394. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

а) окружности $x^2 + y^2 = 36$ и параболы $y = x^2 + 6$;

б) окружностей $x^2 + y^2 = 16$ и $(x - 2)^2 + y^2 = 36$;

в) окружности $x^2 + y^2 = 25$ и прямой $4x - y = 0$.

395. Окружность $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$ и прямая $y = kx$ имеют общую точку $M(1; 2)$. Найдите координаты другой общей точки, если такая точка существует.

396. Покажите с помощью графиков, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$$

имеет четыре решения, и найдите их.

397. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 10. \end{cases}$$

398. (*Для работы в парах.*) С помощью графиков решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 6, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

1) Обсудите, какое множество точек задаёт на плоскости каждое уравнение системы в заданиях а) и б).
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли построены графики уравнений и определены координаты точек пересечения графиков.

399. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y + 2 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy - 3 = 0, \\ 2y - 3x = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y + 3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ (9x + 4)(y - 9) = 0. \end{cases}$

400. Изобразите схематически графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x - 10)^2 + y^2 = 16. \end{cases}$

401. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x-4)^2+(y-5)^2=9,\\ y=x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y-x^2=0,\\ x+y=6.\end{cases}$

402. Пересекаются ли графики уравнений $x-y=-7$ и $x^2+y^2=36$? Найдите ответ графическим способом, а затем аналитическим.

403. Сколько общих точек имеют окружность и прямая, заданные соответственно уравнениями:

а) $(x-6)^2+(y+4)^2=4$ и $y=-2$;

б) $(x-3)^2+(y-2)^2=9$ и $x=7$?

404. Пересекаются ли окружность $x^2+y^2=9$ и гипербола $xy=-3$? Если пересекаются, то сколько общих точек они имеют?

405. Сколько общих точек имеют окружность и прямая:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ y=2x+3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=7,\\ y-4x=2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ y+4x=-5?\end{cases}$

406. Укажите три значения c, при которых прямая $y=c$ и окружность $x^2+y^2=9$: а) пересекаются; б) не имеют общих точек. При каких значениях c прямая касается окружности?

П

407. Составьте уравнение, графиком которого является:

а) пара прямых $y=2x$ и $y=-2x$;

б) парабола $y=x^2$ и прямая $y=-2$.

408. При каком значении b пара чисел (18; 3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases}x-2y=4b,\\ 2x+y=39?\end{cases}$$

409. При каких значениях a решением системы уравнений

$$\begin{cases}x+y=a+1,\\ 3x-y=a-1\end{cases}$$

является пара положительных чисел?

410. Докажите, что при $a>-1$ выражение $\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\right):\frac{4a}{5a-5}$ принимает положительные значения при всех допустимых значениях a.

411. Из деревни в город, находящийся на расстоянии 72 км, отправился велосипедист. Спустя 15 мин навстречу ему из города выехал другой велосипедист, проезжающий в час на 2 км больше первого. Найдите, с какой скоростью ехал каждый из них, если известно, что они встретились в середине пути.

21. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Вопрос об исследовании системы двух линейных уравнений с двумя переменными уже рассматривался в курсе алгебры 7 класса, при этом основу выбранного способа исследования составили графические соображения. Было установлено, что система может иметь единственное решение, не иметь решений, иметь бесчисленное множество решений. Теперь будет показано, как этот же вывод можно получить алгебраическим способом без опоры на графики.

Возьмём систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — некоторые числа, причём в каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Будем считать также, что в парах a_1, a_2 и b_1, b_2 числа не равны нулю одновременно.

Умножим первое уравнение системы на b_2, а второе — на $-b_1$. Получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Сложим левые и правые части уравнений этой системы, получим:

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x + (b_2b_1 - b_1b_2)y = b_2c_1 - b_1c_2,$$

откуда

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2. \qquad (3)$$

Далее возможны три варианта.

1. Если $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$, то уравнение (3), а значит, и исходная система (1), имеют единственное решение. Из условия $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ получаем, что в этом случае $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

2. Если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$, а $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$, то уравнение (3), а значит, и исходная система (1) не имеют решений. Из условия $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$ следует, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, а из условия $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ следует, что $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Отсюда получаем: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

3. Если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$ и $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$, то уравнение (3), а значит, и исходная система (1) имеют бесконечно много решений. Значит, при выполнении условия $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ система (1) имеет бесконечно много решений. Для каждого значения x либо из первого

уравнения системы (1), либо из второго можно найти соответствующее значение y.

