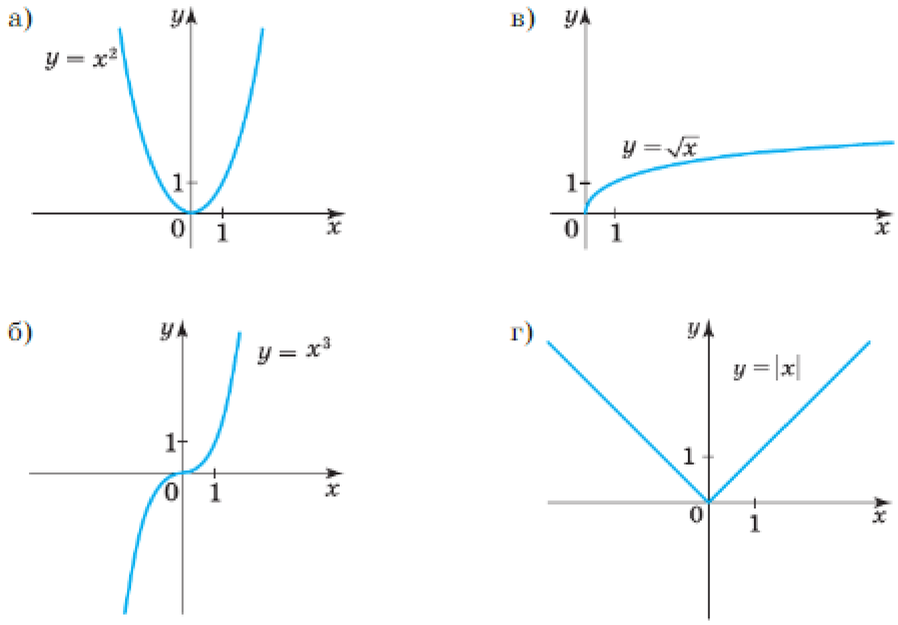


Рис. 52

Вы изучали также функции, заданные формулами $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$. Их графики изображены на рисунке 52.

Упражнения

1063. Функция задана формулой $f(x) = -3x^2 + 10$. Найдите:

а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

1064. Найдите $f(0)$, $f(1{,}5)$ и $f(-1)$, если $f(x) = \frac{x - 0{,}5}{x + 0{,}5}$.

1065. Известно, что $f(x) = x^3 - 10$. Найдите:

а) $f(5)$; б) $f(4)$; в) $f(2)$; г) $f(-3)$.

1066. Пусть $\varphi(x) = x^2 + x + 1$. Найдите $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3)$.

1067. Известно, что $f(x) = -5x + 6$. Найдите значение x, при котором:

а) $f(x) = 17$; б) $f(x) = -3$; в) $f(x) = 0$.

1068. Найдите значения x, при которых $g(x) = 0$, если:

а) $g(x) = x(x + 4)$; б) $g(x) = \frac{x + 1}{5 - x}$.

1069. Существует ли значение x, при котором значение функции, заданной формулой $\varphi(x) = \frac{4}{6+x}$, равно: а) 1; б) −0,5; в) 0? В случае утвердительного ответа укажите это значение.

1070. Найдите значение x, при котором функция, заданная формулой $f(x) = 0{,}5x - 4$, принимает значение, равное: а) −5; б) 0; в) 2,5.

1071. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 4x - 8$; в) $y = \frac{2x}{5-x}$; д) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

б) $y = x^2 - 5x + 1$; г) $y = \frac{3}{(x-4)(x+1)}$; е) $y = \sqrt{x-5}$.

1072. Приведите пример функции, область определения которой: а) множество всех чисел; б) множество всех чисел, кроме 7.

1073. Какова область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = \frac{x-1}{1+x}$; в) $y = \sqrt{9+x}$; г) $y = \sqrt{3-x}$?

1074. Найдите область определения функции и постройте её график:

а) $y = \frac{x^2-9}{6+2x}$; б) $y = \frac{4-x^2}{x^2+2x}$.

1075. Пассажир метро, вставший на эскалатор, сошёл с него через t с. Глубина спуска h м. Угол наклона эскалатора к горизонтальной плоскости 30°. Выразите формулой зависимость h от t, если скорость движения эскалатора равна 0,75 м/с. Найдите:

а) h, если $t = 2{,}25$ мин; б) t, если $h = 60$ м.

1076. Дальность полёта s м снаряда (без учёта сопротивления воздуха), выпущенного из орудия под углом 45° к горизонту, зависит только от начальной скорости снаряда v_0 м/с и может быть найдена по формуле $s = \frac{v_0^2}{g}$ ($g \approx 10$ м/с^2). Найдите:

а) s, если $v_0 = 600$ м/с; б) v_0, если $s = 24$ км.

1077. (*Для работы в парах.*) Укажите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{5}{|x+1|+4}$; в) $y = x^2 + \sqrt{|x|-1}$;

б) $y = \frac{48}{|x|-2}$; г) $y = \sqrt{|2-x|-3x}$.

1) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.

2) Объясните друг другу, как вы рассуждали при нахождении области определения функции.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

1078. На рисунке 53 изображён график функции $y = g(x)$, областью определения которой служит отрезок $[-6; 5]$. С помощью графика найдите:
а) $g(-4)$, $g(-1)$, $g(1)$, $g(5)$;
б) значения x, при которых $g(x) = 4$, $g(x) = -4$, $g(x) = 0$;
в) наибольшее и наименьшее значения функции;
г) множество значений функции.

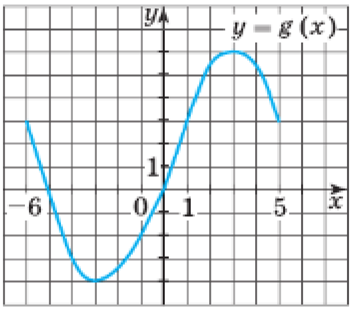


Рис. 53

1079. В течение первых 10 дней мая ученики 8 класса измеряли атмосферное давление в полдень. По результатам измерений был построен график, изображённый на рисунке 54. Пользуясь графиком, найдите:
а) каким было атмосферное давление 2 мая, 5 мая, 9 мая;
б) день, когда атмосферное давление было самым высоким.

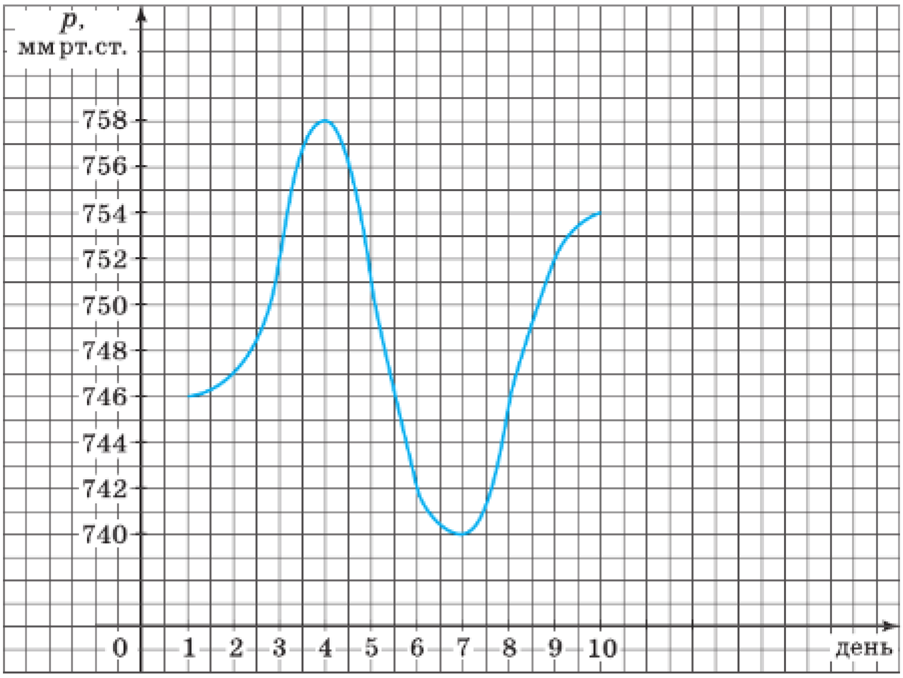


Рис. 54

1080. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $f(x) = 1{,}5 - 3x$;

б) $f(x) = 4{,}5x$;

в) $f(x) = \frac{10}{x}$;

г) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Укажите область определения и множество значений функции.

1081. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = 2x - 1$, где $1 \leqslant x \leqslant 4$;

б) $g(x) = -3x + 8$, где $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

1082. Используя рисунок 52 на с. 237, укажите область определения и множество значений каждой из функций

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x},\ y = |x|.$$

1083. Найдите область определения и множество значений функции, заданной формулой $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

1084. Периметр равнобедренного треугольника с основанием 20 см зависит от длины x (см) боковой стороны. Задайте формулой функцию, выражающую эту зависимость, зная, что периметр треугольника не превосходит 100 см. Укажите область определения и множество значений этой функции.

1085. Постройте график функции $f(x) = -x^2$. Как изменяются значения данной функции с увеличением значений аргумента от $-\infty$ до 0 (увеличиваются или уменьшаются)? Укажите область определения и множество значений данной функции.

1086. Постройте график функции $f(x) = -2\sqrt{x}$. Как изменяются значения данной функции с увеличением значений аргумента от 0 до $+\infty$ (увеличиваются или уменьшаются)? Укажите область определения и множество значений данной функции.

1087. На рисунке 55 изображён график одной из функций, заданных формулами

$$y = x - 1,\ y = 1 + x,\ y = 2x - 1,\ y = 1 - 2x.$$

Выясните, какой именно.

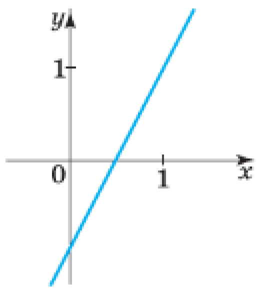


Рис. 55

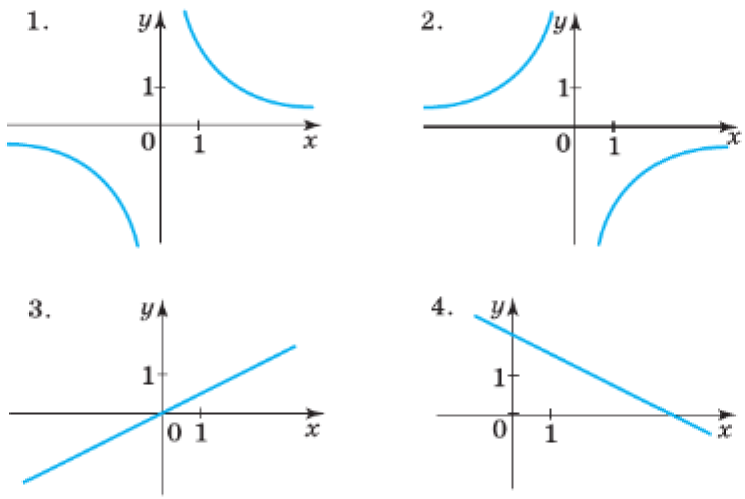


Рис. 56

1088. На рисунке 56 изображены графики функций, заданных формулами $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 2 - \frac{x}{2}$, $y = -\frac{2}{x}$. Для каждой функции укажите соответствующий график.

1089. По графику функции $y = |x|$ (см. рис. 52) найдите, при каких значениях x:

а) $|x| = 3{,}5$;

б) $|x| < 2$;

в) $|x| \geqslant 4$.

Каково наименьшее значение функции? Имеет ли она наибольшее значение? Каково множество значений функции?

1090. Составьте таблицу значений и постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = x^3 - 8x$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$; б) $y = \frac{4}{x + 2}$, где $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 6$.

Каково множество значений функции?

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ (1792–1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии, которая изменила представление о роли аксиоматики в математике и сыграла важную роль в разработке теории относительности. Большой вклад внёс также в математический анализ и алгебру. Он разработал метод приближённого решения алгебраических уравнений высших степеней.

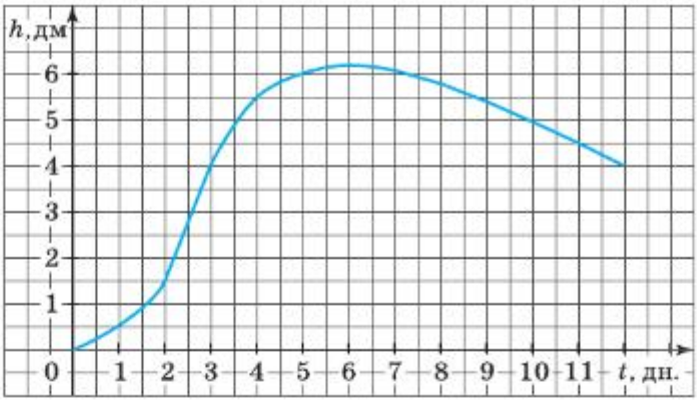


Рис. 57

1091. На рисунке 57 изображён график изменения уровня воды в реке относительно нулевой отметки. Опишите, как происходило изменение уровня воды.

1092. (*Задача-исследование.*) Изменение температуры воды p (°C) в баке как функции времени t (мин) описано с помощью формулы:

$$p = \begin{cases} 2t + 20, \text{ если } 0 \leqslant t < 40, \\ 100, \text{ если } 40 \leqslant t \leqslant 60, \\ -\frac{2}{3}t + 140, \text{ если } 60 < t \leqslant 150. \end{cases}$$

1) Определите, как изменялась температура воды в каждом из указанных промежутков времени.

2) Постройте график функции $p = f(t)$.

3) Обсудите, какой физический смысл имеет процесс, описанный функцией $p = f(t)$, в каждом из промежутков времени $[0; 40)$; $[40; 60]$; $(60; 150]$.

ПЕТЕР ДИРИХЛЕ (1805–1859) — немецкий математик. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел. Имеет значительные достижения в развитии алгебры, теории функций и аналитической геометрии. Им проведены важные исследования в области механики и математической физики.

1093. Зависимость расстояния s (км), которое велосипедист проехал от турбазы, от времени его движения t (ч) задана следующим образом:

$$s = \begin{cases} 15t, \text{ если } 0 \leqslant t < \frac{7}{6}, \\ 17{,}5, \text{ если } \frac{7}{6} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}, \\ -12t + 35{,}5, \text{ если } \frac{3}{2} < t \leqslant \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Найдите $s(0)$; $s(1)$; $s(1{,}4)$; $s(2)$. Постройте график функции $s = f(t)$ (масштаб по оси t: 1 ед. — 6 клеточек; по оси s: 10 ед. — 4 клеточки). Опишите, как происходило движение велосипедиста.

П

1094. Решите уравнение:
а) $-0{,}5(3x - 4) + 15x = 4(1{,}5x + 1) + 3$;
б) $(2x - 3)(2x + 3) - x^2 = 12x - 69 + 3x^2$.

1095. Решите неполное квадратное уравнение:
а) $6x^2 - 3x = 0$; в) $x^2 - 36 = 0$; д) $0{,}5x^2 - 1 = 0$;
б) $x^2 + 9x = 0$; г) $5x^2 + 1 = 0$; е) $0{,}6x + 9x^2 = 0$.

1096. Решите квадратное уравнение:
а) $x^2 + 7x + 12 = 0$; в) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
б) $x^2 - 2x - 35 = 0$; г) $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

43. Свойства функции

На рисунке 58 изображён график зависимости температуры воздуха P (°C) от времени суток t (ч). Мы видим, что в 2 ч и в 8 ч температура равнялась нулю, от 0 до 2 ч и от 8 до 24 ч она была выше нуля, а от 2 до 8 ч — ниже нуля. Из графика ясно также,

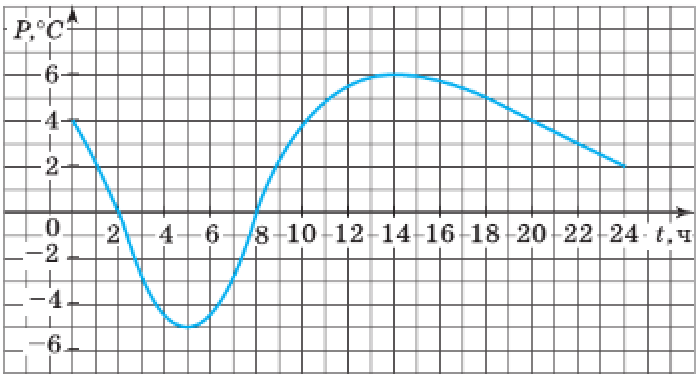


Рис. 58

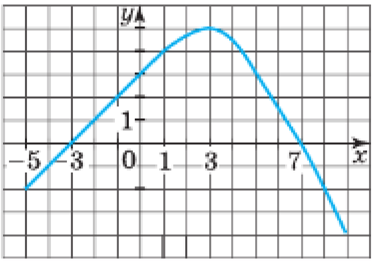


Рис. 59

что в течение первых пяти часов температура понижалась, затем в промежутке от 5 до 14 ч она повышалась, а потом опять понижалась.

С помощью графика мы выяснили некоторые свойства функции $P = f(t)$, где t — время суток в часах, а P — температура воздуха в градусах Цельсия.

Рассмотрим теперь свойства функции $y = f(x)$, где $-5 \leqslant x \leqslant 9$, график которой изображён на рисунке 59. Выясним сначала, при каких значениях x функция обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения.

1) Найдём абсциссы точек пересечения графика с осью x. Получим $x = -3$ и $x = 7$.

Значит, функция принимает значение, равное нулю, при $x = -3$ и $x = 7$. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называют *нулями функции*, т. е. числа -3 и 7 — нули рассматриваемой функции.

2) Нули функции разбивают её область определения — промежуток $[-5; 9]$ — на три промежутка: $[-5; -3)$, $(-3; 7)$ и $(7; 9]$. Для значений x из промежутка $(-3; 7)$ точки графика расположены выше оси x, а для значений x из промежутков $[-5; -3)$ и $(7; 9]$ — ниже оси x. Значит, на промежутке $(-3; 7)$ функция принимает положительные значения, а на каждом из промежутков $[-5; -3)$ и $(7; 9]$ — отрицательные.

Промежутки, на которых функция сохраняет знак, называют *промежутками знакопостоянства*.

3) Выясним теперь, как изменяются (увеличиваются или уменьшаются) значения данной функции с изменением x от -5 до 9.

Из графика видно, что с возрастанием x от -5 до 3 значения y увеличиваются, а с возрастанием x от 3 до 9 значения y уменьшаются.

Говорят, что на промежутке $[-5; 3]$ функция $y = f(x)$ является *возрастающей*, а на промежутке $[3; 9]$ эта функция является *убывающей*.

Определение. Функция называется возрастающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.
Функция называется убывающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

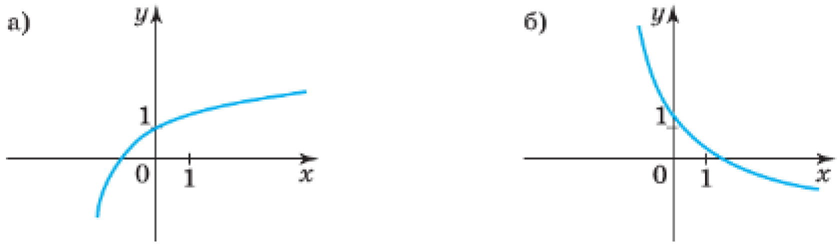


Рис. 60

Иными словами, функция $y = f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Если функция возрастает на всей области определения, то её называют *возрастающей функцией*, а если убывает, то — *убывающей функцией*. Промежутки возрастания и убывания функции называются *промежутками монотонности* функции.

На рисунке 60 изображены графики возрастающей функции и убывающей функции.

Упражнения

1097. На рисунке 61 изображён график изменения скорости велосипедиста v в зависимости от времени его движения t. Укажите промежуток времени, в течение которого скорость велосипедиста:

а) возрастала; б) убывала; в) оставалась постоянной.

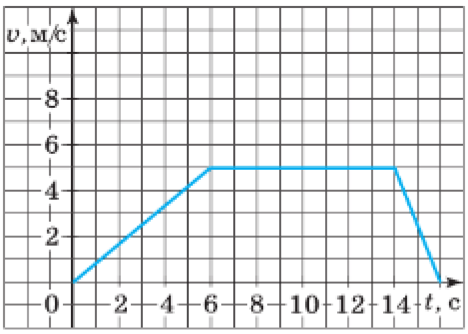


Рис. 61

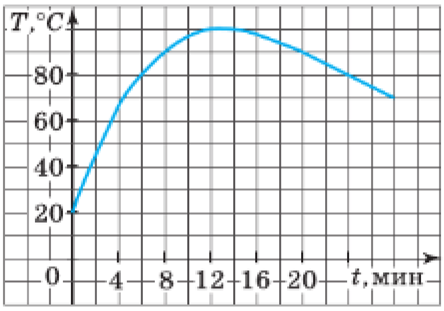


Рис. 62

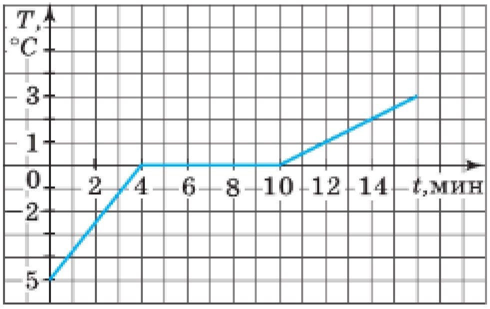


Рис. 63

1098. На рисунке 62 изображён график температуры воды в сосуде. Опишите, как изменялась температура, и укажите промежуток времени, в течение которого проводилось наблюдение. Каково было наибольшее значение температуры?

1099. Кусок льда, имеющий температуру −5 °C, нагревали в течение 16 мин. Результат нагревания показан на графике (рис. 63). Какой физический смысл имеет рассматриваемый процесс на каждом из промежутков [0; 4], (4; 10), [10; 16]?

1100. (*Для работы в парах.*) На рисунке 64 изображён график функции $y = f(x)$, где $-7 \leqslant x \leqslant 5$. Укажите:

а) нули функции;

б) промежутки, на которых функция принимает значения одного и того же знака (положительные или отрицательные);

в) промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает;

г) наибольшее и наименьшее значения функции.

1) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.

2) Объясните, как вы рассуждали при выполнении задания.

3) Исправьте допущенные ошибки, если они обнаружатся.

1101. Перечислите свойства функции $y = g(x)$, где $-5 \leqslant x \leqslant 5$, график которой изображён на рисунке 65.