Таким образом, может быть сделан следующий вывод: система двух линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

- имеет единственное решение, если отношение коэффициентов при одной переменной не равно отношению коэффициентов при другой переменной: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
- не имеет решений, если отношение коэффициентов при одной переменной равно отношению коэффициентов при другой переменной, но не равно отношению свободных членов: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
- имеет бесчисленное множество решений, если отношение коэффициентов при одной переменной равно отношению коэффициентов при другой переменной и равно отношению свободных членов: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Приведём примеры:

система $\begin{cases} 6x - 4y = 1, \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ имеет единственное решение, так как $\frac{6}{3} \neq \frac{-4}{2}$;

система $\begin{cases} 4x + 6y = 1, \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ не имеет решения, так как $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{1}{5}$;

система $\begin{cases} 4x + 6y = 8, \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений, так как $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$.

Упражнения

412. Не решая систему уравнений, выясните, имеет ли система решения и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 3x + 2y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 6y = 2, \\ -x + 2y = -1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3y = 4, \\ 4x + 6y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x + 6y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x = 5, \\ 3x + 2y = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + 5y = -6, \\ 9x + 15y = -18. \end{cases}$

413. Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 2y + 7 = 0, \\ 10x - 4y + 14 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x - 4y - 15 = 0, \\ 10x - 5y - 28 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 3y + 6 = 0, \\ 10x + 30y + 60 = 0; \end{cases}$

414. Известно одно уравнение системы двух линейных уравнений с двумя переменными $3x - 2y = 1$. Подберите второе уравнение так, чтобы система:

а) имела единственное решение;
б) не имела решений;
в) имела бесчисленное множество решений.

415. Дана система уравнений $\begin{cases} kx+4y=6, \\ 5x+8y=3. \end{cases}$ Подберите такое число k, чтобы система имела единственное решение. Существует ли такое значение k, при котором данная система не имеет решения; имеет бесконечное множество решений?

416. В системе уравнений $\begin{cases} 4x-5y=8, \\ kx+15y=m \end{cases}$ подберите такие значения коэффициентов k и m, чтобы система:

а) не имела решений;
б) имела бесчисленное множество решений;
в) имела единственное решение.

П

417. Известно, что точка $B(2; -1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Найдите k, если:

а) $f(x) = kx + 1$; б) $f(x) = 2x + k$.

418. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = 5x - 7$ и $y = 3x + 1$;
б) $y = -3x - 2$ и $y = 8x - 9$;
в) $y = 0{,}4x - 5$ и $y = -0{,}1x - 3$;
г) $y = 23x - 6$ и $y = -2x + 9$;
д) $y = 98x$ и $y = -102x - 3$;
е) $y = -3$ и $y = 36x + 1$.

419. В трёх кусках 75 м ткани. В первом куске в 1,5 раза больше ткани, чем во втором и третьем вместе. Сколько ткани в каждом куске, если во втором на 10 м больше, чем в третьем?

22. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

Задача. Периметр прямоугольника равен 80 см. Если основание прямоугольника увеличить на 8 см, а высоту — на 2 см, то площадь прямоугольника увеличится в полтора раза. Каковы стороны прямоугольника?

▶ Пусть основание прямоугольника равно x см, а высота равна y см.
Так как периметр прямоугольника равен 80 см, то

$$2x + 2y = 80.$$

Площадь прямоугольника равна xy см^2. После увеличения основание прямоугольника будет равно $(x + 8)$ см, высота будет равна $(y + 2)$ см, а площадь будет равна $(x + 8)(y + 2)$ см^2. По условию задачи площадь прямоугольника увеличится в полтора раза, т. е.

$$(x + 8)(y + 2) = 1{,}5xy.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80, \\ (x + 8)(y + 2) = 1{,}5xy. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что $x_1 = 28$, $y_1 = 12$ или $x_2 = 24$, $y_2 = 16$. Задача имеет два решения. Стороны прямоугольника равны 28 см и 12 см или 24 см и 16 см. ◁

Упражнения

420. Сумма двух чисел равна 12, а их произведение равно 35. Найдите эти числа.

421. Одно число на 7 больше другого, а их произведение равно −12. Найдите эти числа.

422. Диагональ прямоугольника равна 10 см, а его периметр равен 28 см. Найдите стороны прямоугольника.

423. Прямоугольный участок земли площадью 2400 м^2 обнесён изгородью, длина которой равна 200 м. Найдите длину и ширину этого участка.

424. Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а его гипотенуза равна 37 см. Найдите площадь этого треугольника.

425. Из некоторого пункта вышли одновременно два отряда. Один направился на север, а другой — на восток. Спустя 4 ч расстояние между отрядами было равно 24 км, причём первый отряд прошёл на 4,8 км больше, чем второй. С какой скоростью шёл каждый отряд?

426. От вершины прямого угла по его сторонам начинают одновременно двигаться два тела. Через 15 с расстояние между ними стало равно 3 м. С какой скоростью двигалось каждое тело, если известно, что первое прошло за 6 с такое же расстояние, какое второе прошло за 8 с?