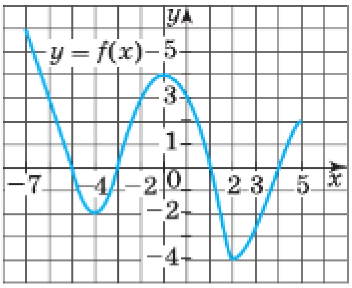


Рис. 64

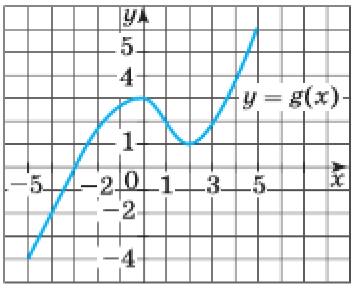


Рис. 65

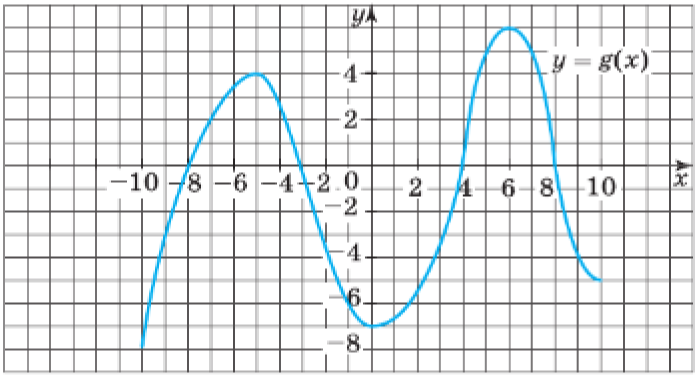


Рис. 66

1102. На рисунке 66 изображён график функции $y = g(x)$, где $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Сколько нулей имеет функция? Укажите:

а) промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения;

б) промежутки, на которых функция убывает.

1103. Для функции $y = f(x)$, график которой изображён на рисунке 67, укажите:

1) $D(f)$; 2) $E(f)$; 3) нули функции; 4) промежутки знакопостоянства; 5) промежутки монотонности; 6) $f(-3)$ и $f(1)$.

1104. Начертите график какой-либо функции с областью определения $[-3; 4]$ так, чтобы эта функция:

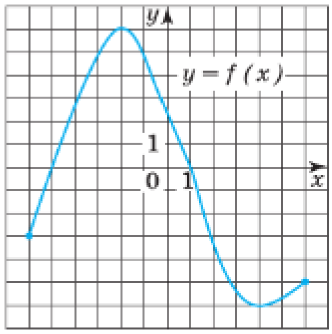
а) возрастала на промежутке $[-3; 0]$ и убывала на промежутке $[0; 4]$;

б) убывала на промежутке $[-3; 1]$ и возрастала на промежутке $[1; 4]$.

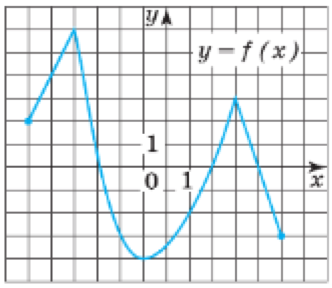
1105. Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой служат числа:

а) -3 и 3; б) -4, 0 и 2; в) -3, 2, 1 и 5.

а)



б)



в)

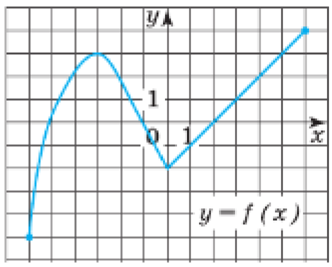


Рис. 67

1106. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = -0{,}8x + 12$; в) $y = \dfrac{4 + 2x}{x^2 + 5}$;

б) $y = (3x - 10)(x + 6)$; г) $y = \dfrac{6}{(x - 1)(x + 8)}$.

1107. Имеет ли нули функция:

а) $y = 2{,}1x - 70$; б) $y = 4x(x - 2)$; в) $y = \dfrac{6 - x}{x}$?

1108. Укажите область определения и найдите нули функции:

а) $y = \dfrac{x - \sqrt{x + 6}}{x + 5}$; б) $y = \dfrac{4x^2 + 25x}{2x - \sqrt{10 - 6x}}$.

П

1109. Выясните, пересекаются ли прямая и гипербола. Если да, то найдите точки пересечения.

а) прямая $y = x + 1$ и гипербола $y = \frac{2}{x}$;

б) прямая $y = -2x - 2$ и гипербола $y = \frac{1}{x}$.

1110. Найдите, при каких значениях x значения функции $y = 2x - 3$ удовлетворяют неравенству $-3 < y \leqslant 5$.

1111. Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{a + 1}{a^2 + 1 - 2a} + \dfrac{1}{a - 1}\right) \cdot \dfrac{a - 1}{a} - \dfrac{2}{a - 1} = 0$;

б) $\left(\dfrac{1 + x}{x^2 - xy} - \dfrac{1 - y}{y^2 - xy}\right) \cdot \dfrac{x^2y - y^2x}{x + y} = 1$;

в) $3a\left(\dfrac{1}{a - c} - \dfrac{c}{a^3 - c^3} \cdot \dfrac{a^2 + c^2 + ac}{a + c}\right) - \dfrac{3c^2}{a^2 - c^2} = 3$.

1112. Найдите значение выражения

$$(9 - 4a^2)\left(\frac{4a}{2a - 3} - 1\right)$$

при $a = -1{,}2$.

1113. Сравните числа:

а) $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{9}$; б) $\frac{38}{39}$ и $\frac{11}{12}$; в) $3{,}12$ и $3\frac{1}{8}$; г) $17{,}2(7)$ и $17{,}27$.

Контрольные вопросы и задания

1 Дайте определение функции. Что называется областью определения и множеством значений функции?

2 Что называется графиком функции? Что представляет собой график линейной функции? прямой пропорциональности? обратной пропорциональности?

3 Дайте определение возрастающей (убывающей) функции. Приведите примеры функции, возрастающей на промежутке; убывающей на промежутке. Назовите промежутки возрастания и убывания функции, график которой изображён на рисунке 64.

§ 14 СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

44. Свойства линейной функции

Рассмотрим свойства функции, заданной формулой $y = kx + b$, где $k \neq 0$ (рис. 68).

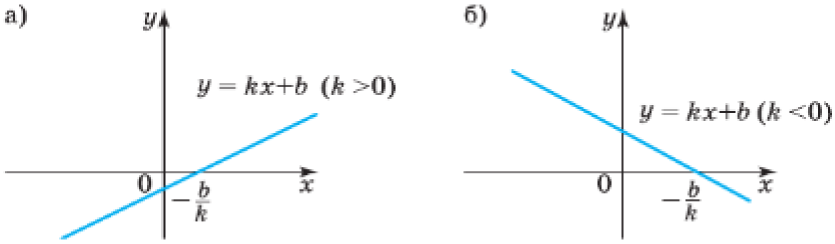


Рис. 68

1. *Функция определена при любых значениях переменной* x, т. е. $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2. *Значением функции может быть любое число*, т. е. $E(y) = \boldsymbol{R}$.

3. *Функция обращается в нуль при* $x = -\frac{b}{k}$.

● Действительно, решим уравнение $kx + b = 0$, получим $kx = -b$, откуда $x = -\frac{b}{k}$. ○

4. *При* $k > 0$ *функция принимает отрицательные значения на промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ *и положительные значения на промежутке* $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$.

- Решив неравенства
$$kx + b < 0 \text{ и } kx + b > 0,$$
найдём, что если $k > 0$, то $y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ и $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$. ○

При $k < 0$ функция принимает отрицательные значения на промежутке $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ и положительные значения на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$.

- Убедиться в этом можно, решив неравенства
$$kx + b < 0 \text{ и } kx + b > 0$$
при условии, что $k < 0$. ○

5. *При $k > 0$ функция $y = kx + b$ является возрастающей, а при $k < 0$ — убывающей.*

- Докажем это. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причём $x_2 > x_1$. Обозначим через y_1 и y_2 соответствующие им значения функции:
$$y_1 = kx_1 + b \text{ и } y_2 = kx_2 + b.$$
Рассмотрим разность $y_2 - y_1$:
$$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$
Множитель $x_2 - x_1$ положителен, так как $x_2 > x_1$. Поэтому знак произведения $k(x_2 - x_1)$ определяется знаком коэффициента k.
Если $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$ и $y_2 > y_1$. Значит, при $k > 0$ функция $y = kx + b$ является возрастающей.
Если $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$ и $y_2 < y_1$. Значит, при $k < 0$ функция $y = kx + b$ является убывающей. ○

Упражнения

1114. Постройте график функции и перечислите её свойства:
а) $y = 1{,}5x - 3$; б) $y = -0{,}6x + 5$.

1115. Постройте график функции: а) $y = 1{,}6x$; б) $y = -0{,}4x$. Перечислите свойства функции $y = kx$ при $k > 0$ и при $k < 0$.

1116. При каких значениях x функция $y = f(x)$ обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения, если:
а) $f(x) = -0{,}7x + 350$; б) $f(x) = 30x + 10$?
Начертите схематически график функции и проиллюстрируйте на нём установленные свойства.

1117. Какие из линейных функций $y = 8x - 5$, $y = -3x + 11$, $y = -49x - 100$, $y = x + 1$, $y = 1 - x$ являются:
а) возрастающими; б) убывающими?

1118. Функция задана формулой $f(x) = 13x - 78$. При каких значениях x:
а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$?
Является ли функция возрастающей или убывающей?

1119. На рисунке 69 изображён график линейной функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции верны?
В ответе запишите их номера.
1) Функция является убывающей.
2) $x = -4$ — нуль функции.
3) $f(2) = 0$.
4) На промежутке $(-\infty; -4)$ функция принимает отрицательные значения.

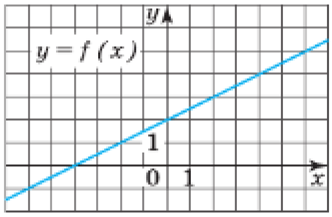


Рис. 69

1120. Функция задана формулой $f(x) = -1{,}5x + 6$. При каких значениях x выполняются условия $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$? Получите ответ алгебраическим способом и проиллюстрируйте на графике.

1121. Линейная функция задана формулой $y = kx + 10$, где k — некоторое число. В каких координатных четвертях расположен график этой функции, если известно, что:
а) $k > 0$; б) $k < 0$; в) $k = 0$?

1122. Функция задана формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа. Покажите схематически, как располагается график в координатной плоскости, если:
а) $k > 0$, $b > 0$;
б) $k < 0$, $b > 0$;
в) $k < 0$, $b = 0$;
г) $k < 0$, $b < 0$;
д) $k = 0$, $b < 0$.

П

1123. Решите уравнение:
а) $0{,}6x^2 - 3{,}6x = 0$;
б) $c^2 - 5 = 0$;
в) $2x^2 + 17x = 0$;
г) $0{,}5x^2 + 9 = 0$.

1124. Сравните $g(2)$ и $g(-2)$, если:
а) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5}$; б) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$; в) $g(x) = \dfrac{-x}{x^2 + 5}$.

1125. Разложите на множители многочлен:
а) $4x - x^3$;
б) $a^4 - 169a^2$;
в) $c^3 - 8c^2 + 16c$.

45. Свойства функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$

На рисунке 70 изображён график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Рассмотрим свойства этой функции.

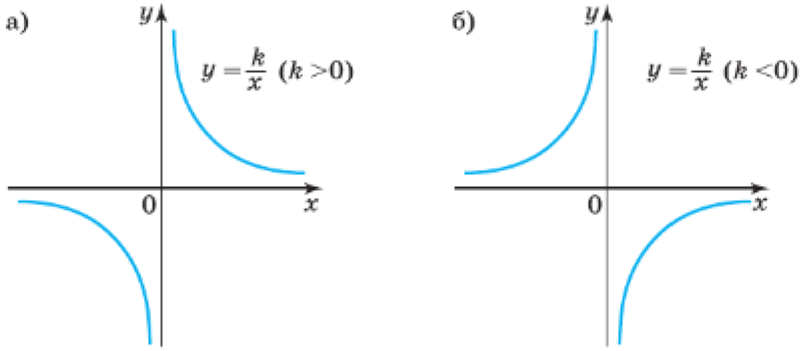


Рис. 70

1. *Функция определена для любых значений аргумента, кроме нуля*, т. е. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. *Значением функции может быть любое число, кроме нуля*, т. е. $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. *Функция нулей не имеет.*

● Это следует из того, что дробь $\frac{k}{x}$ при любом значении аргумента в нуль не обращается (по условию $k \neq 0$). ○

4. *Функция* $y = \frac{k}{x}$ *при* $k > 0$ *принимает отрицательные значения на промежутке* $(-\infty; 0)$ *и положительные значения на промежутке* $(0; +\infty)$.

● Действительно, если $k > 0$, то дробь $\frac{k}{x}$ отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$. ○

Функция $y = \frac{k}{x}$ *при* $k < 0$ *принимает отрицательные значения на промежутке* $(0; +\infty)$ *и положительные значения на промежутке* $(-\infty; 0)$.

Обоснование аналогично изложенному для случая $k > 0$.

5. *При* $k > 0$ *функция* $y = \frac{k}{x}$ *является убывающей на каждом из промежутков* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$. *При* $k < 0$ *функция* $y = \frac{k}{x}$ *является возрастающей на каждом из этих промежутков* (см. рис. 70, *а*, *б*).

Доказательство этого свойства проводится аналогично тому, как это было сделано для линейной функции.

Заметим, что, хотя функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, убывает (или возрастает) на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, она не является ни убывающей, ни возрастающей функцией. В самом деле, эта функция монотонной не является.

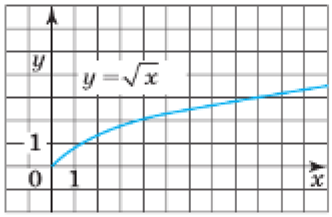


Рис. 71

Рассмотрим теперь свойства функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 71).

1. *Функция определена при любых неотрицательных значениях аргумента*, т. е. $D(y) = [0; +\infty)$.

2. *Функция принимает только неотрицательные значения*, причём любое неотрицательное число может являться её значением, т. е. $E(y) = [0; +\infty)$.

3. *Функция обращается в нуль при* $x = 0$.

4. *Функция является возрастающей.*

Докажем это. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причём $x_2 > x_1 > 0$. Обозначим через y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции: $y_1 = \sqrt{x_1}$ и $y_2 = \sqrt{x_2}$.

Рассмотрим разность $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) \cdot \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0.$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$, то функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей. ○

Упражнения

1126. На рисунке 72 изображён график функции $y = f(x)$.
Какие из следующих утверждений являются верными? В ответе запишите их номера.

1) Функция является убывающей.
2) $x = 3$ — нуль функции.
3) На промежутке $(0; 3)$ функция принимает положительные значения.
4) $f(-3) + f(2) > 0$.

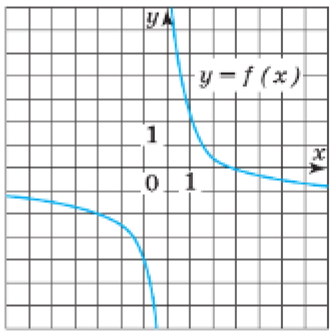


Рис. 72

1127. Какие из прямых

$$y = 25,\ y = 0{,}09,\ y = 10,\ y = -4$$

пересекают график функции $y = \sqrt{x}$? Для прямых, пересекающих график, укажите абсциссы точек пересечения.

1128. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте в той же системе координат график функции:

а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{-x}$.

1129. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x$.

а) Укажите координаты их общих точек.

б) При каких значениях x график функции $y = \sqrt{x}$ расположен выше прямой $y = x$ и при каких значениях x он расположен ниже этой прямой?

1130. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Укажите значения аргумента x, при которых выполняется условие:

а) $f(x) > 10$; б) $3 < f(x) < 5$.

Проиллюстрируйте свой ответ на графике.

1131. Постройте график функции и перечислите её свойства:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = -\frac{4}{x}$.

1132. Изобразите схематически в одной системе координат графики функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{2}{x}$. Имеют ли эти графики общие точки? Обоснуйте свой ответ алгебраически.

1133. Функция задана формулой $y = \frac{4}{x}$. При каких значениях x:

а) функция принимает значение, равное: 8; −8;

б) функция принимает значение, меньшее 4;

в) функция принимает значение, большее 2?

1134. Является ли возрастающей или убывающей функция:

а) $y = 5x + \sqrt{x}$; б) $y = -x + \sqrt{-x}$; в) $y = x^2 + \sqrt{x}$?

П

1135. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{x+1}{10} - \frac{x}{6} \leqslant \frac{x}{10} + \frac{1-x}{30}, \\ \frac{x}{3} - \frac{x+5}{12} < \frac{x}{4} - \frac{x-5}{24}. \end{cases}$

П

1136. Сравните значения выражений:

а) $5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ и $3\sqrt{7}+\sqrt{45}$; в) $5\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ и $\sqrt{75}+7\sqrt{2}$;

б) $6\sqrt{2}-2\sqrt{7}$ и $4\sqrt{3}-\sqrt{28}$; г) $\sqrt{112}-2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{7}-\sqrt{23}$.

Контрольные вопросы и задания

1 Приведите примеры возрастающей и убывающей линейной функции. Сформулируйте и докажите соответствующее свойство линейной функции.

2 Что называется нулём функции? Укажите нуль функции, заданной формулой $y = kx + b$, где $k \neq 0$. Может ли линейная функция не иметь нулей?

3 Как изменяется на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $y = \frac{k}{x}$? Рассмотрите случаи $k > 0$ и $k < 0$.

4 Перечислите свойства функции, заданной формулой $y = \sqrt{x}$. Может ли эта функция принимать значение, равное 9, –4, 8? Если может, то при каком значении аргумента?

Для тех, кто хочет знать больше

46. Целая и дробная части числа

Рассмотрим две новые функции и построим их графики. Сначала введём понятия целой и дробной части числа.

> **Определение.** Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

Целая часть числа x обозначается так: $[x]$.

Приведём примеры:

$$[5{,}7] = 5;\ \left[10\tfrac{5}{6}\right] = 10;\ [-7] = -7;\ [-8{,}2] = -9.$$

> **Определение.** Дробной частью числа x называется разность между числом и его целой частью.

Дробная часть числа x обозначается так: $\{x\}$. Таким образом, $\{x\} = x - [x]$.

Например,

$\{12,4\} = 12,4 - 12 = 0,4;$

$\{-3,5\} = -3,5 - [-3,5] = -3,5 - (-4) = 0,5;\ \{7\} = 0.$

Выясним, что представляет собой график функции $y = [x]$.

Если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, на промежутке $[0;\ 1)$ график функции $y = [x]$ совпадает с прямой $y = 0$. Но так как $[1] = 1$, то при $x = 1$ график совершает «скачок».

Если $1 \leqslant x < 2$, то $[x] = 1$, значит, на промежутке $[1;\ 2)$ значения равны 1, а при $x = 2$ график опять совершает «скачок».

Рассматривая последовательно промежутки

$[2;\ 3),\ [3;\ 4),\ \ldots,\ [-1;\ 0),\ [-2;\ -1),\ \ldots,$

получаем график, состоящий из «ступенек» (рис. 73).

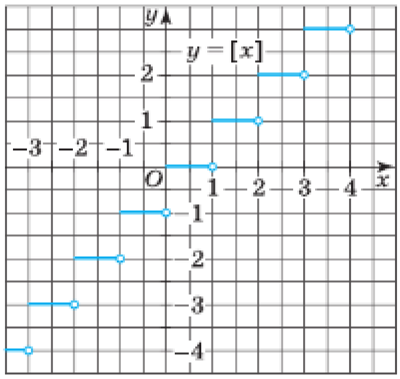


Рис. 73

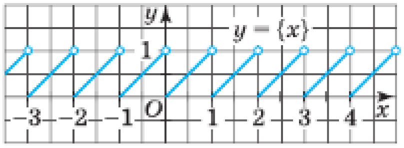


Рис. 74

Теперь рассмотрим график функции $y = \{x\}$. Для этого воспользуемся определением дробной части числа: $\{x\} = x - [x]$.

Имеем: если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$, значит, $\{x\} = x - 0$ и график на этом промежутке совпадает с прямой $y = x$.

Если $1 \leqslant x < 2$, то $[x] = 1$, а $\{x\} = x - 1$, и график на этом промежутке совпадает с прямой $y = x - 1$ и т. д. График изображён на рисунке 74.

Упражнения

1137. Найдите $[a]$, если $a = 4,7;\ 98;\ -2\frac{2}{3};\ -0,01$.

1138. Найдите $\{c\}$, если $c = 5;\ -\frac{8}{9};\ -0,95;\ 0;\ 1,17$.

1139. Найдите целую и дробную части числа π.

1140. Известно, что $x = 2,7$. Найдите: $2[x];\ [2x];\ [-2x]$.

1141. Известно, что $x = 4,8$. Найдите: $\{3x\};\ \{-3x\}$.

1142. Постройте график функции:

а) $y = 2[x]$; б) $y = [2x]$; в) $y = -[x]$.

1143. Постройте график функции $y = -\{x\}$.

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 13

1144. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{6x} + \frac{1}{6 + x}$; б) $y = \sqrt{x} - \sqrt{x - 4}$; в) $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$.

1145. Длина прямоугольника $ABCD$ (рис. 75) равна 10 см, а ширина — 7 см. Отрезок MN передвигается от отрезка AD до отрезка BC, оставаясь параллельным отрезку AD. Площадь y (см^2) закрашенной части есть функция расстояния x (см) от точки D до точки N. Задайте функцию $y = f(x)$ формулой. Найдите множество значений этой функции.

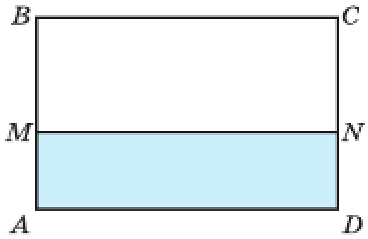


Рис. 75

1146. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 6 см, а боковая сторона — 5 см. Концы подвижного отрезка, параллельного основанию, лежат на боковых сторонах. Его длина равна y (см), а расстояние от вершины — x (см). Задайте формулой y как функцию от x. Найдите множество значений этой функции.

1147. Функция задана формулой $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Пересекает ли её график ось x? ось y? В каких координатных четвертях расположен график этой функции?

1148. Катер отправляется от пристани A и идёт вниз по реке к пристани B, до которой 60 км. После двухчасовой стоянки на пристани B он возвращается обратно. Расстояние l (км), пройденное катером от пристани A, зависит от времени t (ч), отсчитываемого с момента отправления катера из A до момента возвращения. Собственная скорость катера 16 км/ч, скорость течения реки 4 км/ч. Задайте l как функцию от t формулами, постройте график функции, опишите по графику её свойства и объясните их физический смысл.

1149. Начертите график какой-нибудь функции, областью определения которой является промежуток $[-3; 4]$, а множеством значений — промежуток $[0; 6]$.

1150. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = \frac{2x + 11}{10}$; б) $y = \frac{6}{8 - 0,5x}$; в) $y = \frac{3x^2 - 12}{4}$.

1151. Известно, что $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — возрастающие (убывающие) функции. Докажите, что функция $\varphi = f(x) + g(x)$ является возрастающей (убывающей) функцией.

1152. Известно, что $y = f(x)$ — возрастающая функция и a — некоторое число. Докажите, что уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

1153. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + x^2 = 18$; б) $x^3 + 5x = 6$.

1154. Какие из функций, заданных формулами

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 5, \quad y = 2x + 5,$$
$$y = x^3, \quad y = -x^2, \quad y = -x^2 - 4,$$
$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x} + 1, \quad y = x^4 + x^2 + 6,$$

сохраняют знак на всей области определения?

1155. На рисунке 76 изображён график одной из функций:

$y = \sqrt{x - 1}$, $y = \sqrt{x + 1}$, $y = \sqrt{1 - x}$.

Какой именно?

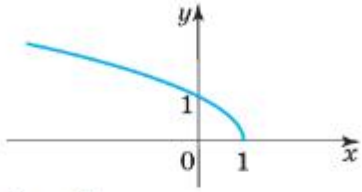


Рис. 76

1156. Какой из трёх графиков, изображённых на рисунке 77, является графиком функции $y = |x - 2|$?

1157. Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$ и опишите её свойства.

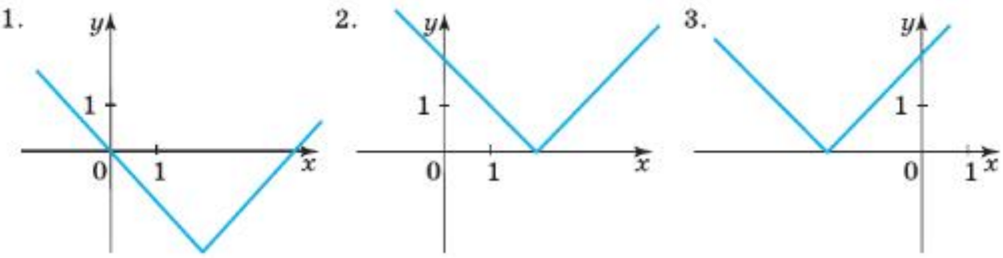


Рис. 77

К параграфу 14

1158. Функция задана формулой $y = 3{,}5x - 7$. Задайте формулой какую-нибудь линейную функцию, график которой пересекает график первой функции:
а) в точке, расположенной в третьей координатной четверти;
б) в точке, расположенной на оси x;
в) в точке, расположенной на оси y.

1159. Функция задана формулой $y = -2x + 6$. Задайте формулой функцию, график которой параллелен графику данной функции и проходит:
а) через начало координат;
б) через точку $(-4; 0)$;
в) через точку $(0; 3)$;
г) через точку $(-2; 2)$.

1160. При каких значениях a функция $y = (a - 2)x + 3$:
а) является возрастающей;
б) является убывающей;
в) не является ни возрастающей, ни убывающей?

1161. Дана функция $g(x) = 1 - \sqrt{x}$. Расположите в порядке возрастания значения этой функции при:
$$x = 0;\ x = 1;\ x = 0{,}25;\ x = 0{,}09;\ x = 36.$$

1162. Какие из прямых $y = 4x - 5$, $y = 0{,}5x - 2$, $y = -1$, $y = -x + 3$ имеют общие точки с графиком функции $y = \sqrt{x}$?

1163. Постройте график функции $y = \frac{4x + 3}{4x^2 + 3x}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1164. Постройте график функции и перечислите её свойства:

а) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{если } x \leqslant 2, \\ -2x + 5, & \text{если } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$

1165. С помощью графиков найдите приближённое значение корня уравнения $\sqrt{x} = \frac{2}{x}$.

1166. Постройте в одной системе координат в первой координатной четверти графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.
а) Укажите координаты точек, которые являются общими для всех этих графиков.

б) Опишите взаимное расположение этих графиков на отрезке $[0; 1]$ и на луче $[1; +\infty)$.

в) Глядя на рисунок, расположите в порядке возрастания числа: 0,37; $0{,}37^2$; $0{,}37^3$; $\sqrt{0{,}37}$.

г) Расположите в порядке убывания числа: 4,6; $4{,}6^2$; $4{,}6^3$; $\sqrt{4{,}6}$.

1167. Используя рисунок 52 на с. 237, перечислите свойства функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ и $y = |x|$.

1168. Графиком какой из функций — $y = \frac{4}{x}$ или $y = \frac{x}{4}$ — является гипербола?

1169. Какие из точек (5; 3), (10; −2), (−0,3; −50), (−0,4; 50) принадлежат графику функции:
а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = -\frac{20}{x}$?

1170. В одной системе координат постройте графики функций

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{4}{x},\ y = -\frac{2}{x},\ y = -\frac{6}{x}.$$

Как зависит расположение графика функции $y = \frac{k}{x}$ от модуля коэффициента k?

1171. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их точек пересечения:
а) $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -x$; б) $y = \frac{2}{x}$ и $y = x + 1$.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Глава VI СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В этой главе будет продолжено изучение степеней. До сих пор вы имели дело только со степенями с натуральными показателями. Теперь вы встретитесь со степенями, показатели которых — целые отрицательные числа. Это позволит выполнять действия со степенями, показателями которых могут быть любые целые числа.

Использование степеней с целыми отрицательными показателями позволит записывать в стандартном виде не только большие, но и малые числа, что сделает запись вычислений более компактной.

§ 15 СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

47. Определение степени с целым отрицательным показателем

В справочной литературе можно найти сведения о том, что масса Солнца равна $1{,}989 \cdot 10^{33}$ г, а масса атома водорода равна $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г. Запись 10^{33} означает произведение тридцати трёх множителей, каждый из которых равен 10. А каков смысл записи 10^{-24}?

Выпишем последовательно степени числа 10 с показателями 0, 1, 2 и т. д.

Получим строку 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ...

В этой строке каждое число меньше следующего за ним в 10 раз. Продолжая строку по тому же закону влево, перед числом 10^0 следует написать число $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ — число $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$, перед числом $\frac{1}{10^2}$ — число $\frac{1}{10^3}$ и т. д. Получим

$$\ldots,\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots . \qquad (1)$$

В строке (1) справа от числа 10^0 показатель каждой степени на 1 меньше показателя следующей за ней степени. Распространяя этот закон на числа, стоящие слева от числа 10^0, их записывают в виде степени числа 10 с отрицательным показателем. Вместо $\frac{1}{10^1}$ пишут 10^{-1}, вместо $\frac{1}{10^2}$ пишут 10^{-2}, вместо $\frac{1}{10^3}$ пишут 10^{-3} и т. д. Получают

$$\dots,\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \dots\ .$$

Итак, 10^{-1} означает $\frac{1}{10^1}$, 10^{-2} означает $\frac{1}{10^2}$, 10^{-3} означает $\frac{1}{10^3}$ и т. д. Такое соглашение принимается для степеней с любыми основаниями, отличными от нуля.

Определение. Если $a \neq 0$ и n — целое отрицательное число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Пользуясь этим определением, найдём, что

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25};$$

$$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -8.$$

Выражению 0^n при целом отрицательном n (так же как и при $n = 0$) не приписывают никакого значения; это выражение не имеет смысла.

Напомним, что при натуральном n это выражение имеет смысл и его значение равно нулю.

Вернёмся к примеру, рассмотренному в начале пункта. Теперь мы знаем, что запись $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г, выражающая массу атома водорода, означает

$$1{,}674 \cdot 10^{-24}\text{ г} = 1{,}674 \cdot \frac{1}{10^{24}}\text{ г} = 1{,}674 : 10^{24}\text{ г} = \underbrace{0{,}000\dots0}_{24\text{ нуля}}1674\text{ г}.$$

Упражнения

1172. Замените степень с целым отрицательным показателем дробью:

а) 10^{-6}; г) x^{-20};
б) 9^{-2}; д) $(ab)^{-3}$;
в) a^{-1}; е) $(a + b)^{-4}$.

1173. Замените дробь степенью с отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{10^2}$; б) $\frac{1}{6^7}$; в) $\frac{1}{x^7}$; г) $\frac{1}{y^{10}}$; д) $\frac{1}{7}$.

1174. Представьте числа:

а) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ в виде степени с основанием 2;

б) $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25, 125 в виде степени с основанием 5.

1175. Представьте числа:

а) $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, 81 в виде степени с основанием 3;

б) 100, 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 в виде степени с основанием 10.

1176. Вычислите:

а) 4^{-2}; в) $(-1)^{-9}$; д) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; ж) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; и) $0{,}01^{-2}$;

б) $(-3)^{-3}$; г) $(-1)^{-20}$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; з) $\left(-2\frac{2}{5}\right)^{-2}$; к) $1{,}125^{-1}$.

1177. Найдите значение выражения:

а) -10^{-4}; в) $(-0{,}8)^{-2}$; д) $-(-2)^{-3}$;
б) $-0{,}2^{-3}$; г) $(-0{,}5)^{-5}$; е) $-(-3)^{-2}$.

1178. Вычислите:

а) $(-4)^{-3}$; в) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; д) $-0{,}4^{-4}$;

б) $2{,}5^{-1}$; г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; е) $-\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

1179. Сравните с нулём значение степени:

а) 9^{-5}; в) $(-7{,}1)^{-6}$; д) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-5}$;

б) $2{,}6^{-4}$; г) $(-3{,}9)^{-3}$; е) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

1180. Верно ли, что:
а) если $a > 0$ и n — целое число, то $a^n > 0$;
б) если $a < 0$ и n — чётное отрицательное число, то $a^n > 0$;
в) если $a < 0$ и n — нечётное отрицательное число, то $a^n < 0$?

1181. Найдите значение выражения x^p, если:
а) $x = -7$, $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -6$;
б) $x = 8$, $p = -1$; г) $x = -9$, $p = 0$.

1182. Какое значение принимает выражение $-x^p$, если:
а) $x = -1$, $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -1$;
б) $x = 0{,}5$, $p = -2$; г) $x = 0{,}5$, $p = -5$?

1183. Найдите значения выражений x^n и x^{-n}, если:

а) $x = \frac{1}{2}$, $n = 2$; в) $x = \frac{2}{3}$, $n = -2$;

б) $x = -\frac{1}{3}$, $n = 3$; г) $x = -1{,}5$, $n = 3$.

1184. Найдите значение выражения:
а) $8 \cdot 4^{-3}$; д) $3^{-2} + 4^{-1}$;
б) $-2 \cdot 10^{-5}$; е) $2^{-3} - (-2)^{-4}$;
в) $18 \cdot (-9)^{-1}$; ж) $0{,}5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$;
г) $10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; з) $0{,}3^0 + 0{,}1^{-4}$.

1185. Вычислите:
а) $6 \cdot 12^{-1}$; г) $1{,}3^0 - 1{,}3^{-1}$;
б) $-4 \cdot 8^{-2}$; д) $12 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$;
в) $6^{-1} - 3^{-2}$; е) $25 + 0{,}1^{-2}$.

1186. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:
а) $3x^{-5}$; д) $x^{-1}c^{-3}$;
б) $x^{-4}y$; е) $-9yz^{-8}$;
в) $5ab^{-7}$; ж) $2(x + y)^{-4}$;
г) $5(ab)^{-7}$; з) $10x^{-1}(x - y)^{-3}$.

1187. Представьте в виде произведения дробь:

а) $\frac{3}{b^2}$; в) $\frac{2a^8}{c^5}$; д) $\frac{1}{x^2y^3}$; ж) $\frac{2a}{(a-2)^2}$;

б) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{a^5}{7b^3}$; е) $\frac{(a+b)^2}{b^4c^4}$; з) $\frac{(c+b)^5}{2(a-b)^4}$.

1188. Представьте в виде дроби выражение:

а) $a^{-2} + b^{-2}$; в) $(a + b^{-1})(a^{-1} - b)$;

б) $xy^{-1} + xy^{-2}$; г) $(x - 2y^{-1})(x^{-1} + 2y)$.

1189. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$; б) $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2})$.

1190. Определите множество значений x, при которых функция $y = (x - 2)^{-1}$ принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения.

П

1191. При каких натуральных n дробь $\frac{(n-7)^2}{n}$ принимает натуральные значения?

1192. Найдите коэффициент обратной пропорциональности, зная, что её график проходит через точку:

а) $A(1{,}5;\ 8)$; б) $B(0{,}04;\ -25)$.

48. Свойства степени с целым показателем

Известные вам свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем (нужно только предполагать, что основание степени не равно нулю).

Для каждого $a \neq 0$ и любых целых m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad (3)$$

для каждых $a \neq 0$, $b \neq 0$, и любого целого n

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Эти свойства можно доказать, опираясь на определение степени с целым отрицательным показателем и свойства степени с натуральным показателем.

Докажем, например, справедливость свойства **(1)** (основного свойства степени) для случая, когда показатели степеней — целые отрицательные числа. Иначе говоря, докажем, что если k и p — натуральные числа и $a \neq 0$, то $a^{-k} \cdot a^{-p} = a^{-k-p}$.

Имеем

$$a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^k \cdot a^p} = \frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)} = a^{-k-p}.$$

Заменяя степени a^{-k} и a^{-p} дробями $\frac{1}{a^k}$ и $\frac{1}{a^p}$ и дробь $\frac{1}{a^{k+p}}$ степенью $a^{-(k+p)}$, мы воспользовались определением степени с целым отрицательным показателем. Заменяя произведение $a^k a^p$ степенью a^{k+p}, мы использовали основное свойство степени с натуральным показателем.

Из свойств степени вытекает, что действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями.

Пример 1. Преобразуем произведение $a^{-17} \cdot a^{21}$.

▶ При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а показатели степеней складывают. Имеем

$$a^{-17} \cdot a^{21} = a^{-17+21} = a^4. \triangleleft$$

Пример 2. Преобразуем частное $b^2 : b^5$.

▶ При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя. Имеем

$$b^2 : b^5 = b^{2-5} = b^{-3}. \triangleleft$$

Для степеней с натуральными и нулевым показателями мы могли применять правило деления степеней с одинаковыми основаниями в том случае, когда показатель степени делимого был не меньше показателя степени делителя. Теперь, после введения степеней с целыми показателями, это ограничение снимается: показатели степеней делимого и делителя могут быть любыми целыми числами.

Пример 3. Упростим выражение $(2a^3b^{-5})^{-2}$.

▶ Сначала применим свойство (4), а затем — свойство (3). Имеем

$$(2a^3b^{-5})^{-2} = 2^{-2} \cdot (a^3)^{-2}(b^{-5})^{-2} = \frac{1}{4}a^{-6}b^{10}. \triangleleft$$

Упражнения

1193. Найдите значение выражения:

а) $3^{-4} \cdot 3^{6}$; г) $2^{10} : 2^{12}$; ж) $(2^{-4})^{-1}$;
б) $2^{4} \cdot 2^{-3}$; д) $5^{-3} : 5^{-3}$; з) $(5^{2})^{-2} \cdot 5^{3}$;
в) $10^{8} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}$; е) $3^{-4} : 3$; и) $3^{-4} \cdot (3^{-2})^{-4}$.

1194. Вычислите:

а) $5^{-15} \cdot 5^{16}$; в) $4^{-8} : 4^{-9}$; д) $(2^{-2})^{-3}$;
б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{4}$; е) $(0{,}1^{-3})^{-1}$.

1195. Докажите, что степени любого отличного от нуля числа с противоположными показателями взаимно обратны.

1196. Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ при любом целом n, $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

1197. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $0{,}01^{-2}$; д) $0{,}002^{-1}$;
б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; е) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-5}$.

1198. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:

а) $27 \cdot 3^{-4}$; б) $(3^{-1})^{5} \cdot 81^{2}$; в) $9^{-2} : 3^{-6}$; г) $81^{3} : (9^{-2})^{-3}$.

1199. Представьте выражение в виде степени с основанием 2 и найдите его значение:

а) $\frac{1}{16} \cdot 2^{10}$; б) $32 \cdot (2^{-4})^{2}$; в) $8^{-1} \cdot 4^{3}$; г) $4^{5} \cdot 16^{-2}$.

1200. Представьте выражение, в котором m — целое число, в виде степени с основанием 5:

а) $5^{m} \cdot 5^{m+1} \cdot 5^{1-m}$; б) $(5^{m})^{2} \cdot (5^{-3})^{m}$; в) $625 : 5^{4m-2}$.

1201. Вычислите:

а) $8^{-2} \cdot 4^{3}$; в) $10^{0} : 10^{-3}$; д) $\frac{2^{-21}}{4^{-5} \cdot 4^{-6}}$; ж) $\frac{3^{-10} \cdot 9^{8}}{(-3)^{2}}$;
б) $9^{-6} \cdot 27^{5}$; г) $125^{-4} : 25^{-5}$; е) $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$; з) $\frac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^{3}}$.

1202. Найдите значение выражения:

а) $125^{-1} \cdot 25^2$; в) $(6^2)^6 : 6^{14}$; д) $\dfrac{(2^3)^5 \cdot (2^{-6})^2}{4^2}$;

б) $16^{-3} \cdot 4^6$; г) $12^0 : (12^{-1})^2$; е) $\dfrac{(3^{-2})^3 \cdot 9^4}{(3^3)^2}$.

1203. *(Для работы в парах.)* Знaя, что m — целое число, сократите дробь:

а) $\dfrac{25^m}{5^{2m-1}}$; б) $\dfrac{6^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}}$.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

1204. Представьте какими-либо тремя способами выражение x^{-10} в виде произведения степеней.

1205. Представьте выражение a^{12}, где $a \neq 0$, в виде степени:
а) с основанием a^4; б) с основанием a^{-6}.

1206. Представьте в виде степени с основанием x частное:
а) $x^{10} : x^{12}$;
б) $x^0 : x^{-5}$;
в) $x^{n-1} : x^{-8}$, где n — целое число;
г) $x^6 : x^{n+2}$, где n — целое число.

1207. Упростите выражение:

а) $1{,}5ab^{-3} \cdot 6a^{-2}b$; г) $3{,}2x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy$;

б) $\frac{3}{4}m^{-2}n^4 \cdot 8m^3n^{-2}$; д) $\frac{1}{2}p^{-1}q^{-3} \cdot \frac{1}{6}p^2q^{-5}$;

в) $0{,}6c^2d^4 \cdot \frac{1}{3}c^{-2}d^{-4}$; е) $3\frac{1}{3}a^5b^{-18} \cdot 0{,}6a^{-1}b^{20}$.

1208. Найдите значение выражения:
а) $0{,}2a^{-2}b^4 \cdot 5a^3b^{-3}$ при $a = -0{,}125$, $b = 8$;
б) $\frac{1}{27}a^{-1}b^{-5} \cdot 81a^2b^4$ при $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{1}{14}$.

1209. Упростите выражение и найдите его значение:
а) $1{,}6x^{-1}y^{12} \cdot 5x^3y^{-11}$ при $x = -0{,}2$, $y = 0{,}7$;
б) $\frac{5}{6}x^{-3}y^3 \cdot 30x^3y^{-4}$ при $x = 127$, $y = \frac{1}{5}$.

1210. Представьте степень в виде произведения:

а) $(a^{-1}b^{-1})^{-2}$; в) $(0{,}5a^{-3}b^{5})^{-12}$; д) $\left(\frac{1}{3}p^{-2}q^{2}\right)^{-3}$;

б) $(x^{3}y^{-1})^{2}$; г) $(-2m^{5}n^{-3})^{2}$; е) $(-0{,}5x^{-3}y^{4})^{3}$.

1211. Преобразуйте в произведение:

а) $(6a^{-5}b)^{-1}$; в) $(-0{,}3x^{-5}y^{4})^{-2}$;

б) $\left(\frac{3}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; г) $\left(\frac{7}{8}p^{-6}q\right)^{-1}$.

1212. Представьте в виде степени произведения выражение:

а) $0{,}0001x^{-4}$; в) $0{,}0081a^{8}b^{-12}$;

б) $32y^{-5}$; г) $10^{n}x^{-2n}y^{3n}$, где n — целое число.

1213. Упростите выражение:

а) $\frac{12x^{-5}}{y^{-6}}\cdot\frac{y}{36x^{-9}}$; в) $\frac{5x^{-1}y^{3}}{3}\cdot\frac{9x^{6}}{y^{-2}}$;

б) $\frac{63a^{2}}{2b^{-5}}\cdot\frac{18b^{2}}{7a}$; г) $\frac{16p^{-1}q^{2}}{5}\cdot\frac{25p^{6}}{64q^{-8}}$.

1214. Преобразуйте выражение:

а) $\frac{13x^{-2}}{y}\cdot\frac{y^{12}}{39x^{-3}}$; в) $\frac{p}{3c^{-2}}\cdot\frac{15c}{p^{-2}}$;

б) $\frac{5a^{5}}{b^{-7}}\cdot\frac{7b^{-3}}{25a}$; г) $\frac{26x^{17}}{y^{-8}}\cdot\frac{y}{13x^{25}}$.

1215. Упростите выражение:

а) $(0{,}25x^{-4}y^{-3})^{2}\cdot\left(\frac{x^{-3}}{4y^{2}}\right)^{-3}$; в) $\left(\frac{c^{-4}}{10a^{5}b^{2}}\right)^{-2}\cdot(5a^{3}bc^{2})^{-2}$;

б) $\left(\frac{a^{-3}b^{4}}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{a^{-2}b^{3}}\right)^{-3}$; г) $\left(\frac{x^{2}y^{-3}}{6z}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{x^{2}y^{-2}}{9z}\right)^{2}$.

1216. Преобразуйте выражение:

а) $\left(\frac{2x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2}\cdot 12xy^{5}$; в) $(2a^{-2}b^{3})^{2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-6}$;

б) $4a^{3}b^{-1}\cdot\left(\frac{ab}{5}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{2x^{2}}{y^{3}}\right)^{-1}\cdot(x^{-1}y)^{3}$.

1217. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $8x^2 - 6x + n = 0$ и $x_1^{-1} + x_2^{-1} = 6$. Найдите n.

П

1218. Решите уравнение

$$\frac{2x-7}{x+1}+\frac{3x+2}{x-1}=7.$$

1219. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{1}{|x|-x}$; б) $y=\frac{1}{|x|+x}$.

1220. Сократите дробь $\frac{\overline{ac}}{\overline{abc}}$, зная, что $b = a + c$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение степени с целым отрицательным показателем.
2. Сформулируйте свойства произведения и частного степеней с одинаковыми основаниями и целыми показателями.
3. Как возвести степень в степень?
4. Как возвести произведение и частное в степень?

§ 16 СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА

49. Понятие стандартного вида числа

В науке и технике встречаются как очень большие, так и очень малые положительные числа. Например, большим числом выражается объём Земли — 1 083 000 000 000 км^3, а малым — диаметр молекулы воды, который равен 0,0000000003 м.

В обычном десятичном виде большие и малые числа неудобно читать и записывать, неудобно выполнять с ними какие-либо действия. В таком случае полезным оказывается представление числа в виде $a \cdot 10^n$, где n — целое число. Например:

$$125\,000 = 0{,}125 \cdot 10^6; \quad 0{,}0031 = 3{,}1 \cdot 10^{-3};$$
$$0{,}237 = 23{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Представим каждое из чисел 1 083 000 000 000 и 0,0000000003 в виде произведения числа, заключённого между единицей и десятью, и соответствующей степени числа 10:

$$1\,083\,000\,000\,000 = 1{,}083 \cdot 10^{12};$$
$$0{,}0000000003 = 3 \cdot 10^{-10}.$$

Говорят, что мы записали числа 1 083 000 000 000 и 0,0000000003 в *стандартном виде*. В таком виде можно представить любое положительное число.

> Стандартным видом числа α называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число. Число n называется *порядком числа* α.

Например, порядок числа, выражающего объём Земли в кубических километрах, равен 12, а порядок числа, выражающего диаметр молекулы воды в метрах, равен −10.

Порядок числа даёт представление о том, насколько велико или мало это число. Так, если порядок числа α равен 3, то это означает, что $1000 \leqslant \alpha < 10\,000$. Если порядок числа α равен −2, то $0{,}01 < \alpha < 0{,}1$. Большой положительный порядок показывает, что число очень велико. Большой по модулю отрицательный порядок показывает, что число очень мало.

Пример 1. Представим в стандартном виде число $\alpha = 4\,350\,000$.

▶ В числе α поставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна цифра. В результате получим 4,35. Отделив запятой 6 цифр справа, мы уменьшили число α в 10^6 раз. Поэтому α больше числа 4,35 в 10^6 раз. Отсюда

$$\alpha = 4{,}35 \cdot 10^6. \ ◁$$

Пример 2. Представим в стандартном виде число $\alpha = 0{,}000508$.

▶ В числе α переставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна отличная от нуля цифра. В результате получится 5,08. Переставив запятую на четыре знака вправо, мы увеличили число α в 10^4 раз. Поэтому число α меньше числа 5,08 в 10^4 раз. Отсюда

$$\alpha = 5{,}08 : 10^4 = 5{,}08 \cdot \frac{1}{10^4} = 5{,}08 \cdot 10^{-4}. \ ◁$$

Упражнения

1221. Назовите порядок числа, представленного в стандартном виде:

а) $1{,}2 \cdot 10^9$; в) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$; д) $4{,}42 \cdot 10^5$;
б) $3{,}6 \cdot 10^3$; г) $6{,}3 \cdot 10^{-1}$; е) $9{,}28 \cdot 10^{-4}$.

1222. Запишите в стандартном виде число:

а) 52 000 000; в) 675 000 000; д) 0,00281;
б) 2 180 000; г) 40,44; е) 0,0000035.

1223. Запишите в стандартном виде:

а) $45 \cdot 10^3$; б) $117 \cdot 10^5$; в) $0{,}74 \cdot 10^6$; г) $0{,}06 \cdot 10^5$.

1224. Представьте число в стандартном виде:

а) 1 024 000; в) 21,56; д) 0,000004; ж) $508 \cdot 10^{-7}$;
б) 6 000 000; г) 0,85; е) 0,000282; з) $0,042 \cdot 10^{2}$.

1225. Масса Земли приближённо равна 6 000 000 000 000 000 000 000 т, а масса атома водорода 0,0000000000000000000000017 г. Запишите в стандартном виде массу Земли и массу атома водорода.

1226. Выразите:

а) $3,8 \cdot 10^{3}$ т в граммах; в) $8,62 \cdot 10^{-1}$ кг в тоннах;
б) $1,7 \cdot 10^{-4}$ км в сантиметрах; г) $5,24 \cdot 10^{5}$ см в метрах.

1227. Представьте:

а) $2,85 \cdot 10^{8}$ см в километрах;
б) $4,6 \cdot 10^{-2}$ м в миллиметрах;
в) $6,75 \cdot 10^{15}$ г в тоннах;
г) $1,9 \cdot 10^{-2}$ т в килограммах.

1228. Выполните умножение:

а) $(3,25 \cdot 10^{2}) \cdot (1,4 \cdot 10^{3})$; б) $(4,4 \cdot 10^{-3}) \cdot (5,2 \cdot 10^{4})$.

50. Решение задач с большими и малыми числами

Использование стандартного вида числа позволяет оперировать большими и малыми числами в самых разных ситуациях. Покажем, как удобна эта запись, если требуется сравнить очень большие числа.

Пример 1. В таблице приведены планеты Солнечной системы и для каждой из них указано её примерное расстояние до Солнца.

Выясним, какая из планет, ближе всего к Солнцу и какая — дальше всего от Солнца. Расположим планеты в порядке их удалённости от Солнца.

Планета	Расстояние, км
Земля	$1,5 \cdot 10^{8}$
Юпитер	$7,78 \cdot 10^{8}$
Меркурий	$5,8 \cdot 10^{7}$
Нептун	$4,497 \cdot 10^{9}$
Уран	$2,87 \cdot 10^{9}$
Сатурн	$1,42 \cdot 10^{9}$
Венера	$1,08 \cdot 10^{8}$
Марс	$2,28 \cdot 10^{8}$

▶ Все расстояния представлены в стандартном виде, т. е. нам известен порядок каждой из этих величин. Из таблицы видно, что наименьший порядок имеет число, равное $5,8 \cdot 10^{7}$, т. е. ближе всего к Солнцу находится Меркурий. Наибольший порядок, равный девяти, имеют числа, выражающие расстояния от Солнца до трёх планет — Нептуна, Урана и Сатурна. Так как порядок этих чисел один и тот же, то, чтобы узнать какое из расстояний больше, надо сравнить первые множители — числа 4,497; 2,87 и 1,42. Наибольшее из этих чисел — это число 4,497, значит, дальше всего от Солнца находится Нептун.

Один и тот же порядок, равный 8, имеют числа, выражающие расстояния от Солнца до планет Земля, Юпитер, Венера и Марс. Так как $1{,}08 < 1{,}5 < 2{,}28 < 7{,}78$, то расположение этих планет таково: Венера, Земля, Марс, Юпитер. Окончательно имеем: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун. ◁

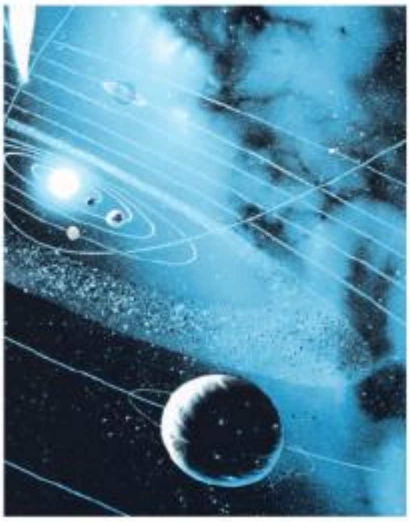
Стандартный вид числа удобен и при сравнении очень малых чисел.

Пример 2. В жизни нас постоянно сопровождают различные шумы. В акустике силу звука измеряют в Вт/см^2 (ватт на квадратный сантиметр). Сравним шорох листьев в лесу в тихую погоду (он оценивается как $1 \cdot 10^{-15}$ Вт/см^2) и шум на оживлённой городской улице ($1 \cdot 10^{-10}$ Вт/см^2).

▶ Из этого сравнения видно, что шум на городской улице на 5 порядков, т. е. в 100 000 раз, громче шороха листьев в лесу. Нетрудно сделать вывод о том, какой из этих «шумов» благоприятнее для человека. ◁

Упражнения

1229. Какой путь пройдёт свет за $2{,}8 \cdot 10^6$ с (скорость света равна $3 \cdot 10^5$ км/с)?



1230. *(Для работы в парах.)* а) Масса Земли $6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг, а масса Марса $6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг. Что больше: масса Земли или масса Марса — и во сколько раз? Результат округлите до десятых.

б) Масса Юпитера $1{,}90 \cdot 10^{27}$ кг, а масса Венеры $4{,}87 \cdot 10^{24}$ кг. Что меньше: масса Юпитера или масса Венеры — и во сколько раз? Результат округлите до единиц.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены вычисления.

3) Исправьте допущенные ошибки.

4) Расположите указанные планеты в порядке возрастания их масс.

1231. Плотность железа $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу железной плиты, длина которой 1,2 м, ширина $6 \cdot 10^{-1}$ м и толщина $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м.

1232. Числа записаны в стандартном виде:
$3{,}76 \cdot 10^5$; $1{,}9987 \cdot 10^5$; $5{,}001 \cdot 10^5$; $0{,}9999 \cdot 10^5$; $1{,}9899 \cdot 10^5$.
Расположите их:
а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.

1233. Числа записаны в стандартном виде:
$7{,}89 \cdot 10^2$; $1{,}11 \cdot 10^8$; $9{,}99 \cdot 10^{-8}$; $1{,}02 \cdot 10^{100}$; $1{,}11 \cdot 10^{11}$.
Расположите их:
а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.

1234. Самой длинной рекой в мире является Амазонка, её длина 7100 км. Вторая по протяжённости река — Нил. Её длина составляет 6670 км. Река Лена тянется на 5100 км, а река Меконг имеет протяжённость 4500 км. Запишите длину этих рек в стандартном виде.

1235. В стакане на 200 г содержится $66{,}822 \cdot 10^{23}$ молекул воды. Найдите вес одной молекулы воды и запишите его в стандартном виде.

1236. В атомной физике за единицу массы принята атомная единица массы (обозначается а. е. м.). Известно, что

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Выразите в граммах массу одного атома водорода, меди, йода и азота, зная, что:
масса атома водорода равна 1,008 а. е. м.,
масса атома меди равна 63,546 а. е. м.,
масса атома йода равна 126,904 а. е. м.,
масса атома азота равна 14,007 а. е. м.

П

1237. Найдите значение выражения $(2-\sqrt{3})\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

1238. При каком значении m сумма корней уравнения

$$3x^2 - 18x + m = 0$$

равна произведению этих корней?

1239. Найдите целые отрицательные значения x, которые являются решением неравенства $\frac{4-3x}{2} - x < 11$.

1240. Замените a каким-либо натуральным числом так, чтобы не имела решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 3x > 40{,}8, \\ 5x - a < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 - 6x < 19, \\ 4x - a < 6. \end{cases}$

Контрольные вопросы и задания

1. Какую запись числа называют его стандартным видом?
2. Покажите на примере, как представить число в стандартном виде.

Для тех, кто хочет знать больше

51. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства

Функция, которую можно задать формулой вида

$$y = x^n,$$

где x — независимая переменная и n — целое число, является *степенной функцией* с целым показателем.

Со степенными функциями $y = x^2$ и $y = x^3$ вы познакомились в курсе алгебры 7 класса. Вам знакома также степенная функция $y = x$ — она является частным случаем прямой пропорциональности $y = kx$ (при $k = 1$).

Рассмотрим теперь функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, выясним свойства этих функций и особенности их графиков. Отметим сразу, что областью определения каждой из этих функций является множество всех действительных чисел, кроме нуля.

Перечислим *свойства* функции $y = x^{-1}$ и особенности её графика.

1. Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.

В самом деле, x и y принимают значения одного знака.

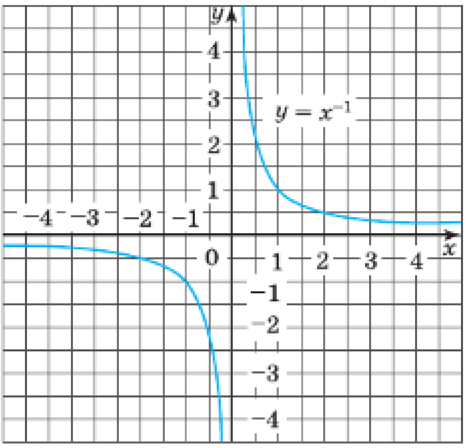


Рис. 78

Так как

$$x^{-1} = \frac{1}{x},$$

то графиком функции является гипербола, расположенная в первой и третьей четвертях координатной плоскости (рис. 78).

2. Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Действительно, если x_0 и $-x_0$ — значения аргумента, то соответствующие им значения функции x_0^{-1} и $(-x_0)^{-1}$ также являются противоположными числами, так как

$$x_0^{-1} = \frac{1}{x_0}$$

и

$$(-x_0)^{-1} = -\frac{1}{x_0}.$$

Если точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^{-1}$, то точка $M'(-x_0;\ -y_0)$ также принадлежит графику этой функции. Значит, каждой точке $M(x_0;\ y_0)$ графика соответствует точка $M'(-x_0;\ -y_0)$ того же графика.

Точки, имеющие противоположные абсциссы и противоположные ординаты, симметричны относительно начала координат. Следовательно, график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно начала координат.

3. Если значения аргумента при $x > 0$ неограниченно возрастают ($x \to +\infty$), то соответствующие им значения функции, оставаясь положительными, неограниченно убывают, т. е. стремятся к нулю ($y \to 0$).

Если значения аргумента при $x > 0$ убывают, т. е. стремятся к нулю ($x \to 0$), **то соответствующие значения функции неограниченно возрастают** ($y \to +\infty$).

Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$.

Если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Таким образом, точки графика, удаляясь от оси y вправо или влево, всё больше приближаются к оси x, а удаляясь от оси x вверх или вниз, всё больше приближаются к оси y.

4. Значения аргумента и соответствующие им значения функции являются взаимно обратными числами.

Действительно, при любых значениях аргумента x верно равенство $xy = 1$. А это означает, что значения x и y являются взаимно обратными числами.

Если точка $M(a;\ b)$ принадлежит графику данной функции, то точка $M'(b;\ a)$ также принадлежит графику этой функции. Точки $M(a;\ b)$ и $M'(b;\ a)$ симметричны относительно прямой $y = x$. Значит, график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно прямой $y = x$.

Выясним теперь *свойства* функции $y = x^{-2}$ и особенности её графика.

1. При любом значении аргумента значения функции — положительные числа.

Это следует из того, что

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

при любом $x \neq 0$. Значит, график функции $y = x^{-2}$ расположен выше оси x.

2. Противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции.

Действительно, если x_0 и $-x_0$ — значения аргумента, то x_0^{-2} и $(-x_0)^{-2}$ — соответствующие им значения функции, но

$$x_0^{-2} = (-x_0)^{-2}.$$

Отсюда следует, что каждой точке $M(x_0; y_0)$ графика функции соответствует точка $M'(-x_0; y_0)$ того же графика. Значит, график функции $y = x^{-2}$ симметричен относительно оси y.

3. Если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Действительно, если $|x|$ неограниченно возрастает ($|x| \to +\infty$), то $|x^{-2}|$ убывает, оставаясь положительным числом, т. е. y стремится к нулю. Если $|x| \to 0$, то x^{-2} неограниченно возрастает, т. е. $x^{-2} \to +\infty$.

Основываясь на этих свойствах, можно построить график функции $y = x^{-2}$.

Вычислим значения y для некоторых положительных значений аргумента.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$

Построим в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице. Соединив эти точки плавной непрерывной линией, получим одну ветвь графика функции. Вторую ветвь, расположенную во второй координатной четверти, построим симметрично первой относительно оси y. График функции $y = x^{-2}$ изображён на рисунке 79.

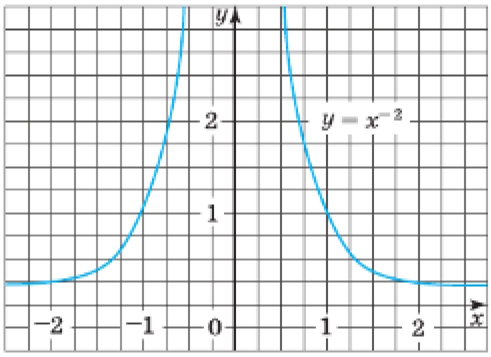


Рис. 79

Упражнения

1241. Известно, что точки $A\left(a; \frac{1}{247}\right)$ и $B(843; b)$ принадлежат гиперболе $y = x^{-1}$. Найдите a и b.

1242. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = x^{-1}$. Выясните, при каких значениях аргумента верны равенство $x = x^{-1}$ и неравенства $x > x^{-1}$ и $x < x^{-1}$ в случае, если:

а) $x > 0$; б) $x < 0$.

1243. Докажите, что прямая $y = -x + l$, где l — некоторое положительное число, и гипербола $y = x^{-1}$:

а) имеют две общие точки, если $l > 2$;

б) имеют одну общую точку, если $l = 2$;

в) не имеют общих точек, если $l < 2$.

1244 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^{-1}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Найдите:

а) значение y, если $x = -2$; 2;

б) значение x, при котором $y = -4$; 4.

1245. Постройте график функции $y = |x^{-1}|$. Как расположен этот график относительно оси y?

1246. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^{-1}$, где $x > 0$, и $y = x^{-2}$, где $x > 0$. Сравните значения x^{-1} и x^{-2}, если:

а) $0 < x < 1$; б) $x > 1$.

1247. Известно, что точки $A\left(a; \frac{1}{2601}\right)$ и $B(0{,}0625; b)$ принадлежат графику функции $y = x^{-2}$. Найдите a и b.

1248. Расположите в порядке возрастания числа x_0^2, x_0, x_0^0, x_0^{-1}, x_0^{-2}, зная, что:

а) $0 < x_0 < 1$; б) $x_0 > 1$.

1249. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } -2 \leqslant x < -1, \\ x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^{-2}, \text{ если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Сколько общих точек имеет этот график с прямой $y = a$ в случае, когда:

а) $a = 2$; б) $a = 1$; в) $a = \frac{1}{2}$; г) $a = 0$?

1250. Дана функция

$$y = \begin{cases} x^{-1}, \text{ если } x < -\frac{1}{2}, \\ 4x, \text{ если } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ x^{-1}, \text{ если } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Сколько корней имеет уравнение:

а) $y = 2$; б) $y = \frac{1}{3}$; в) $y = 0$; г) $y = -3$?

Дополнительные упражнения к главе VI

К параграфу 15

1251. Вычислите:

а) $-0{,}25^{-2} \cdot 100$; г) $0{,}1^{-1} + 1{,}1^0$; ж) $(-0{,}2)^3 \cdot (-0{,}1)^2$;

б) $0{,}01 \cdot (-0{,}5)^{-3}$; д) $3\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0{,}5$; з) $-6^{-1} \cdot 36^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$;

в) $0{,}2^{-4} \cdot (-1{,}6)$; е) $-4^{-1} \cdot 5 + 2{,}5^2$; и) $-(-1)^0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5$.

1252. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными показателями:

а) $\frac{am^{-2}}{a^{-1}b}$; б) $\frac{(a+b)b}{b^{-1}(a-b)}$; в) $\frac{2a^{-1}b^2}{(a+b)^{-2}}$.

1253. Представьте в виде дроби выражение:

а) $xy^{-2} - x^{-2}y$; в) $mn(n-m)^{-2} - n(m-n)^{-1}$;

б) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$; г) $(x^{-1} + y^{-1})(x^{-1} - y^{-1})$.

1254. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; б) $\dfrac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$.

1255. Представьте выражение в виде степени с основанием 10 (n — целое число):

а) 100^n; б) $0{,}1 \cdot 100^{n+3}$; в) $0{,}01^n \cdot 10^{2-2n}$.

1256. Упростите выражение (n — целое число):

а) $\dfrac{49^n}{7^{2n-1}}$; б) $\dfrac{15^n}{3^{n-1} \cdot 5^{n+1}}$.

1257. Докажите, что значение выражения (m — целое число) не зависит от m:

а) $\dfrac{21^m}{3^{m-1} \cdot 7^{m+1}}$; б) $\dfrac{6^m \cdot 10^{m+1}}{2^{2m} \cdot 15^{m-1}}$.

1258. Представьте выражение $x^{-2} + x^{-1} + x$ в виде произведения двух множителей, один из которых равен:

а) x; б) x^{-1}; в) x^{-2}.

1259. В выражении $a^{-6} + a^{-4}$ вынесите за скобки множитель:

а) a^{-4}; б) a^{-6}.

1260. Упростите выражение: а) $\dfrac{x^5+x^{12}}{x^{-5}+x^{-12}}$; б) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$.

1261. Докажите, что при любом целом n верно равенство:

а) $2^n + 2^n = 2^{n+1}$; б) $2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$.

1262. Сократите дробь (n — целое число): а) $\dfrac{3^{n+1}-3^n}{2}$; б) $\dfrac{2^n+2^{-n}}{4^n+1}$.

1263. Докажите, что выражение принимает одно и то же значение при любых целых значениях переменных:

а) $\dfrac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$; в) $\dfrac{5^m 4^n}{5^{m-2} 2^{2n} + 5^m 2^{2n-1}}$;

б) $\dfrac{5^{n+1} \cdot 2^{n-2} + 5^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$; г) $\dfrac{21^n}{3^{n-1}7^{n+1} + 3^n 7^n}$.

1264. Корни x_1 и x_2 уравнения $nx^2 - 5x + 1 = 0$ связаны соотношением $x_1^{-2} + x_2^{-2} = 13$. Найдите n.

К параграфу 16

1265. Выразите время в секундах и запишите полученное число в стандартном виде:
а) 1 ч; б) 1 сутки; в) 1 год; г) 1 век.

1266. Выполните действия над числами, записанными в стандартном виде:
а) $(3{,}4 \cdot 10^{15}) \cdot (7 \cdot 10^{-12})$; в) $(9{,}6 \cdot 10^{-12}) : (3{,}2 \cdot 10^{-15})$;
б) $(8{,}1 \cdot 10^{-23}) \cdot (2 \cdot 10^{21})$; г) $(4{,}08 \cdot 10^{11}) : (5{,}1 \cdot 10^{-7})$.

1267. Расстояние от Земли до звезды α Центавра равно $2{,}07 \cdot 10^5$ астрономическим единицам (астрономической единицей называется расстояние от Земли до Солнца, которое равно $1{,}495 \cdot 10^8$ км). Выразите это расстояние в километрах.

1268. В 1 ккал содержится $4{,}2 \cdot 10^3$ Дж. Сколько килокалорий в 1 Дж?

1269. В таблице даны обозначения кратных и дольных приставок и соответствующие им множители.

Приставка	Кратность	Обозначение	Приставка	Кратность	Обозначение
мега-	10^6	М	деци-	10^{-1}	д
кило-	10^3	к	санти-	10^{-2}	с
гекто-	10^2	г	милли-	10^{-3}	м
дека-	10^1	да	микро-	10^{-6}	мк

Используя таблицу, выразите:
а) $2{,}5 \cdot 10^2$ Мт в тоннах;
б) $3{,}1 \cdot 10^{10}$ мг в килограммах;
в) $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ гл в литрах;
г) $7 \cdot 10^{-7}$ м в микрометрах;
д) $8{,}4 \cdot 10^{-4}$ ккал в калориях.

1270. Масса Земли $6{,}0 \cdot 10^{21}$ т, а масса Луны $7{,}35 \cdot 10^{19}$ т. На сколько тонн масса Земли больше массы Луны?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1271. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$; б) $\dfrac{8a^{n+2}+a^{n-1}}{16a^{n+4}+4a^{n+2}+a^n}$.

1272. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z+u=5, \\ y+z+u+v=1, \\ z+u+v+x=2, \\ u+v+x+y=0, \\ v+x+y+z=4. \end{cases}$$

1273. Докажите, что уравнение $x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$ не имеет отрицательных корней.

1274. Найдите обыкновенную дробь со знаменателем 21, заключённую между дробями $\dfrac{5}{14}$ и $\dfrac{5}{12}$.

1275. Какой цифрой оканчивается сумма $54^{35}+28^{21}$?

1276. Решите уравнение $x^2-2x+y^2-4y+5=0$.

1277. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2+12x+30=0$.

1278. Найдите корни уравнения $x^2-2x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-13=0$.

1279. Найдите все двузначные числа $\overline{ab}$, где $b>a$, при которых значение дроби $\dfrac{\overline{ab}}{a+b}$ равно целому числу.

1280. Найдите три различные обыкновенные дроби вида $\dfrac{x}{x+1}$, сумма которых равна натуральному числу.

1281. Найдите целые значения x, при которых функция

$$y=\sqrt{20+2\sqrt{91+6x-x^2}}-\sqrt{20-2\sqrt{91+6x-x^2}}$$

принимает целые значения.

1282. Найдите все целые значения функции

$$y=\sqrt{12+2\sqrt{35+2x-x^2}}-\sqrt{12-2\sqrt{35+2x-x^2}},$$

которые она принимает при целых x.

1283. Представьте многочлен x^8+x^4+1 в виде произведения четырёх многочленов ненулевой степени.

1284. Упростите выражение $\dfrac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$. Укажите допустимые значения переменных.

1285. Функция y от x задана формулой $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad-bc\neq 0$. Пусть значениям аргумента x_1, x_2, x_3 и x_4 соответствуют значения функции y_1, y_2, y_3 и y_4. Докажите, что

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}:\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}:\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}.$$

1286. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2-y^2=69$.

1287. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, могут быть представлены в таком же виде.

1288. Пара чисел $x=3$, $y=2$ является решением уравнения $(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})=1$. Покажите, что существует бесконечно много других пар натуральных чисел, удовлетворяющих этому уравнению.

1289. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2+x+m=0$ равна 13?

1290. Решите уравнение $(x^2-a^2)^2=4ax+1$ относительно x.

1291. Найдите наименьшее значение выражения

$$(a-1)(a-2)(a-5)(a-6)+9.$$

1292. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 254. Найдите коэффициент p.

1293. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

1294. Докажите, что при любом натуральном n, большем 2, корни уравнения $x + \frac{1}{x} = n$ — иррациональные числа.

1295. Докажите, что функция $y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$, где $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, линейная.

1296. Из города M в город N вышел автобус со скоростью 40 км/ч. Через четверть часа он встретил ехавшую из города N легковую автомашину. Эта машина доехала до города M, через 15 мин выехала обратно в город N и обогнала автобус в 20 км от города N. Найдите расстояние между городами M и N, если скорость легковой автомашины 50 км/ч.

1297. Два мальчика стартовали по беговой дорожке длиной 50 м с интервалом 1 с. Мальчик, стартовавший вторым, догнал первого в 10 м от линии старта, добежал до конца дорожки и побежал обратно с той же скоростью. На каком расстоянии от конца дорожки он встретил первого мальчика, если известно, что эта встреча произошла через 10 с после старта первого мальчика?

1298. Расстояние между пристанями A и B теплоход проходит по течению за 5 ч, а против течения — за 6 ч. За сколько часов проплывает по течению это расстояние плот?

1299. Катер прошёл по течению 90 км за некоторое время. За то же время он прошёл бы против течения 70 км. Какое расстояние за это время проплывёт плот?

1300. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились в 30 км от пункта B. Прибыв в пункты A и B, они повернули обратно. Вторая встреча произошла в 18 км от пункта A. Найдите расстояние между пунктами A и B.

1301. Из A в B и из B в A выехали одновременно два мотоциклиста. Первый прибыл в B через 2,5 ч после встречи, а второй прибыл в A через 1,6 ч после встречи. Сколько часов был в пути каждый мотоциклист?

1302. Из A в B и из B в A выехали одновременно два автомобиля и встретились через 3 ч. Первый автомобиль пришёл в B на 1,1 ч позже, чем второй в A. Во сколько раз скорость второго автомобиля больше скорости первого?

1303. Заготовленную в карьере руду первый самосвал может вывезти на 3 ч быстрее, чем второй. Если треть руды вывезет первый самосвал, а потом оставшуюся часть вывезет второй, то будет затрачено на $7\frac{1}{3}$ ч больше, чем при одновременной работе обоих самосвалов. За сколько часов может вывезти руду каждый самосвал?

1304. Два слесаря получили задание. Для его выполнения первому слесарю понадобится на 7 ч больше, чем второму. После того как оба слесаря выполнили половину задания, работу пришлось заканчивать одному второму слесарю, и поэтому задание было выполнено на 4,5 ч позднее, чем если бы всю работу они выполнили вместе. За сколько часов мог бы выполнить задание каждый слесарь?

1305. Дано двузначное число. Число его единиц на 3 меньше числа десятков. Произведение этого числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 574. Найдите данное число.

1306. Найдите члены пропорции $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$, в которой первый член на 6 больше второго, а третий на 5 больше четвёртого. Сумма квадратов всех членов равна 793.

1307. Из города по двум взаимно перпендикулярным дорогам вышли в разное время два пешехода. Скорость первого пешехода 4 км/ч, а второго — 5 км/ч. Сейчас первый находится в 7 км от города, а второй — в 10 км. Через сколько часов расстояние между пешеходами будет равно 25 км?

1308. Докажите, что если $a + c = 2b$ и $2bd = c(b + d)$, причём $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1309. Постройте график функции, заданной формулой $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1310. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = |x + 2| + |x - 2|$; б) $y = |x + 1| - |x - 1|$.

1311. Постройте график функции, заданной формулой $y = x + \frac{1}{x}$.

1312. Пересекает ли график функции $y = \frac{3x+1}{x}$ прямую:

а) $x = 0$; б) $y = 0$; в) $x = 3$; г) $y = 3$?

1313. Постройте график функции:

а) $y = \frac{2x+3}{x}$; в) $y = \frac{12}{x-4}$;

б) $y = \frac{4-5x}{x}$; г) $y = -\frac{6}{x+3}$.

1314. Докажите, что графиком уравнения $xy - 2x + 3y - 6 = 0$ является пара пересекающихся прямых.

1315. Докажите, что графиком уравнения $(y - 2)(y + 3) = 0$ является пара параллельных прямых.

1316. Постройте график уравнения:

а) $xy + 3x = 0$;

б) $(x - y)(y - 5) = 0$;

в) $(xy - 6)(y - 3) = 0$;

г) $(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$;

д) $x^2 - 4 = 0$;

е) $y^2 - 9 = 0$.

1317. Докажите, что если числа a, b и c таковы, что $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$, $c + a \neq 0$, то при

$$x = \frac{a - b}{a + b}, \quad y = \frac{b - c}{b + c}, \quad z = \frac{c - a}{c + a}$$

верно равенство

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z).$$

1318. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько точек отмечено на плоскости, если известно, что всего проведено 45 прямых?

1319. Учитель раздал ученикам 27 карточек, на каждой из которых было написано целое число, и попросил вместо этого числа написать по очереди на доске куб этого числа или его квадрат. Возникающие одинаковые числа с доски стирались. Приведите пример исходного набора чисел, чтобы на доске в итоге оказалось наименьшее возможное количество чисел, если все исходные числа на карточках различны?

1320. Докажите тождество

$$\sqrt{\frac{a^2 + 6ab + 25b^2}{a - 2\sqrt{ab} + 5b} - 4b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

1321. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x(x - 2) = y + 12x, \\ xy - 5 = 0? \end{cases}$$

1322. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}09, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 5, \\ y + x^2 = -2. \end{cases}$

1323. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - x^2 = -1, \\ y - 2x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - 1 = 0, \\ y + x^2 = 3. \end{cases}$

1324. Найдите решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} (2x - y)(2x + y) = 3, \\ 2y - 3(x + y) = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x - y) + y = 5, \\ (2x - y)^2 = 5x + 15. \end{cases}$

1325. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{2}{y-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{x-2} = -\frac{3}{y}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{y+1} = \frac{2}{x-1}, \\ \frac{4}{x+2} + \frac{1}{y-1} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

1326. Найдите решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 - y = -6, \\ 2x^2 - 3y^2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 16, \\ 3x^2 + xy - x = 18. \end{cases}$

1327. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 7xy + 2x^2 - 4y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + y = -11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2 + 2xy - 3x - y = 0, \\ 2x^2 - y^2 + 2x + y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

1328. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy = -2, \\ (x - y)^2 + x + y = 10. \end{cases}$$

1329. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y = 1, \\ x^2 + xy - 6y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(3x - 2y) = y^2, \\ 3y^2 = 2x(x + 2) - 3. \end{cases}$

1330. Найдите решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 - xy = y^2 + 5, \\ x^2 - xy = y^2 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 2xy - 1, \\ 2x^2 - y^2 = 2xy - 1. \end{cases}$

1331. От пристани отправился первый катер. Через 1 ч вслед за ним отправился второй катер и догнал первый в 30 км от пристани. Если бы с момента отправления второго катера первый катер увеличил скорость на 10 км/ч, то второй догнал бы его в 90 км от пристани. Найдите скорость каждого катера.

1332. Артель выполнила работу за 20 дней. Если бы в артели было на 4 человека больше и рабочий день увеличился бы на 1 ч, то работа была бы выполнена за 10 дней. Если бы в артели было на 1 человека меньше, а рабочий день сократился на 1 ч, то для выполнения работы потребовалось бы 30 дней. Сколько человек было в артели и какой продолжительности был у них рабочий день?

1333. Благодаря применению в фермерском хозяйстве новых технологий урожайность гречихи возросла на 4 ц с 1 га. В результате было собрано не 147 ц, как в прошлом году, а на 3 ц больше, хотя под гречиху отвели на 1 га меньше. Какова была урожайность гречихи с 1 га в прошлом и текущем годах и какая площадь была отведена в эти годы в фермерском хозяйстве под гречиху?

1334. (Задача Безу, XVIII в.) Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоила ему лошадь. За какую сумму он её купил?

1335. Положив в банк 2000 р., вкладчик получил через два года 2420 р. Какой процент начислял банк ежегодно?

1336. Вкладчик положил деньги в банк и получил через год 2220 р. Если бы вклад был на 200 р. больше, а банк выплачивал на 1% меньше, то вкладчик получил бы 2420 р. Какова была сумма вклада и какой процент выплачивал банк ежегодно?

1337. Фирма ежегодно увеличивала количество выпускаемых приборов на одно и то же число процентов. В результате за два года количество выпускаемых приборов удвоилось. Сколько процентов составлял ежегодный прирост числа выпускаемых приборов?

1338. Бассейн наполнится, если первую трубу открыть на 12 мин, а вторую — на 7 мин. Если же обе трубы открыть на 6 мин, то наполнится $\frac{2}{3}$ бассейна. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть только вторую трубу?

1339. Один каменщик может выложить стену на 6 ч быстрее, чем другой. При совместной работе они за 2 ч выложат половину стены. За сколько часов каждый из них может выложить стену?

1340. Расстояние в 360 км легковой автомобиль проехал на 2 ч быстрее, чем грузовой. Если скорость каждого автомобиля увеличить на 30 км/ч, то грузовой автомобиль затратит на весь путь на 1 ч больше, чем легковой. Найдите скорость каждого автомобиля.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

О дробях

Простейшими дробями пользовались ещё в древности (2 тыс. лет до н. э.). Так, древние вавилоняне имели специальные обозначения для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

В Древнем Египте пользовались *единичными* дробями, т. е. дробями вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Если в результате измерения получалось число $\frac{7}{8}$, то его записывали в виде суммы единичных дробей:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Такой способ представления дробей был удобен в практическом отношении. Например, при решении задачи «Разделить 7 хлебов поровну между восемью лицами» этот способ подсказывал, что нужно иметь 8 половинок, 8 четвертинок и 8 осьмушек, т. е. 4 хлеба нужно разрезать пополам, 2 хлеба — на четвертушки и один хлеб — на осьмушки и распределить доли между лицами.

Одновременно с единичными дробями появились и *систематические* дроби, т. е. дроби, у которых числителями могут быть любые числа, а знаменателями — степени определённого числа (например, десяти, двенадцати, шестидесяти). Шестидесятеричные дроби использовались вплоть до XVII в. До сих пор единицы времени выражаются в шестидесятеричной системе:

$$1 \text{ минута} = \frac{1}{60} \text{ часа}, \quad 1 \text{ секунда} = \frac{1}{60^2} \text{ часа}.$$

Систематическими дробями являются и десятичные дроби.

Дроби общего вида, у которых числители и знаменатели могут быть любыми натуральными числами, появляются в некоторых сочинениях древнегреческого учёного Архимеда (287—212 гг. до н. э.). Древние греки практически умели производить все действия над обыкновенными дробями. Однако современной записи дробей с помощью черты не было. Такая запись дроби была введена лишь в 1202 г. итальянским математиком Л. Фибоначчи (1180—1240) в его произведении «Книга абака». До этого дроби выражали словесно, применяли особую запись, в которой около числа, обозначающего знаменатель дроби, справа ставился штрих, использовались и другие способы записи. Долгое время дроби не называли числами. Иногда их называли «ломаными числами». Только в XVIII в. дроби стали воспринимать как числа. Этому способствовал выход в 1707 г. книги английского учёного И. Ньютона (1643—1727) «Всеобщая арифметика», в которой дроби не только признаются равноправными числами, но и происходит расширение понятия дроби как частного от деления одного выражения на другое. В этой книге, в частности, говорится:

«Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так, $\frac{6}{2}$ означает величину, возникающую при делении 6 на 2..., $\frac{5}{8}$ — величину, возникающую при делении 5 на 8..., $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b..., $\frac{ab - bb}{a + x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab - bb$ на $a + x$, и т. д. Величины такого рода называются дробями».

О действительных числах

Понятие числа зародилось в глубокой древности. На протяжении веков это понятие подвергалось расширению и обобщению. Необходимость выполнять измерения привела к появлению положительных рациональных чисел. Решение уравнений привело к появлению отрицательных чисел. Необходимость наряду с положительными числами рассматривать и отрицательные числа хорошо видна в задачах о прибылях и убытках. Впервые отрицательные числа появились в Китае.

Долгое время отрицательные числа считали «придуманными» и «ложными» и истолковывали их как «долг», как «недостачу».

Не сразу появилось и число нуль. Возможно, что специальный знак для нуля появился только в XIII в.

Правила действий над положительными и отрицательными числами длительное время рассматривались лишь для случаев сложения и вычитания. Например, индийские математики VII в. так формулировали эти правила: «Сумма двух имуществ есть имущество, сумма двух долгов есть долг, сумма имущества и долга равна их разности». Лишь в XVII в. с использованием метода координат, введённого Р. Декартом и П. Ферма, отрицательные числа были признаны в качестве равноправных с положительными.

С появлением отрицательных чисел операции сложения, вычитания и умножения чисел стали выполняться всегда.

Целые и дробные числа являются рациональными числами. Эти числа удобны для вычислений: сумма, разность, произведение и частное (при условии, что делитель отличен от нуля) двух рациональных чисел являются рациональным числом. Рациональные числа обладают свойством плотности, поэтому всякий отрезок можно с любой степенью точности измерить отрезком, принятым за единицу, и его долями и выразить результат измерения рациональным числом. Поэтому рациональные числа долгое время вполне обеспечивали (и обеспечивают до сих пор) практические потребности людей. Тем не менее задача измерения величин привела к появлению новых, иррациональных чисел. Ещё в Древней Греции в школе Пифагора (VI в. до н. э.) было доказано, что нельзя выразить рациональным числом диагональ квадрата, если за единицу измерения принять его сторону. Такие отрезки, как диагональ квадрата и его сторона, назвали несоизмеримыми. В дальнейшем (V—IV вв. до н. э.) древнегреческими математиками была доказана иррациональность $\sqrt{n}$ для любого натурального n, не являющегося точным квадратом.

Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, а позднее и Европы пользовались иррациональными величинами. Однако долгое время не признавали их за равноправные числа. Их признанию способствовало появление «Геометрии» Декарта. На координатной прямой каждое рациональное или иррациональное число изображается точкой, и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует некоторое рациональное или иррациональное, т. е. действительное, число. С введением иррациональных чисел все «просветы» на координатной прямой оказались заполненными. Имея в виду это свойство, говорят, что множество действительных чисел (в отличие от множества рациональных чисел) является непрерывным.

Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби (периодической или непериодической). В XVIII в. Л. Эйлер (1707—1783) и И. Ламберт (1728—1777) показали, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом. Непериодическая бесконечная десятичная дробь представляет иррациональное число. Построение действительных чисел на основе бесконечных десятичных дробей было дано немецким математиком К. Вейерштрассом (1815—1897).

Другие подходы к изложению теории действительного числа были предложены немецкими математиками Р. Дедекиндом (1831—1916) и Г. Кантором (1845—1918).

О квадратных корнях

С давних пор наряду с отысканием площади квадрата по известной длине его стороны приходилось решать и обратную задачу: «Какой должна быть сторона квадрата, чтобы его площадь равнялась a?» Такую задачу умели решать ещё 4 тыс. лет назад вавилонские учёные. Они составляли таблицы квадратов чисел и имевшие большую точность таблицы квадратных корней из чисел.

Вавилоняне использовали метод приближённого извлечения квадратного корня, который состоял в следующем. Пусть a — некоторое число (имеется в виду натуральное число), не являющееся полным квадратом. Представим a в виде суммы $b^2 + c$, где c достаточно мало́ по сравнению с b^2. Тогда

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

Например, если $a = 112$, то $\sqrt{112} = \sqrt{10^2 + 12} \approx 10 + \frac{12}{20} = 10{,}6.$

Проверка показывает, что $10{,}6^2 = 112{,}36$.

Указанный метод извлечения квадратного корня подробно описан древнегреческим учёным Героном Александрийским (I в. н. э.).

В эпоху Возрождения европейские математики обозначали корень латинским словом *Radix* (корень), а затем сокращённо буквой R (отсюда произошёл термин «радикал», которым принято называть знак корня). Некоторые немецкие математики XV в. для обозначения квадратного корня пользовались точкой. Эту точку ставили перед числом, из которого нужно извлечь корень. Позднее вместо точки стали ставить ромбик ♦, впоследствии знак $\vee$ и над выражением, из которого извлекается корень, проводили черту. Затем знак $\vee$ и черту стали соединять. Такие записи встречаются в «Геометрии» Декарта и «Всеобщей арифметике» Ньютона. Современная запись корня появилась в книге «Руководство алгебры» французского математика М. Ролля (1652—1719).

О квадратных уравнениях

Неполные квадратные уравнения и частные виды полных квадратных уравнений ($x^2 \pm x = a$) умели решать вавилоняне (около 2 тыс. лет до н. э.). Об этом свидетельствуют найденные клинописные тексты задач с решениями (в виде рецептов). Некоторые виды квадратных уравнений могли решать древнегреческие математики, сводя их решение к геометрическим построениям. Задачи на построения с помощью циркуля и линейки сводятся по существу к решению квадратных уравнений и рассмотрению выражений, содержащих квадратные корни.

Приёмы решения уравнений без обращения к геометрии даёт Диофант Александрийский (III в.). В дошедших до нас 6 из 13 книг «Арифметика» содержатся задачи с решениями, в которых Диофант объясняет, как надо выбрать неизвестное, чтобы получить решение уравнения вида $ax = b$ или $ax^2 = b$. Способ решения полных квадратных уравнений Диофант изложил в книгах «Арифметика», которые не сохранились.

Правило решения квадратных уравнений, приведённых к виду $ax^2 + bx = c$, где $a > 0$, дал индийский учёный Брахмагупта (VII в.). В трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» хорезмский математик аль-Хорезми разъясняет приёмы решения уравнений, записываемых в современных обозначениях как уравнения вида $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$ (буквами a, b и c обозначены лишь положительные числа, так как отрицательных чисел тогда не признавали), и отыскивает только положительные корни.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведённых к виду $x^2 + bx = c$, было сформулировано немецким математиком М. Штифелем (1487—1567). Выводом формулы решения квадратных уравнений общего вида занимался Виет. Однако своё утверждение он высказывал лишь для положительных корней (отрицательных чисел он не признавал). После трудов нидерландского математика А. Жирара (1595—1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

Формулы, выражающие зависимость корней уравнения от его коэффициентов, были выведены Виетом в 1591 г. Для квадратного уравнения теорема Виета в современных обозначениях выглядела так: корнями уравнения $(a + b)x - x^2 = ab$ являются числа a и b.

О неравенствах

Понятия «больше» и «меньше» наряду с понятием равенства возникли в связи со счётом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Понятиями неравенства пользовались уже древние греки. Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Иначе говоря, Архимед указал границы числа π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ряд неравенств приводит в своём знаменитом трактате «Начала» Евклид. Он, например, доказывает, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического, т. е. что верно неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

В «Математическом собрании» Паппа Александрийского (III в.) доказывается, что для положительных чисел a, b, c и d

$$\text{если } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \text{ то } ad > bc.$$

Однако все эти рассуждения проводили словесно, опираясь в большинстве случаев на геометрическую терминологию. Современные знаки неравенств появились лишь в XVII—XVIII вв. Знаки $<$ и $>$ ввёл английский математик Т. Гарриот (1560—1621), знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — французский математик П. Буге (1698—1758).

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

Выражения и их преобразования

1. Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Степенью числа a с показателем 1 называют само число a:

$$a^1 = a.$$

Степень числа $a \neq 0$ с показателем 0 равна 1:

$$a^0 = 1.$$

2. Свойства степеней с натуральными показателями:

а) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.

б) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, $m \geqslant n$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

в) $(a^m)^n = a^{mn}$.

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.

г) $(ab)^n = a^n b^n$.

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

3. Одночленами называют произведения чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. Например, $5a^2x$, $-3a^2b^3$, 4, x, y^5 — одночлены.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен. Например, степень одночлена $-8a^2b^4$ равна 6.

4. Многочленом называют сумму одночленов. Например, $3x^5 - 4x^2 + 1$, $7a^3b - ab^2 + ab + 6$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $5x^3y + 3x^2y^5 + xy$ равна степени одночлена $3x^2y^5$, т. е. равна 7.

Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

5. При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например,

$$(3ab + 5c^2) + (ab - c^2) = 3ab + 5c^2 + ab - c^2 = 4ab + 4c^2.$$

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например,

$$(6x^2 - y) - (2x^2 - 8y) = 6x^2 - y - 2x^2 + 8y = 4x^2 + 7y.$$

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например,

$$a^2(3ab - b^3 + 1) = 3a^3b - a^2b^3 + a^2.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например,

$$(5x - 1)(3x + 2) = 15x^2 - 3x + 10x - 2 = 15x^2 + 7x - 2.$$

6. Формулы сокращённого умножения:

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

в) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

г) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

д) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

е) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

ж) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

7. Разложением многочлена на множители называют представление многочлена в виде произведения многочленов.

Для разложения многочленов на множители применяют вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращённого умножения. Например, многочлен $5x^3 - x^2y$ можно разложить на множители, вынеся за скобки x^2: $5x^3 - x^2y = x^2(5x - y)$. Многочлен $3x - 3y - ax + ay$ можно разложить на множители, используя способ группировки:

$$3x - 3y - ax + ay = (3x - 3y) - (ax - ay) =$$
$$= 3(x - y) - a(x - y) = (x - y)(3 - a).$$

Многочлен $a^4 - 25x^2$ можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов двух выражений:

$$a^4 - 25x^2 = (a^2)^2 - (5x)^2 = (a^2 - 5x)(a^2 + 5x).$$

Иногда многочлен удаётся разложить на множители, применив последовательно несколько способов.

8. Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Всякое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Каждая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой некоторое рациональное число.

Уравнения

9. Корнем уравнения с одной переменной называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 8 — корень уравнения $3x + 1 = 5x - 15$, так как верно равенство $3 \cdot 8 + 1 = 5 \cdot 8 - 15$.

Решить уравнение с одной переменной — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

10. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни, называют равносильными. Например, уравнения $x^2 = 25$ и $(x + 5)(x - 5) = 0$ равносильны. Каждое из них имеет два корня: -5 и 5. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

При решении уравнений с одной переменной используются следующие свойства:

если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

11. Линейным уравнением с одной переменной называют уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $\frac{b}{a}$. Например, уравнение $7x = 2$ имеет корень $\frac{2}{7}$.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней. Например, уравнение $0 \cdot x = 7$ не имеет корней.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения $ax = b$ является любое число.

12. Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую это уравнение в верное равенство. Например, пара чисел $x = -1$, $y = 4$ — решение уравнения $5x + 3y = 7$.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

В уравнении с двумя переменными можно переносить слагаемые из одной части в другую, изменяя их знаки, и обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, не равное нулю. При этом получаются уравнения, равносильные исходному.

13. Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — числа.

14. Графиком уравнения с двумя переменными называют множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

15. Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение системы в верное равенство. Например, пара чисел $x = 7$, $y = -1$ — решение системы $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - y = 15, \end{cases}$ так как является верным каждое из равенств $7 + (-1) = 6$ и $2 \cdot 7 - (-1) = 15$.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Системы, не имеющие решений, также считают равносильными.

16. Для решения систем линейных уравнений с двумя переменными используются графический способ, способ подстановки, способ сложения.

При графическом способе строят графики линейных уравнений (прямые) и анализируют их расположение:

если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений, причём координаты любой точки прямой являются решением системы;

если прямые параллельны, то система не имеет решений;

если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение, причём координаты точки пересечения прямых являются решением системы.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:

выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;

подставляют в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;

решают получившееся уравнение с одной переменной;

подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали в уравнениях противоположными числами;

складывают почленно левые и правые части уравнений системы;

решают получившееся уравнение с одной переменной;

подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

Функции

17. Функциональная зависимость, или функция, — это такая зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной.

Независимую переменную иначе называют аргументом, а о зависимой переменной говорят, что она является функцией этого аргумента. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

18. Линейной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. Число k называют угловым коэффициентом прямой, являющейся графиком функции $y = kx + b$.

Если $k \neq 0$, то график функции $y = kx + b$ пересекает ось x; если $k = 0$ и $b \neq 0$, то прямая — график функции $y = kx + b$ параллельна оси x; если $k = 0$ и $b = 0$, то график функции совпадает с осью x.

Графики двух линейных функций пересекаются, если их угловые коэффициенты различны, и параллельны, если их угловые коэффициенты одинаковы.

Линейную функцию, задаваемую формулой $y = kx$ при $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

График прямой пропорциональности есть прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях.

19. График функции $y = x^2$ — парабола. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

График функции $y = x^3$ проходит через начало координат и расположен в первой и третьей координатных четвертях. Он симметричен относительно начала координат.

20. График функции $y = |x|$ состоит из двух лучей. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и во второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Список дополнительной литературы

1. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. Баврин И. И. Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М.: Просвещение, 1994.
3. Волошинов А. В. Мудрость Эллады / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2009.
4. Всероссийская олимпиада школьников по математике. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl/11390
5. Галкин Е. В. Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
6. Глейзер Г. И. История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
7. Государственная (итоговая) аттестация выпускников 9-х классов в новой форме. 9 класс. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl/12489
8. Дорофеева А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
9. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 1 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
10. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 2 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
11. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 3 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
12. Кордемский Б. А. Великие жизни в математике: кн. для учащихся 8—11 кл. / Б. А. Кордемский. — М.: Просвещение, 1995.
13. Кордемский Б. А. Удивительный мир чисел: мат. головоломки и задачи для любознательных: кн. для учащихся / Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. — М.: Просвещение, 1996.
14. Московский центр непрерывного математического образования. Рекомендуем рубрики: «Олимпиады для школьников», «Журнал „Квант“». Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11388, http://gotourl.ru/11391
15. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2005.
16. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Внесение множителя под знак корня 95
Вынесение множителя за знак корня 95
Выражение дробное 6
— рациональное 6
— целое 5

Гипербола 46
График уравнения 156
— функции 235
— $y = \frac{k}{x}$ 45
— — $y = \sqrt{x}$ 81

Двойной радикал 103
Дискриминант квадратного уравнения 122
Дополнительный множитель 12
Допустимые значения переменных 6
Дробь бесконечная десятичная 65
— — — непериодическая 67
— — — периодическая 64
— рациональная 6

Интервал 203

Квадратный трёхчлен 137
Корень квадратный 71
— — арифметический 71
Корень квадратного трёхчлена 120

Множество значений функции 235

Неравенства равносильные 207
Неравенство линейное с одной переменной 210

Область определения функции 235
Обратная пропорциональность 46
Объединение множеств 201
Основное свойство дроби 10

Пересечение множеств 200
Подкоренное выражение 71
Полуинтервал 203
Промежутки знакопостоянства 244
Промежутки монотонности 245
Пустое множество 200
Порядок числа 271

Разложение квадратного трёхчлена на множители 141
Решение неравенства 207
— системы неравенств 216
— — уравнений с двумя переменными 156

Свойства функции 243
— числовых неравенств 190, 191
Среднее арифметическое 187
— гармоническое 40
— геометрическое 187
Стандартный вид числа 271
Степень с целым показателем 262

Теорема Виета 132
— — обратная 133
Тождество 11

Уравнение дробное рациональное 146
— квадратное 116
— — неполное 116
— — приведённое 116
— с параметром 172
— целое 146

Формула корней квадратного уравнения 122
Функция возрастающая 245
— убывающая 245

Число действительное 66
— иррациональное 65
— рациональное 64
Числовой луч 204
— отрезок 203
— промежуток 203

ОТВЕТЫ

Глава I

4. а) -10; б) 2,5. **8.** $t = \frac{s}{v_1 + v_2}$; а) 2,5 ч; б) 2 ч. **12.** д) Все числа, кроме 6 и -6; е) все числа, кроме 0 и -7. **19.** а) При $a = 0$; б) при $a = 3$. **20.** а) При $b = 0$; б) при $b = 2$. **27.** а) $\frac{2b}{a^2}$; б) $\frac{1}{2x^2y}$; в) $\frac{p^2q^2}{2}$; г) $2m$; д) $-\frac{8b}{3c}$; е) $\frac{1}{3}$. **29.** а) 1; б) 3. **31.** а) $\frac{a+4b}{2ab}$; б) $\frac{3b-4c}{2b}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{5x}{6}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $3x$. **32.** а) $\frac{y-4}{3}$; б) $\frac{5}{x+3y}$; в) $\frac{c+2}{7c}$; г) $\frac{6c}{d-3}$; д) $\frac{a+5}{a-5}$; е) $\frac{y+3}{y-3}$. **33.** а) $\frac{1}{a+b}$; б) $a^2 + ab + b^2$. **34.** а) 100; б) 1,5. **35.** а) $\frac{x-2}{x}$; б) $\frac{3y}{y+8}$; в) $\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{1}{b^2-2b+4}$. **36.** а) $3x - y$; б) $\frac{a}{2b-1}$; в) $\frac{1}{x-2}$; г) $1 - a + a^2$. **37.** а) $\frac{b+2}{7}$; б) $\frac{4}{b-d}$; в) $\frac{y-1}{x+y}$; г) $\frac{a+c}{a-x}$. **40.** а) -1; б) 1; в) $b - a$; г) $\frac{1}{a-b}$; д) $a + b$; е) 1. **42.** в) $-\frac{3}{b}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) $-\frac{a+5}{3}$; е) $\frac{3}{1-x}$; ж) $\frac{8a+8b}{b-a}$; з) $b - 2$. **43.** а) $\frac{a+b}{b}$; б) $\frac{2-b}{5}$. **44.** а) x^2; б) $-y^4$; в) $-b^5$; г) $c^3 + c^2$. **45.** а) $-\frac{1}{8}$; б) 0,01. **46.** а) $4a - 4b$; б) $9c + 27d$; в) $\frac{9x+18y}{5}$; г) $\frac{2x-y}{50x+25y}$. **52.** а) $-3,2$; б) 0,1; в) 12; г) $-0,5$; д) 5. **58.** а) $\frac{27-13x}{x}$; б) $\frac{15p-2}{3p^2}$; в) $\frac{y-1}{y}$; г) $\frac{2p-11q}{5p}$; д) $-\frac{d}{c}$; е) $\frac{12}{b}$. **61.** а) 16,25; б) 6. **62.** Нет, так как необходимо убедиться, что $a^2 - 3ab \neq 0$. **64.** а) $\frac{7p}{p-q}$; б) 5; в) 1; г) -1; д) $\frac{1}{a+3}$; е) $y + 1$. **66.** а) $\frac{x+5}{x-5}$; б) $\frac{1}{x-5}$. **67.** а) $\frac{x-4}{x+4}$; б) $\frac{8+a}{8-a}$. **70.** При $n = 1, 2, 3, 6$. **72.** а) 7; б) 3; в) 1; г) -20. **76.** б) $\frac{2}{15}$; г) $\frac{3y^2-4b^2}{120by}$. **77.** а) $\frac{41a+13b}{36a}$; б) $\frac{9x+16}{24y}$. **78.** д) $\frac{4a^2-3ab-3b^2}{a^2b^2}$; е) $\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2y^2}$. **79.** а) $\frac{2x^2-3}{12x^3}$; б) $\frac{2b-1}{6ab^2}$; в) $\frac{5a^2-6}{15a^5}$; г) $\frac{b^2x-2b}{6x^6}$. **80.** в) 0; г) $\frac{a}{b}$. **81.** а) $\frac{z-y}{yz}$; б) $\frac{a^2-b^2}{3ab}$; в) $-\frac{p^2+q^2}{p^3q^3}$;

г) $\frac{3m^2-2n^2}{6m^2n^2}$. **82.** д) $\frac{b}{a}$; е) $-\frac{1}{2p}$; ж) $\frac{a^2+b^2}{2a}$; з) $-\frac{b^2+c^2}{2b}$. **83.** в) $\frac{2a+3b+3}{3}$; г) $\frac{b^2+5b-1}{b}$. **84.** в) $\frac{a-6}{6}$; г) $\frac{41a-5}{12}$; д) $\frac{5b-3a}{4}$; е) $\frac{ab-b^2}{a}$. **85.** а) $\frac{3x+3y}{4}$; б) $-\frac{2x+2}{x}$; в) $\frac{36-5x+7y}{12}$; г) $-\frac{17a+17b+30}{15}$. **86.** д) $-\frac{4a}{a^2-4}$; е) $\frac{2p}{9p^2-1}$. **88.** а) $\frac{px-3p}{6x^2-x-2}$; б) $\frac{8ax+2ay}{x^2-xy-2y^2}$; в) $\frac{11a}{30x-60}$; г) $\frac{23b}{48a-144}$. **90.** а) $\frac{a+x}{x}$; б) $\frac{2y-b}{y}$. **91.** а) $\frac{1}{ab}$; б) $-\frac{1}{ab}$. **92.** д) $\frac{x^2-6x}{x-3}$; е) $-\frac{2}{a^2-1}$. **93.** а) $\frac{8a}{(a-5)(b+8)}$; б) $\frac{2y^2}{(2y+3)(3x-2)}$. **94.** а) $\frac{b-c}{b+c}$; б) $\frac{a+1}{a^2-a}$. **95.** а) $\frac{2-b}{b^2+2b}$; б) $\frac{b-5a}{ab+5a^2}$; в) $\frac{x-4a}{x^2+4ax}$; г) $\frac{a-10y}{a^2+10ay}$. **96.** а) $\frac{6a+8}{a^3-4a}$; б) $\frac{3x}{x^2-16}$; в) 2; г) 0. **97.** а) $-\frac{8}{15}$; б) $-\frac{8}{27}$. **98.** а) $\frac{1}{y+2}$; б) $\frac{3}{a-6}$; в) $\frac{x^2+y^2}{2(x-y)^2}$; г) $\frac{a^2}{b(b-a)^2}$. **99.** а) $-\frac{8}{2a+b}$; б) $\frac{36}{(a-3)^2(a+3)^2}$; в) $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$; г) $\frac{1}{a-1}$. **100.** а) $\frac{2}{a-4b}$; б) $\frac{1}{b}$. **105.** $t=\frac{2sv}{v^2-25}$; а) 4 ч 10 мин; б) 5 ч 20 мин. **106.** $t=\frac{3sv-2s}{v(v-2)}$; 6 ч 40 мин. **113.** в) $\frac{8a^2}{m}$; г) $\frac{4b}{a}$. **114.** в) $-\frac{4}{15xy}$; г) $-\frac{10a^2x}{9by^2}$. **115.** в) $\frac{13mx}{3n}$; г) $\frac{11x^2}{3ab}$. **116.** а) $\frac{a^2x^2}{5b^3}$; б) $\frac{m^2}{p^4}$. **117.** в) $\frac{n^6}{1000m^3}$; г) $\frac{81a^6}{4b^4}$. **118.** в) $\frac{4a^4b^2}{9m^2n^6}$; г) $-\frac{27x^6}{8y^9}$. **119.** в) $-\frac{1000m^6}{n^6p^3}$; г) $\frac{b^6c^4}{64a^6}$. **120.** 14. **122.** в) $\frac{y^2-2y}{3y+6}$; г) $\frac{2a^2b+6ab^2}{a-3b}$. **123.** а) $\frac{1}{axy}$; б) $\frac{4}{x^2}$. **124.** а) $\frac{y-4}{6x}$; б) $-\frac{3b}{a+b}$. **125.** в) $\frac{x^2+5x+6}{6}$; г) $\frac{y^2-11y+30}{4}$. **126.** а) 1; б) $-1\frac{1}{9}$; $-\frac{2}{21}$. **127.** а) $\frac{2a-2b}{a^2+ab}$; б) $\frac{bx-5b}{ax+5a}$. **131.** $\frac{a-4b}{a-b}$. **132.** а) 3 ч; б) 2 ч 31 мин. **133.** а) $x=\frac{a-b}{3}$; б) $x=\frac{2b-a}{7}$; в) $x=ab-a$; г) $x=10b-10a$. **136.** в) $\frac{2x}{3my^3}$; г) $\frac{450x^3}{ab}$. **138.** а) $\frac{5m^8}{3n^8}$; б) $\frac{2y}{x^2}$. **139.** а) $\frac{1}{x-3y}$; б) $\frac{a-3b}{a+3b}$. **140.** в) $\frac{ax^2}{44}$; г) $\frac{9}{4m}$; д) $\frac{a}{21b}$; е) $\frac{x^2+2xy}{5}$; ж) $\frac{6a-3b}{2a^2+ab}$; з) $\frac{10m}{2m-3n}$. **141.** г) $-\frac{9p+3}{q}$. **142.** а) $\frac{10}{11}$; -1; б) 0,42. **144.** а) $\frac{x+1}{a-x}$; б) $\frac{2ap-6a}{p^2+2p+4}$. **145.** а) $c=\frac{ab}{a+b}$; б) $b=\frac{ac}{a-c}$. **146.** а) $\frac{2}{2b-3}$; б) $\frac{c-b}{ac-3a^2}$. **147.** 2 км/ч.

150. а) $\frac{x-y}{y}$; б) $\frac{a^3}{m^4}$; в) $\frac{(a+b)^2}{b^2}$; г) 0. **151.** а) $\frac{2x+1}{2x-1}$; б) $-\frac{5y}{y+1}$; в) $-a$; г) x. **152.** а) $\frac{10}{2m+1}$; б) $\frac{2}{x-3}$. **153.** а) 6; б) 10. **154.** а) $\frac{16}{9-a^2}$; б) $\frac{6x-1}{4x^2-1}$; в) $-\frac{c}{a}$; г) $\frac{2a+2y}{ax-3a}$. **155.** а) $\frac{1+a}{1-a}$; б) $1{,}5x$; в) $\frac{a}{a+2}$; г) $y-5$. **156.** а) 1; б) a; в) x^2+1; г) $-m$. **157.** а) $2x^2+2xy$; б) $\frac{x-2y}{2xy}$. **158.** а) $\frac{3}{1-x}$; б) $\frac{a}{4a+8}$. **159.** При $a=1$; 36. **160.** При $b=0$; $\frac{1}{2}$. **165.** в) $\frac{2x^2+2y^2}{y^2}$; г) 4. **166.** а) $\frac{x-1}{x+1}$; б) 1; в) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$; г) $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$. **167.** а) $\frac{2x-a}{2x+a}$; б) $\frac{a-b+3c}{a+b-c}$; в) $\frac{y+x}{y-x}$; г) $\frac{xy}{x+y}$. **168.** а) $\frac{a^2}{b^2}$; б) $\frac{a}{b}$. **169.** а) $\frac{1}{x}$; б) $a+b$. **170.** а) 3; б) -1. **172.** а) 3,75; б) $3\frac{3}{7}$; в) 9,6. **173.** 72 км/ч. **174.** 4,8 ч. **175.** $\approx$ 10,2 км/ч. **177.** а) $y=3x+4$; б) $y=-\frac{1}{2}x$. **179.** 12 см и 32 см. **180.** Через 4 ч. **193.** а) $y=\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{1{,}2}{x}$; в) $y=\frac{5}{x}$. **200.** $\frac{2}{x+7}$. **201.** $a=-6$, $b=12$. **204.** При a, равном -1, 1, 3, 5. **205.** а) -2; 2; б) -9; -8; 0; 1. **209.** $a=8$ и $b=56$; $a=14$ и $b=14$; $a=56$ и $b=8$. **210.** 30. **211.** $7\frac{21}{25}$. **213.** $v=\frac{60(10-t)}{t-3}$; 45 км/ч; 80 км/ч. **214.** д) Все числа, кроме -3 и 3; е) все числа. **218.** а) $\frac{a-c}{a+c}$; б) $\frac{(a+3)^2}{3-a}$; в) $-\frac{4y^2+2y+1}{2y^2+y}$; г) $\frac{25a}{5a+3b}$. **219.** а) $\frac{a-2}{a+b}$; б) $\frac{2x-y}{3x+2}$. **220.** а) $\frac{1}{b^7+1}$; б) $\frac{x^{11}-1}{x^{11}}$; в) $\frac{z}{xy-z^2}$; г) $1-ab$. **222.** а) $\frac{4}{9}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) 45; г) $\frac{1}{9}$. **227.** а) При $n=1$, 2, 3, 6; б) при $n=3$, 4, 6, 12; в) при $n=1$, 2, 3. **228.** а) 6; б) 4; в) 0,2; г) 1,4. **229.** а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0,5. **233.** а) $\frac{4}{2y+1}$; б) $\frac{20}{15a+8}$. **235.** а) $\frac{2y+30}{y^2-9}$; б) $\frac{8}{3-2a}$; в) $\frac{2m+1}{12m-6}$; г) $\frac{4y^2}{(x^2-y^2)^2}$; д) $\frac{6a^2+3}{a^3-1}$; е) $\frac{2x-2y}{x^2+xy+y^2}$. **237.** а) $\frac{1}{abc}$; б) 1. **239.** а) При $a=-6$; б) при $a=5$; в) при $a=6$; г) при $a=7$. **241.** а) При $n=\pm1$, ±3; б) при $n=\pm1$, ±3; ±9; в) при $n=-8$, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4. **242.** а) $a=2$, $b=3$; б) $a=8$, $b=3$. **243.** а) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$; б) $\frac{(x-b)^2}{(x+b)^2}$. **247.** а) $\frac{ab}{a-b}$; б) $-xy$; в) $\frac{a}{(2a-b)^2}$; г) $\frac{(c+2)^2}{(c-2)^2}$. **248.** а) x^2-y^2; б) $-a$. **252.** а) $\frac{x-z}{y-z}$; б) $\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}$; в) $\frac{x+1}{2x+1}$; г) $x+1$. **254.** $\approx$ 9,4 ч. **255.** $\approx$ 68,6 км/ч.

Глава II

279. а) 3,2; б) 3,11; в) 3,115. **280.** а) 16,6; б) 16,56. **281.** 28,26 см. **282.** 314 м^2. **285.** б) $\frac{a}{b}$. **295.** д) 10; е) 6,2. **296.** д) −0,01; е) 0,09; ж) −0,7; з) 3. **300.** а) Точка A; б) точка B. **306.** а) При $x = 9{,}2$; б) при $x = 13{,}5$; в) при $x = 1{,}5$. **315.** г) −0,7 и 0,7; д) $-\sqrt{40}$ и $\sqrt{40}$; е) корней нет. **316.** а) Корней нет; б) −0,3 и 0,3; в) $-\sqrt{60}$ и $\sqrt{60}$; г) корней нет; д) 0, $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$; е) 0, $-\sqrt{11}$ и $\sqrt{11}$. **317.** а) −2 и 8; б) −7 и −1; в) $6 - \sqrt{7}$ и $6 + \sqrt{7}$; г) $-2-\sqrt{6}$ и $-2+\sqrt{6}$. **323.** а) 1,29; б) 19; в) 42; г) −17. **324.** а) 9; б) 28; в) 18; г) 56. **325.** а) −12; б) −45; в) 0; г) 2. **326.** а) −3; б) 3. **342.** а) −0,3; б) 6,6; в) 6,6; г) 9. **344.** а) $\frac{5-2a}{5+2a}$; б) $\frac{2y-3x}{2y+3x}$. **359.** а) 8,2; б) −5; в) 12; г) 36. **365.** а) 12; б) 0,0033; в) $1\frac{13}{27}$; г) $3\frac{1}{2}$. **366.** а) 9; б) 0,24; в) $\frac{8}{15}$; г) $1\frac{3}{8}$. **367.** а) 180; б) 50; в) 48; г) 28; д) 30; е) 6; ж) 24; з) 2,6. **368.** а) 60; б) 60; в) 42; г) 32. **369.** д) 12; е) 12. **370.** д) 6; е) $\frac{15}{16}$. **376.** д) 4,5; е) 3,1; ж) 0,22; з) 0,58. **377.** в) 0,27; г) 3,9. **378.** ж) 15; з) 2. **385.** а) 130; б) 7. **389.** в) $3c$; г) $-5y$; д) $-6x$; е) $3y$; ж) $-10x$; з) $-2a$. **394.** ж) 45; з) 392. **395.** д) 48; е) 1125; ж) 112; з) 675. **396.** а) 144; б) 225; в) 168; г) 825. **397.** а) 48; б) 135; в) 504. **412.** В первый день переплели 36 книг, во второй день — 48 книг, а в третий — 60 книг. **413.** а) −2,5; б) −7,2. **414.** б) $7\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $2\sqrt{2}$. **415.** д) $-3\sqrt{2}$; е) $3\sqrt{2}$. **417.** в) 6; е) $42-8\sqrt{5}$. **418.** а) 14; б) 8. **419.** д) 6; е) −19; ж) 38; з) 2. **422.** в) $-\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; е) $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$. **423.** д) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$. **433.** 20. **434.** а) −1; б) $8\frac{1}{8}$. **437.** а) $\sqrt{5}+1$; б) $\sqrt{7}-2$. **438.** а) 3; б) 5. **439.** а) $\sqrt{54}+1$; б) $\sqrt{65}-\sqrt{21}$. **440.** а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{10}$. **442.** б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$. **443.** 1. **445.** а) $-\sqrt{2}$; б) 2. **446.** а) $\sqrt{a-1}+1$; б) 2. **453.** в) 0,(846153); г) 0,(037); д) 0,0(571428); е) −0,3(18); ж) 0,7(6); з) 0,2(18). **456.** г) $\frac{1}{8}$; д) 10,22. **458.** б) $\frac{1}{3}$; д) 40,5. **459.** 49. **464.** а) При $x > 0$; б) при $x \geqslant 0$; в) при $x \geqslant 0$, кроме $x = 1$. **469.** в) 9,1; г) 1,08. **470.** а) 8,5; б) $\frac{7}{96}$; в) $\frac{15}{29}$; г) $\frac{77}{135}$. **471.** а) 45; б) 0,9; в) 100; г) 0,04. **474.** г) 3,2; д) 8,1; е) 0,001; ж) −64; з) 0,025. **480.** г) $-0{,}5py^3$;

е) $\frac{4a^6}{b^5}$; ж) $\frac{2x}{y^3}$; з) $-\frac{c^3}{3a}$. **483.** а) $|a|\sqrt{15}$; б) $21x^2\sqrt{3}$; в) $0{,}5x\sqrt{6x}$; г) $3a^2\sqrt{a}$; д) $3a|a|\sqrt{2b}$; е) $-4m^3\sqrt{3a}$. **486.** б) $x+\sqrt{xy}$; г) $m\sqrt{n}-n\sqrt{m}$; е) $3a-\sqrt{ab}-2b$; з) $6x-5x\sqrt{2}$. **487.** в) $m\sqrt{m}-n\sqrt{n}$; г) $x^3+y\sqrt{y}$. **490.** в) 2; г) $3\frac{1}{4}$. **494.** 2. **495.** а) $x+\sqrt{xy}+y$; б) $\frac{1}{a-\sqrt{ab}+b}$. **497.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. **501.** а) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-y}$; б) $\frac{27-a\sqrt{a}}{9-a}$; в) $\frac{1+8x\sqrt{x}}{1-4x}$; г) $\frac{a^3b\sqrt{b}-8}{a^2b-4}$. **502.** а) $\frac{x-y}{x+\sqrt{xy}}$; б) $\frac{a^2-b}{a^2\sqrt{b}-ab}$; в) $\frac{49-a}{343+a\sqrt{a}}$; г) $\frac{mn-1}{mn\sqrt{mn}-1}$. **503.** а) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{15}+4}{22}$. **504.** При $x=0$. **505.** а) $-\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{15}$; в) $\sqrt{3}$; г) $3{,}5\sqrt{6}$. **506.** а) $-\frac{1}{x}$; б) $\sqrt{ab}(a-b)$.

Глава III

510. г) Уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2+x-1=0$. **516.** а) 0; $-1{,}5$; б) $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{4}{5}$; г) 0; $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; е) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **519.** а) 0; 2; б) -1; 1; в) 0; $\frac{1}{4}$; г) 0. **520.** а) 0; 1; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **521.** а) 0; -9; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; в) -2; 2; г) корней нет. **522.** 2 и 3. **523.** 40 м и 20 м. **524.** 12 см. **525.** $\approx$ 2,5 ч. **526.** $\approx$ 4 с. **527.** 280 м. **528.** 20 и 15 дюймов; $\approx$ 50,8 см и $\approx$ 38,1 см. Указание. Обозначьте стороны прямоугольника через $4x$ и $3x$. **530.** 3,96; 59. **532.** а) 1; $1\frac{1}{3}$; б) 0,6; 1; в) 2; $2\frac{1}{3}$; г) 2; 2,5; д) 0,2; 1; е) -3; $2\frac{3}{4}$; ж) -2; 12; з) -10; 9. **533.** а) $-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{29}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{29}}{2}$; в) корней нет; г) $\frac{1}{9}$; д) -8; 19; е) корней нет. **534.** а) 0,2; 2; б) -6; 2,5; в) $1\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; д) $\frac{1-\sqrt{41}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{41}}{4}$; е) $\frac{1}{4}$. **535.** а) При $x=5$ и $x=6$; б) при $x=\frac{7-\sqrt{41}}{2}$ и $x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}$; в) при $x=0$ и $x=3$; г) при $x=-1$ и $x=1$. **536.** а) При $x=2$ и $x=9$; б) при $x=0{,}5$ и $x=2$. **537.** а) 2; $2\frac{2}{3}$; б) 0,2; 3; в) -10; 8; г) -1; 23; д) 3,5; 5,5; е) -1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{10-\sqrt{2}}{7}$; $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$; з) $5-5\sqrt{2}$; $5+5\sqrt{2}$. **538.** а) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{4}$; б) $-1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$;

в) $-\frac{1}{2}$; г) −6; 14; д) $-3-2\sqrt{7}$; $-3+2\sqrt{7}$; е) −6; 0,8; ж) 17; з) $-6\frac{2}{3}$; −4. **539.** а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в) −1; −0,8; г) $\frac{1}{6}$; д) корней нет; е) −11; 2; ж) 4; 8; з) 0,7; 0,9. **540.** а) −0,2; 2; б) −7; 2; в) $3-3\sqrt{2}$; $3+3\sqrt{2}$; г) −4; 5; д) 16; 36; е) −1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{1}{5}$; з) $-1\frac{1}{4}$; 1. **541.** а) 1; 25; б) −10; $\frac{1}{3}$; в) −8; 12; г) $\frac{1}{3}$; 3; д) $20-10\sqrt{5}$; $20+10\sqrt{5}$; е) корней нет. **542.** а) −0,2; 1,7; б) $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$; $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; в) $5-\sqrt{5}$; $5+\sqrt{5}$; г) −4; 0,5. **543.** а) −8; 3; б) $1\frac{3}{4}$; 4; в) $-2\frac{2}{3}$; −2; г) $\frac{1}{15}$; д) −91; 87; е) −59; 53; ж) 0; 2; з) −2; 3. **544.** а) −1; 23; б) 2; $2\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{26}$; 1; г) −5; −3. **545.** а) $x_1 \approx -0{,}36$, $x_2 \approx 0{,}56$; б) $x_1 \approx -2{,}78$, $x_2 \approx -0{,}72$; в) $y_1 \approx -1{,}26$, $y_2 \approx 1{,}59$; г) $y_1 \approx -9{,}20$, $y_2 \approx 1{,}20$. **548.** а) $x_1 \approx 1{,}35$, $x_2 \approx 6{,}65$; б) $y_1 \approx 0{,}78$, $y_2 \approx 3{,}22$. **549.** а) −1; $2\frac{6}{7}$; б) −7; 5; в) −0,2; 1,8; г) корней нет; д) 25; е) −9; 3. **550.** а) 7; б) 0,6; 2; в) $-\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{2}$. **553.** а) Не существует; б) не существует; в) a — любое число. **554.** 7,5. **555.** а) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; б) $2+3\sqrt{5}$. **558.** 32 см. **559.** 140 м. **561.** 8 см, 15 см. **562.** 11 и 12. **563.** 30 см. **564.** 5 см и 8 см. **565.** 15 см. **566.** 26 рядов. **567.** 16 или 48 обезьян. **568.** 50 обезьян. **569.** В десятиугольнике. **570.** 9 команд. **571.** 10 участников. **572.** 10 см. **573.** 16, 17, 18 или −18, −17, −16. **574.** б) $\frac{x-4}{3-x}$. **575.** 1. **576.** а) 0; 6; б) $-1\frac{3}{4}$; 0. **583.** −5; $p=-2$. **584.** 0,5; $q=6{,}25$. **585.** 0,6; $b=-43$. **586.** −2; $c=-106$. **587.** 35. **588.** −8,75. **590.** −28. **594.** а) 0; $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; в) −6; 0,8; г) −2; $-\frac{2}{9}$; д) при любом x; е) $-1\frac{2}{5}$; $\frac{1}{7}$. **595.** 9,6 м². **596.** 90 см. **597.** 16 см и 30 см. **599.** а) 0; 7; б) 2,5; в) −2; 0; 2; г) −2; 2. **602.** а) −3; 2; б) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; в) −20; 5; г) $-\frac{1}{4}$; д) корней нет; е) 0; 5. **603.** а) −1; $\frac{1}{2}$; б) 3; в) $1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$; г) −1; 1. **606.** 1; 4. **611.** При $x=1$; наименьшее значение равно 4. **612.** При $x=-3$; наименьшее значение равно 1. **614.** 145 м. **617.** в) $\frac{1}{6}(x+1)(x+2)$; д) $-(y-1)(y-15) = (1-y)(y-15)$; ж) $2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x-3)$. **618.** а) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; б) $-(3x-2)^2$; в) $(4a+3)^2$; г) $(0{,}5m-2)^2$. **619.** б) $-(m-2)(m-3)=(2-m)\times(m-3)$; в) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)=(3x-1)(x+2)$; г) $6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(3x-2)(2x-3)$. **622.** Нельзя. **623.** Например, x^2+3x+2. **624.** а) $\frac{4}{3x-1}$; б) $\frac{2a+1}{3}$;

в) $-\frac{4+b}{b+3}$; г) $\frac{2y+1}{y-3}$; д) $\frac{1-p}{p+2}$; е) $-\frac{x+6}{x+5}$. **626.** а) $-0{,}3$; $-0{,}93$; $-0{,}993$; б) 3; $1\frac{2}{7}$; $1\frac{1}{6}$. **628.** а) -1; 23; б) 2; $2\frac{1}{3}$. **631.** г) 1; д) -27; -1; е) $-0{,}2$; ж) $-0{,}5$; 1; з) $\frac{2}{9}$; и) 0; $\frac{1}{6}$. **632.** а) $-12{,}5$; б) 3; 4; в) 6; г) -1; 3,5; д) -2; $1\frac{1}{3}$; е) 0; -8; ж) 1; 1,5; з) 0; 1,5. **633.** в) $\frac{2}{11}$; г) 1; 10; д) -1; 1; е) 1; 2; ж) $-3\frac{1}{4}$; 1; з) $-3{,}5$; 5. **634.** а) $3-\sqrt{5}$; $3+\sqrt{5}$; б) -6; 5; в) $-4\frac{1}{3}$; г) -9; 1; д) корней нет; е) 4. **636.** а) 6; б) -3; $\frac{2}{3}$; в) корней нет; г) 5; д) -6; 6; е) -4; 4. **637.** а) 2; б) 1; в) -11; г) 6. **638.** а) -3; б) $-1\frac{2}{3}$; 0; в) 3; г) -3; 3; д) 9; 13; е) $1\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$. **639.** а) 1; 7; б) $1-\sqrt{14}$; $1+\sqrt{14}$; в) $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$; г) $-\frac{1}{9}$; 1. **640.** б) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{7-3\sqrt{6}}{10}$; $\frac{7+3\sqrt{6}}{10}$. **641.** а) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) -3; 3. **646.** а) $\sqrt{y}$; б) $\sqrt{y}$. **648.** $\frac{2}{5}$. **649.** 60 км/ч и 40 км/ч. **650.** 12 км/ч и 10 км/ч. **651.** 80 км/ч и 70 км/ч. **652.** 80 км/ч. **653.** 30 ц с гектара. **654.** 20 р. **655.** 220 акций. **656.** 7 человек. **657.** 12 человек. **658.** 6 км/ч или 5 км/ч. **659.** 2,5 км/ч. **660.** 2 км/ч. **661.** 500 г. **662.** 60 г. **663.** 15 ч и 10 ч. **664.** 7 ч. **665.** 10 км/ч. **666.** 50 км/ч. **668.** а) 0,1; б) 3,5. **669.** 16. **671.** а), в), г) Да; б) нет. **673.** а) 2; б) 6; в) 5; г) 1. **678.** $2x + y = 6$. **679.** а) $(x-1)(y-1)=0$; б) $(x-y)(x+1)=0$; в) $(x+2)(x-1)=0$; г) $(y+1)(y-2)=0$. **680.** а) $(x-3)(y-3)=0$; б) $(x+2)(y+2)=0$; в) $(y+2)(y-2)=0$; г) $(x-4)(x+2)=0$. **683.** а) (1; 2), (-1; -2), (2; 1), (-2; -1); б) (2; -1), (2; 1); (-2; 1); (-2; -1). **684.** $\left(1\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b\right)$ км. **685.** а) $\frac{1}{4}$; б) 4. **686.** а) $\frac{x-1}{4x^3}$; б) $\frac{48n^2-3}{8n^3}$; в) $-\frac{x}{5y}$. **687.** а), в), г), е) — единственное решение; б), д) — бесконечно много решений. **689.** а), б) — единственное решение; в) решений нет. **690.** 1) $x+y=5$; $\frac{1}{4}y-4x=0$; $0{,}6x-3y=-1{,}2$; 2) $6y+3x=10$; $2x+4y=9$; $0{,}5y+0{,}25x=4{,}8$; 3) $2x+4y=10$; $15-3x=6y$. **692.** 1) $k=0{,}5$; $b=1{,}5$; 2) $k=b=0$; 3) $k=-1$; $b=-3$. **693.** 720 км. **695.** а) $(4m-5n^2)(4m+5n^2)$; б) $(0{,}3a^2-3b)(0{,}3a^2+3b)$; в) $(2a+1)(2a+5)$; г) $5(x+1)(7-5x)$. **696.** а) нет; б) да. **698.** а) не имеет решений; б) два решения; в) одно решение. **701.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3b-4a}{2ab}$; в) $\frac{2x+3y}{3xy}$. **702.** а) (2; -1), (5; 2); б) (6; 5), (-4; 5); в) (1; -5), (4; -2); г) (4; 5), (13; -4). **703.** а) (10; -7), (-3; 6); б) (-1; 0), (-2; -1); в) (2; 10), (-3; 5); г) (2; 2), (1; 3).**704.** а) (2; -1), (1; -2); б) (1,5; 1), (1; 1,5); в) (-1; 0), (0; -1); г) (5,25; 3,25).

705. а) (10; −2), (−2; 10); б) (−1,2; −2), (2; 1,2); в) (3; −1); г) (−1;−2), (−2; −1). **706.** а) (1; 4), (−0,6; 0,8); б) (2,5; −0,5), $\left(2\frac{2}{9};\ \frac{1}{3}\right)$; в) (−32; −18), (−10; 4); г) (−1;2), $\left(1\frac{6}{7};\ \frac{4}{7}\right)$. **709.** (−2; 0), (4; 6). **711.** а) (15; 10), (2; −3); б) (12; −6), (2; 4); в) $\left(\frac{2}{5};\ -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ 2\right)$; г) (6; 2), (− 1; −1,5). **712.** а) пересекает в точках (6; 4) и $\left(2\frac{2}{3};\ 1\frac{7}{9}\right)$; б) пересекает оси в точках (−5; 0), (0,5; 0); (0; −5). **715.** При $k = -2$; 2. **716.** а) два; б) три. **717.** а) $x_1 = -3\frac{1}{3}$; $x_2 = 3\frac{1}{3}$; в) $m_1 = -\frac{2}{3}$; $m_2 = \frac{2}{3}$. **719.** 30 л. **720.** Таких чисел не существует. **721.** 25 спортивных костюмов и 65 курток. **722.** Неправильно. **723.** 5 км/ч. **724.** 12 пятирублёвых и 16 двухрублёвых монет. **725.** 7 пятиместных лодок. **726.** Дачник шёл со скоростью 5 км/ч и ехал со скоростью 12 км/ч. **727.** 18. **728.** 3 см и 30 см. **729.** Вес гири 16 кг, вес гантели 5 кг. **730.** 60 и 60 мячей. **735.** При $a = 2$ x — любое число; при $a \neq 2$ $x = a^2 - 9$. **736.** $\frac{2 \pm \sqrt{4-2b}}{2}$ при $b < 2$; 1 при $b = 2$; корней нет при $b > 2$. **737.** а) $4a$ и a при $a \neq 0$; 0 при $a = 0$; б) $3a$ и $\frac{a}{3}$ при $a \neq 0$; 0 при $a = 0$. **738.** а) 6 и −6; б) 20 и −20; в) 0 и 9; г) 0 и $-\frac{1}{8}$. **739.** 5 при $a = 1$. **740.** −1 при $a = 1$; −1 и $\frac{a+1}{1-a}$ при $a \neq 1$. **741.** $2k - 2$, $2k + 3$. **742.** $b = 4$. **743.** а) 0; 1; б) 0; 6,8; в) −1,2; 1,2; г) 0. **747.** а) −1; $-\frac{3}{4}$; б) −8; 7; в) −7; 8; г) 1,6; 2; д) $-3\frac{1}{8}$; 3; е) −1; $4\frac{2}{3}$; ж) $-5\frac{2}{3}$; 2; з) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **748.** а) −1,2; 0,2; б) $-4\frac{2}{3}$; $-1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{2}{3}$; 4; г) $-2\frac{3}{11}$; −1; д) $-\frac{3}{5}$; $-\frac{2}{5}$; е) −1; 1; ж) −2,5; 2,5; з) при любом x. **753.** 10, 11, 12, 13, 14 или −2, −1, 0, 1, 2. **754.** −2, 0, 2 или 6, 8, 10. **755.** 7 и 8. **756.** 4 см и 10 см. **757.** 1 см. **758.** 0,25 м. **759.** 60 или 40 пистолей. **760.** 0,36 м^3 или 0,81 м^3. **761.** 54 см и 36 см. **762.** 18 и 17. **763.** 13 и 11. **764.** а) $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; б) $-6\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$; в) $3-\sqrt{2}$; $3+\sqrt{2}$; г) $5-3\sqrt{2}$; $5+3\sqrt{2}$. **771.** $b = \pm 12$. **772.** 21 или −21. **773.** $c = 3{,}12$. **774.** $b = = -2$, $c = 0$. **775.** $b = 1$, $c = -2$. **777.** 36. **778.** 42 или −42. **781.** а) $x^2 + 3px + 9q = 0$; б) $x^2 + (p - 4)x + (q - 2p + 4) = 0$. **782.** $qx^2 - (p - 2q)x + q = 0$. **798.** а) 11; 13; б) −14; 5; в) −3; 7; г) −5; $4\frac{1}{3}$; д) 12; е) корней нет; ж) −5; 3; з) корней нет. **803.** а) $\frac{2}{3}$; 1; б) 0,4; 0,5. **804.** а) $\frac{-5-\sqrt{77}}{4}$; $\frac{-5+\sqrt{77}}{4}$; б) −1,5; 1; в) корней нет; г) 9; д) 0; е) $-\frac{1}{3}$; ж) $2-\sqrt{35}$; $2+\sqrt{35}$; з) 0; −1,5. **806.** 10 ч. **807.** 9 ч. **808.** 50 км/ч. **809.** 60 км/ч. **810.** 2 км/ч. **811.** 3 км/ч.

812. 3 км/ч. **813.** 2,4 км/ч или 3 км/ч. **814.** 3 км/ч. **815.** 50 км/ч. **816.** 40 км/ч. **817.** 4 ч 40 мин. **818.** 160 км или 200 км. **819.** 450 км. **820.** 18 км/ч. **821.** 48 км/ч или 9 км/ч. **822.** 60 см и 80 см. **823.** 10 костюмов. **824.** 32 пылесоса. **825.** 24 кг и 36 кг. **826.** 25 кг или 12 кг. **827.** 15 дней и 10 дней. **828.** 15 дней и 10 дней. **829.** 12 ч. **830.** 25 ч и 20 ч. **831.** 15 мин и 10 мин.

Глава IV

853. Указание. Сравните квадраты левой и правой частей неравенства. **856.** Коля. **857.** $3\frac{1}{15}$. **858.** а) $\frac{5-x}{7}$; б) 1. **859.** а) 1; 5; б) 0,3; 2. **879.** $\frac{1}{16}$; 22; 0. **880.** а) -1; 1; б) 2; в) -6; 3; г) -1; 5. **895.** 6 × 6 дм. **896.** $\frac{1}{6}$. **902.** а) Отрезок CB; б) отрезок AD. **906.** б) $A \cap B = B$; $A \cup B = A$. **909.** -3; $\frac{2}{3}$. **910.** 12 ц и 10 ц. **922.** а) -9; б) 16; в) 31; г) 7. **924.** а) (5; 8); б) $[-4;\ 4]$; в) $(7;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 6)$. **928.** а) $\frac{1}{x^2}$; б) $-\frac{1}{2a^4}$. **930.** 40 км/ч; 45 км/ч. **931.** $\frac{3}{4}$. **935.** а) $(5;\ +\infty)$; б) $(4;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -1]$; г) $(-\infty;\ 3]$; д) $(-\infty;\ 0{,}15)$; е) $\left[\frac{4}{9};\ +\infty\right)$; ж) $(-\infty;\ -0{,}25)$; з) $(-\infty;\ 0]$; и) $(-8;\ +\infty)$; к) $(0;\ +\infty)$; л) $(18;\ +\infty)$; м) $(7;\ +\infty)$. **936.** а) $(-\infty;\ 8{,}5)$; б) $[-0{,}6;\ +\infty)$; в) $(4;\ +\infty)$; г) $(7{,}5;\ +\infty)$; д) $\left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; е) $(1{,}8;\ +\infty)$; ж) $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$; з) $(-\infty;\ -2{,}4]$; и) $(-\infty;\ 12)$; к) $(0;\ +\infty)$; л) $[-30;\ +\infty)$; м) $[-20;\ +\infty)$. **939.** а) $(-\infty;\ 0{,}4)$; б) $(-\infty;\ -0{,}4)$; в) $[-5;\ +\infty)$; г) $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; д) $(-1{,}4;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ -1]$; ж) $(-\infty;\ 12{,}6]$; з) $[-13;\ +\infty)$. **940.** а) $(-\infty;\ 1)$; б) $(-\infty;\ 2)$; в) $[6;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right)$; д) $(-\infty;\ 0)$; е) $(-\infty;\ 9)$; ж) $(-13;\ +\infty)$; з) $\left(2\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **941.** а) При $x > \frac{1}{2}$; б) при $y > 7$; в) при $c < -25$. **942.** а) При $a < 2{,}5$; б) при $p > 5$. **943.** а) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{8}\right]$ б) $(9;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -3{,}1]$; г) $(-\infty;\ 0{,}8]$; д) $\left(-\infty;\ 1\frac{3}{4}\right)$; е) $(-\infty;\ 22{,}5)$; ж) $(-\infty;\ 2]$. **944.** б) $[0;\ +\infty)$; в) $(1;\ +\infty)$; г) $\left[2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; д) $(-\infty;\ 4{,}7]$; е) $[4{,}8;\ +\infty)$. **945.** а) $(6;\ +\infty)$; б) $(0;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -5]$; г) $(-3;\ +\infty)$. **946.** а) $(-\infty;\ 2)$; б) $(2;\ +\infty)$; в) $(-0{,}4;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\ \frac{2}{15}\right)$. **947.** а) $\left(-\infty;\ 14\frac{1}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{8};\ +\infty\right)$; в) $(-\infty;\ 14]$; г) $(-17;\ +\infty)$. **948.** а) $(2{,}5;\ +\infty)$;

б) $(-\infty; 6)$; в) $[0; +\infty)$; г) $(3; +\infty)$; д) $(-4; +\infty)$; е) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; ж) $\left(-\infty; 1\frac{5}{7}\right]$;
949. а) $[0; +\infty)$; б) $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$; г) $\left(-\infty; 2\frac{3}{4}\right]$; д) $[14; +\infty)$; е) $(-\infty; 20{,}5)$. **950.** а) При $y < 3$; б) при $y > 7$; в) при $y > \frac{3}{17}$; г) при $y < 0{,}1$.
951. а) $(-\infty; 6)$; б) $\left[1\frac{5}{7}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 12)$; г) $(2; +\infty)$; д) $\left[-1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) $(0; +\infty)$. **952.** а) $(-\infty; 0{,}2)$; б) $(-\infty; 0{,}5]$; в) $(-\infty; 40]$; г) $(-\infty; -10]$.
953. б) $\left(-\infty; \frac{2}{13}\right]$; в) $[1{,}5; +\infty)$; г) $(-\infty; 3{,}5]$; д) $(-\infty; -10)$; е) $(9; +\infty)$.
954. а) $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$; б) $[-5; +\infty)$; в) $(-\infty; -0{,}6]$; г) $\left(-\infty; -3\frac{5}{6}\right)$; **955.** а) При $a > 0{,}7$; б) при $b < 3$. **956.** а) x — любое число; б), в), г) решений нет.
958. а) При $x \geqslant 2$; б) при $a \leqslant \frac{2}{3}$; в) при $a \geqslant -\frac{1}{3}$; г) при $a \leqslant 1{,}4$; д) при $x \geqslant 0{,}2$; е) при $x \geqslant 6$. **959.** а) $(-\infty; -8) \cup (-8; 0{,}5]$. **960.** а) 3; б) 24. **961.** а) 1; 2; 3; 4; б) 1; 2. **962.** $(-\infty; -5{,}2)$. **963.** $\left(1\frac{1}{3}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. **964.** Меньше 2 см.
965. Меньше 12,15 дм. **966.** 11 книг. **967.** 755 р. **968.** Не более $26\frac{2}{3}$ км.
969. 3. **970.** а) 1; 4; б) 0; 1. **972.** 12 км/ч. **976.** а) $(6; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $\left(0; 3\frac{1}{3}\right)$; г) решений нет. **977.** а) $(0{,}8; +\infty)$; б) $[2; 4]$; в) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$; г) $(0{,}1; 0{,}2)$.
978. а) $[2; 2{,}5]$; б) $(1{,}5; 3)$; в) $\left(13\frac{1}{3}; 25\right)$; г) $\left(-\infty; \frac{4}{9}\right]$; **979.** а) $(-12; 2]$; б) решений нет; в) $(0; 15)$; г) $(-\infty; -3)$. **980.** а) $(-1; 0{,}8)$; б) $(-\infty; -1{,}5]$; в) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; г) $[3; 6{,}7)$. **981.** а) $(-\infty; 2{,}4)$; б) решений нет; в) $\left[-8; 1\frac{1}{3}\right)$; г) $[1{,}5; +\infty)$. **982.** а) $(-\infty; 1]$; б) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $[3; 6]$; г) $[-1; 1{,}5]$.
983. а) $[2{,}5; 11) \cup (11; +\infty)$; б) $[0{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$. **984.** а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)$; в) $[-11; 3]$; г) решений нет. **985.** а) $\left(2; 3\frac{4}{7}\right)$; б) $(0{,}1; +\infty)$; в) $(-0{,}24; +\infty)$; г) $(-\infty; -1{,}8)$. **986.** а) −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3; б) 2, 3, 4, 5, 6; в) −1, 0, 1, 2, 3; г) −2, −1, 0. **987.** а) 0, 1, 2, 3; б) 4, 5, 6, 7; в) 1; г) 1.
988. а) $(-\infty; 2{,}8)$; б) решений нет. **989.** а) $(-\infty; 6)$; б) $(1; 15)$; в) $[0{,}6; 5]$; г) $(2; 16]$. **990.** а) $\left(\frac{1}{13}; 9\right)$; б) $(-2; -1)$; в) решений нет; г) $\left[\frac{2}{11}; 2\right]$. **991.** а) $(-1; 2)$; б) $(-12; 17)$; в) $(0{,}5; 2)$; г) $(-1; 3)$. **992.** а) $\left(-2\frac{5}{7}; 5\right]$; б) $[-11; 7)$; в) $\left[-5; \frac{1}{3}\right]$;

г) $\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]$. **993.** а) $[-1;\ 2)$; б) $[3;\ 9]$; в) $(-0{,}7;\ 1{,}1)$; г) $\left(-1\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right]$. **994.** а) При $1\frac{1}{3} < y < 2$; б) при $0{,}5 \leqslant b \leqslant 6{,}5$. **995.** $-4 < a < 4$. **996.** $b < -1\frac{1}{3}$. **998.** а) $(-\infty;\ 2)$; б) $(1;\ 4)$. **999.** а) $(1;\ 7)$; б) $(1;\ 3)$. **1000.** а) $x \leqslant 0{,}48$; б) $x > 2{,}2$; в) $x \neq \frac{2}{3}$. **1001.** 1, 2, 3, 4, 6, 12. **1003.** 10 км/ч и 15 км/ч. **1006.** Указание. Можно воспользоваться соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел. **1009.** Указание. Сравните квадраты левой и правой частей неравенства. **1011.** Указание. Воспользуйтесь соотношениями вида $\sqrt{4x+1} \leqslant \sqrt{4x+1+4x^2} = |2x+1|$. **1012.** Указание. Можно воспользоваться тем, что $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} > \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ при $a > 1$. **1013.** Не успел. **1021.** Смирнов. **1029.** а) $-6 < a + 2b < -3$; б) $-11{,}5 < \frac{1}{2}a - b < -9$. **1030.** $5{,}2 < \frac{AB}{2} < 5{,}25$. **1031.** $4{,}8 \leqslant \frac{a+c}{2} \leqslant 4{,}9$. **1039.** а) $(-\infty;\ -60)$; б) $(4{,}8;\ +\infty)$; в) $(0{,}56;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\frac{1}{16}\right]$; д) $(-\infty;\ -1)$; е) $\left(1\frac{2}{3};+\infty\right)$. **1040.** а) $(-\infty;\ -115)$; б) $(0{,}2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 15)$; г) $(-\infty;\ 1{,}4)$. **1041.** а) $(-\infty;\ 0{,}325)$; б) $(-1;\ +\infty)$. **1042.** а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 3, 4, 5. **1043.** а) Таких значений нет; б) при любом значении x. **1044.** а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$. **1045.** а) При $a > 0$; б) при $a > 2$; в) при $a > -3$; г) при $a > -7$. **1046.** а) При $b < 0$; б) при $b < -4$; в) при $b < -3$; г) при $b < -0{,}2$. **1047.** а) При $m \geqslant 8$; б) при $m < 2$; в) при $m \leqslant -6$; г) при $m < 3{,}5$. **1049.** а) Не более 5. **1050.** Более 6 км/ч. **1051.** Более 18 км/ч. **1053.** а) $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$; б) $(0{,}1;\ 5)$; в) решений нет; г) $(0{,}8;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -0{,}2)$; е) $\left(1\frac{5}{11};+\infty\right)$; **1054.** а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; б) -10; в) 1; г) 2, 3, 4, 5. **1055.** а) $(-3;\ 6)$; б) $(1{,}5;\ 2{,}5)$. **1056.** а) При $1{,}5 < x < 4{,}5$; б) при $5 \leqslant x \leqslant 15$. **1057.** а) $\left(0;\ \frac{1}{6}\right)$; б) положительных решений нет. **1058.** а) $(-1;\ 0)$; б) $(-5;\ 0)$. **1059.** $a > 3{,}5$. **1060.** $-3 < b < 5$. **1061.** Более 10 км, но менее $16\frac{1}{4}$ км. **1062.** Более 60 км/ч, но не более 90 км/ч.

Глава V

1063. а) 7; б) 10; в) $9\frac{1}{3}$. **1065.** а) 115; б) 54; в) -2; г) -37. **1066.** 24. **1068.** а) 0 и -4; б) -1. **1069.** а) -2; б) -14; в) не существует. **1071.** а), б), д) — все числа; в) все числа, кроме 5; г) все числа, кроме -1 и 4; е) все числа, больше или равные 5. **1076.** а) 36 км; б) = 490 м/с. **1081.** $1 \leqslant f(x) \leqslant 7$; $-7 \leqslant g(x) \leqslant 14$. **1084.** $P = 2n + 20$, область определения (10; 40], множество значений (40; 100]. **1089.** а) 3,5 и −3,5; б) (−2; 2); в) (−∞; −4] ∪ [4; +∞). Наименьшее значение 0, наибольшего нет, множество значений [0; +∞). **1094.** а) $\frac{2}{3}$; б) 5. **1096.** а) $x = -4$; −3; б) $x = -5$; 7; в) $x = -\frac{1}{2}$; 3; г) $x = 1$; $1\frac{1}{3}$. **1102.** Нули функции: −8; −3; 4; 8. а) [−10; −8), (−3; 4), (8; 10]; б) [−5; 0], [6; 10]. **1106.** а) 15; б) −6 и $3\frac{1}{2}$; в) −2; г) нулей нет. **1109.** а) Пересекаются в точках (−2; 1) и (1; 2); б) не пересекаются. **1112.** −0,36. **1119.** 2), 4). **1121.** а) I, II, III; б) I, II, IV; в) I и II. **1123.** а) 0; 6; б) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; в) −8,5; 0; г) корней нет. **1126.** 1), 2), 3). **1035.** (15; +∞). **1145.** $y = 10x$, $10 < x \leqslant 5$. **1147.** Нет; да, в точке (0; 1); I и II. **1150.** а) −5, 5; б) нулей нет; в) −2 и 2. **1153.** а) 4 ; б) 1. **1155.** График функции $y = \sqrt{1-x}$. **1160.** а) $a > 2$; б) $a < 2$; в) $a = 2$. **1171.** а) (−1; 1), (1; −1); б) (1; 2), (−2; −1).

Глава VI

1178. г) $\frac{27}{64}$; д) $-39\frac{1}{16}$; е) $-\frac{4}{25}$. **1185.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{16}$; в) $\frac{1}{18}$; г) $\frac{3}{13}$; д) 6; е) 125. **1188.** в) $\frac{1-a^2b^2}{ab}$; г) $\frac{2x^2y^2-3xy-2}{xy}$. **1189.** а) $\frac{1}{ab}$; б) $\frac{a+b}{a^2b^2(b-a)}$. **1190.** а) (2; +∞); б) (−∞; 2). **1191.** При $n = 1$ и $n = 49$. **1194.** б) 3; г) 25; е) 0,001. **1199.** а) 64; б) $\frac{1}{8}$; в) 8; г) 4. **1201.** а) 1; б) 27; в) 1000; г) $\frac{1}{25}$; д) 2; е) 1; ж) 81; з) 15 625. **1202.** а) 5; б) 1; в) $\frac{1}{36}$; г) 144; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{81}$. **1203.** а) 5; б) $\frac{2}{3}$. **1206.** а) x^{-2}; б) x^5; в) x^{n+7}; г) x^{4-n}. **1208.** а) −1; б) 6. **1209.** а) 0,224; б) 125. **1213.** а) $\frac{1}{3}x^4y^7$; б) $81ab^7$; в) $15x^5y^5$; г) $\frac{5}{4}p^5q^{10}$. **1214.** а) $\frac{1}{3}xy^{11}$; б) $\frac{7}{5}a^4b^4$; в) $5c^3p^3$; г) $2x^{-8}y^9$. **1215.** а) $4x$; б) $3b$; в) $4a^4b^2c^4$; г) $\frac{8}{3}x^{-2}y^5z$. **1216.** а) $27x^3y$; б) $20a^6b^{-2}$; в) $4a^{-10}b^{12}$; г) $\frac{1}{2}x^{-5}y^6$. **1217.** $n = 1$. **1218.** −4; 2. **1219.** а) (−∞; 0); б) (0; +∞). **1220.** $\frac{1}{11}$. **1228.** а) $4{,}55 \cdot 10^5$; б) $2{,}288 \cdot 10^2$. **1231.** $1{,}404 \cdot 10^3$ кг. **1237.** 1. **1238.** При $m = 18$. **1239.** −3, −2, −1. **1247.** а) $a = 51$, $b = 256$. **1248.** а) x_0^2, x_0, x_0^0, x_0^{-1}, x_0^{-2}; б) x_0^{-2}, x_0^{-1}, x_0^0, x_0, x_0^2. **1249.** а) Общих точек нет; б) две точки; в) четыре точки; г) одна точка. **1250.** а) Один; б) два; в) один; г) не имеет корней. **1251.** а) −1600; б) −0,08; в) −1000; г) 11; д) 7; е) 5. **1253.** а) $\frac{x^3-y^3}{x^2y^2}$;

б) $\frac{xy+y^2}{x^2}$; в) $\frac{n^2}{(m-n)^2}$; г) $\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$. **1254.** а) $\frac{1}{x^2y+xy^2}$; б) $-(a+b)$. **1260.** а) x^{17}; б) a^{12}. **1262.** а) 3^n; б) 2^{-n}. **1264.** $n = 6$. **1266.** а) $2{,}38 \cdot 10^4$; б) $1{,}62 \cdot 10^{-1}$; в) $3 \cdot 10^3$; г) $8 \cdot 10^{17}$.

Задачи повышенной трудности

1271. а) $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$; б) $\frac{2a+1}{4a^3+2a^2+a}$. **1272.** $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$; $u = -1$, $v = -2$. **1274.** $\frac{8}{21}$. **1275.** Цифрой 2. **1276.** $x = 1$, $y = 2$. **1278.** $\frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)$, $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$. **1279.** 12, 18, 24, 27, 36, 45, 48. **1280.** $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$. Указание. Докажите, что сумма этих дробей больше 1, но меньше 3, т. е. равна 2. **1281.** −7, −6, −3, 2, 4, 9, 12, 13. **1282.** 0, 2, 4. **1283.** $(x^2+x+1)(x^2-x+1) \times$ $\times \left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right)$. **1284.** $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$; где p и q — целые числа, причём $p \neq 0$, $q \neq 0$, $|p| \neq 1$, $|q| \neq 1$. **1286.** $x = 35$, $y = 34$ или $x = 13$, $y = 10$. **1288.** Указание. Возведите обе части уравнения $\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(x - y\sqrt{2}\right) = 1$ в n-ю степень ($n \in N$). **1289.** При $m = -6$. **1290.** $x_1 = a - 1$, $x_2 = a + 1$. **1291.** 5 при $a = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{17})$. **1292.** $p = -16$ или $p = 16$. **1293.** При $a = 2$. **1296.** 160 км. **1297.** 10 м. **1298.** 60 ч. **1299.** 10 км. **1300.** 72 км. **1301.** 4,5 ч или 3,6 ч. **1302.** В 1,2 раза. **1303.** За 12 ч и 15 ч. **1304.** За 28 ч и 21 ч. **1305.** 41. **1306.** $x_1 = 18$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$, $x_4 = 10$ или $x_1 = -12$, $x_2 = -18$, $x_3 = -10$, $x_4 = -15$. **1307.** Через 2 ч. **1318.** 10 точек. **1324.** а) (2; −1). **1325.** а) (1; 3), $\left(\frac{3}{5}; 4\frac{1}{5}\right)$; б) (19; 8), $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$. **1326.** а) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; -1\frac{1}{3}\right)$, (−2; −2); б) (2; 4), (−1; −14). **1327.** а) (−1; −2), $\left(\frac{11}{9}; \frac{22}{9}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **1328.** (−1; 2), (2; −1), $\left(-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\right)$, $\left(-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}\right)$. **1330.** а) (2; 1), (−2; −1), (−2; 3), (2; −3); б) (1; 1), (−1; −1). **1331.** 15 км/ч и 30 км/ч. **1332.** 6 чел., 5 ч. **1333.** 21 ц и 25 ц, 7 га и 6 га. **1334.** 40 или 60 пистолей. **1335.** 10%. **1337.** Около 41%. **1338.** 15 мин. **1339.** 6 ч и 12 ч. **1340.** 90 км/ч и 60 км/ч.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА 5

1. Рациональные выражения . . . . —
2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей 10

§ 2. СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ 19

3. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями —
4. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями 23

§ 3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ 30

5. Умножение дробей. Возведение дроби в степень . . . . . . —
6. Деление дробей 35
7. Преобразование рациональных выражений 38
8. Функция $y=\frac{k}{x}$ и её график 45

Для тех, кто хочет знать больше

9. Представление дроби в виде суммы дробей 52

Дополнительные упражнения к главе I 56

ГЛАВА II. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 4. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ 64

10. Действительные числа . . . . —
11. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень 70
12. Уравнение $x^2 = a$ 74
13. Нахождение приближённых значений квадратного корня 78
14. Функция $y=\sqrt{x}$ и её график 81

§ 5. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ 86

15. Квадратный корень из произведения и дроби . . . . —
16. Квадратный корень из степени 91

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ 94

17. Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня . . . . —

18. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни 98

Для тех, кто хочет знать больше

19. Преобразование двойных радикалов 103

Дополнительные упражнения к главе II 107

ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 7. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ 115

20. Неполные квадратные уравнения . . . . . —

21. Формула корней квадратного уравнения 120

22. Решение задач 128

23. Теорема Виета 132

§ 8. КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН 137

24. Квадратный трёхчлен и его корни . . . . . —

25. Разложение квадратного трёхчлена на множители 141

§ 9. ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 145

26. Решение дробных рациональных уравнений . . . . . —

27. Решение задач 151

§ 10. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ 155

28. Уравнение с двумя переменными и его график . . . . . —

29. Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными 160

30. Графический способ решения систем уравнений 163

31. Алгебраический способ решения систем уравнений 165

32. Решение задач 169

Для тех, кто хочет знать больше

33. Уравнения с параметром 172

Дополнительные упражнения к главе III 174

ГЛАВА IV. НЕРАВЕНСТВА

§ 11. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА 185

34. Числовые неравенства . . . . . —

35. Свойства числовых неравенств 190

36. Сложение и умножение числовых неравенств 195

§ 12. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ 200

37. Пересечение и объединение множеств . . . . . —

38. Числовые промежутки 203

39. Решение неравенств с одной переменной 207
40. Решение систем неравенств с одной переменной 215

Для тех, кто хочет знать больше

41. Доказательство неравенств 223

Дополнительные упражнения к главе IV 227

ГЛАВА V. ФУНКЦИИ

§ 13. ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА 234

42. Функция. Область определения и множество значений функции . . . . —
43. Свойства функции 243

§ 14. СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ 249

44. Свойства линейной функции . . . . —
45. Свойства функций $y=\frac{k}{x}$ и $y=\sqrt{x}$ 252

Для тех, кто хочет знать больше

46. Целая и дробная части числа 255

ГЛАВА VI. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 15. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА 261

47. Определение степени с целым отрицательным показателем —
48. Свойства степени с целым показателем 265

§ 16. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА 270

49. Понятие стандартного вида числа . . . . —
50. Решение задач с большими и малыми числами 272

Для тех, кто хочет знать больше

51. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства 275

Дополнительные упражнения к главе VI 279

Задачи повышенной трудности 282
Исторические сведения 289
Сведения из курса алгебры 7 класса 295
Список дополнительной литературы 302
Предметный указатель 303
Ответы 304

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Суворова Светлана Борисовна

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

8 класс
Базовый уровень

Учебник

Центр математики

Ответственный за выпуск *П. А. Зубкова*
Редактор *П. А. Зубкова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *М. А. Тамазовой*
Технический редактор *М. И. Решетникова*
Компьютерная вёрстка *О. С. Ивановой, О. В. Сиротиной*
Корректор *О. Н. Леонова*

Подписано в печать 10.10.2022. Формат 70 × 90/16.
Гарнитура Школьная. Уч.-изд. л. 14,24. Усл. печ. л. 23,4.
Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.