427. На каждой из сторон прямоугольника построен квадрат. Сумма площадей квадратов равна 122 см^2. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что его площадь равна 30 см^2.

428. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а его гипотенуза равна 10 см. Каковы катеты треугольника?

429. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см. Если один из его катетов увеличить на 4 см, то гипотенуза увеличится на 2 см. Найдите катеты треугольника.

430. Один комбайнёр может убрать урожай пшеницы с участка на 24 ч быстрее, чем другой. При совместной же работе они закончат уборку урожая через 35 ч. Сколько времени потребуется каждому комбайнёру, чтобы одному убрать урожай?

431. Одна из дорожных бригад может заасфальтировать участок дороги на 4 ч быстрее, чем другая. За сколько часов может заасфальтировать участок каждая бригада, если за 24 ч совместной работы они заасфальтировали бы 5 таких участков?

432. Положив в банк некоторую сумму денег, вкладчик получил через год на 40 000 р. больше. Оставив эти деньги в банке ещё на год под такой же процент, он снял со своего счёта всю сумму, которая составила 583 200 р. Какая сумма денег была положена в банк и сколько процентов годовых начислял банк?

433. Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объём земляных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объём работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объёма земляных работ?

434. Груз массой 30 кг производит давление на опору. Если массу груза уменьшить на 2 кг, а площадь опоры уменьшить на 1 дм^2, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Найдите площадь опоры.

435. Рационализаторы цеха внедрили в производство усовершенствованный тип детали. Определите массу детали нового и старого типов, если известно, что деталь нового типа на 0,2 кг легче детали старого типа, причём из 22 кг металла стали делать деталей нового типа на две больше, чем делали деталей старого типа из 24 кг металла.

436. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 40 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Через 4 ч им осталось пройти до встречи 4 км. Если бы из пункта A пешеход вышел на 1 ч раньше, то встреча произошла бы на середине пути. С какой скоростью шёл каждый пешеход?

437. Из пункта M в пункт N, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно два туриста. Один из них прибыл в пункт N на 54 мин позже, чем другой. Найдите скорость каждого туриста, если известно, что скорость одного из них на 1 км/ч меньше, чем скорость другого.

438. Из населённых пунктов M и N, удалённых друг от друга на 50 км, выехали одновременно навстречу друг другу два мотоциклиста и встретились через 30 мин. Найдите скорость каждого мотоциклиста, если известно, что один из них прибыл в пункт M на 25 мин раньше, чем другой в пункт N.

439. После того как смешали 12 г одной жидкости и 14 г другой жидкости большей плотности, получили смесь, плотность которой равна 1,3 г/см^3. Какова плотность каждой жидкости, если известно, что плотность одной из них на 0,2 г/см^3 больше плотности другой?

440. Из куска олова массой 356 г и куска меди массой 438 г сделали сплав. Известно, что плотность олова на 1,6 г/см^3 больше плотности меди. Найдите объём каждого куска металла, если объём куска олова на 20 см^3 меньше объёма куска меди.

441. К раствору, содержащему 50 г соли, добавили 150 г воды. После этого его концентрация уменьшилась на 7,5%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

442. К 70%-му раствору некоторого вещества добавили 30%-й раствор того же вещества. Концентрация нового раствора — 40%. Найдите отношение массы первого раствора к массе второго.

П

443. Приведите пример какого-либо числа, отвечающего указанным характеристикам и покажите положение соответствующей точки на координатной прямой:

а) отрицательное, не являющееся рациональным;

б) рациональное, заключённое между числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$;

в) иррациональное отрицательное;

г) иррациональное, большее $\frac{1}{3}$ и меньшее $\frac{1}{2}$.

444. Запишите без знака модуля:

а) $|2 - \sqrt{3}|$; в) $|\sqrt{2} - 1{,}5|$;

б) $|\sqrt{5} - 3|$; г) $|\sqrt{3} - 1{,}7|$.

П

445. В каких координатных четвертях нет ни одной точки графика функции:

а) $y = -3{,}5x^2 - 2{,}6$; б) $y = x^2 - 12x + 34$?

446. Решите неравенство:

а) $x^2 - 6x < 0$; б) $8x + x^2 \geqslant 0$; в) $x^2 \leqslant 4$; г) $x^2 > 6$.

Контрольные вопросы и задания

1 Что называется решением уравнения с двумя переменными?

2 Что называется графиком уравнения с двумя переменными?

3 Объясните, как решают систему двух уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение второй степени и одно уравнение первой степени. В качестве примера возьмите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

§8 НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

23. Неравенства с двумя переменными

Рассмотрим неравенство $2x^2 - y < 6$. При $x = 2$, $y = 5$ это неравенство обращается в верное числовое неравенство $2 \cdot 2^2 - 5 < 6$. Говорят, что пара (2; 5) является решением этого неравенства.

Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений этих переменных, обращающая данное неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим, как изображается на координатной плоскости множество решений неравенства с двумя переменными.

Сначала выясним, как найти множество решений линейного неравенства с двумя переменными, т. е. неравенства вида $ax + by < c$ или $ax + by > c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа, причём хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля.

Рассмотрим, например, неравенство $x + 2y > 4$ и заменим его равносильным неравенством

$$y > -0,5x + 2.$$

Выберем произвольно значение x, например $x = 2$, и найдём соответствующее ему значение выражения $-0,5x + 2$. Получим $-0,5 \cdot 2 + 2 = 1$. Пара чисел (2; 1) является решением уравнения $y = -0,5x + 2$, так как её координаты удовлетворяют этому уравнению. Любые пары чисел вида $(2; y)$, где $y > 1$, например пары (2; 1,8), (2; 4), (2; 100) и т. д., являются решениями рассматриваемого неравенства. Мы нашли лишь некоторые решения неравенства $y > -0,5x + 2$. Чтобы найти все решения данного неравенства, будем рассуждать аналогично.

Пусть x_0 — произвольно выбранное значение x. Вычислим соответствующее ему значение выражения $-0,5x + 2$. Получим $-0,5 \cdot x_0 + 2$. Пара чисел $(x_0; y_0)$, где $y_0 = -0,5x_0 + 2$, является решением уравнения $y = -0,5x + 2$. Тогда пары чисел $(x_0; y)$, где $y > -0,5x_0 + 2$ (т. е. $y > y_0$), и только эти пары, образуют множество решений данного неравенства.

Теперь выясним, что представляет собой множество точек, координаты которых являются решениями неравенства $x + 2y > 4$. Для этого построим прямую $y = -0,5x + 2$, отметим на ней произвольную точку $M(x_0; y_0)$ и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси x (рис. 58). Координаты точки M удовлетворяют уравнению $y = -0,5x + 2$ (так как точка M принадлежит этой прямой), а координаты любой точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, т. е. точки, расположенной выше точки M, удовлетворяют неравенству $y > -0,5x + 2$.

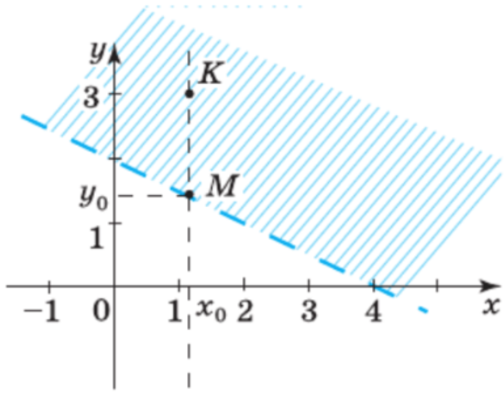

Рис. 58

Значит, неравенством $x + 2y > 4$ задаётся множество точек координатной плоскости, расположенных выше прямой $y = -0,5x + 2$, т. е. открытая полуплоскость (полуплоскость без граничной прямой) (см. рис. 58). Чтобы показать, что прямая $y = -0,5x + 2$ не принадлежит полуплоскости, она на рисунке изображена штриховой линией.

Можно сделать такой вывод. Прямая $x + 2y = 4$ разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на две области: область, расположенную выше данной прямой, и область, расположенную ниже данной прямой. Координаты точек первой области удовлетворяют неравенству $x + 2y > 4$, а координаты точек второй области удовлетворяют неравенству $x + 2y < 4$.

Мы выяснили на частном примере, что представляет собой множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $ax + by < c$ и $ax + by > c$, в случае, когда $b \neq 0$.

Рассмотрим примеры неравенств с двумя переменными второй степени.

Пример 1. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $y \geqslant (x-2)^2$.

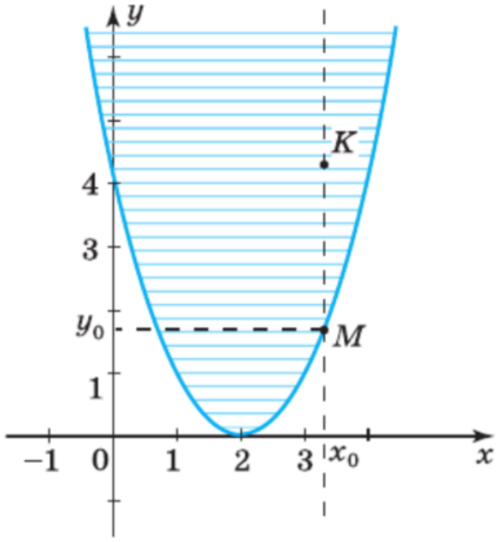

Рис. 59

▶ Построим график уравнения $y = (x-2)^2$. Отметим на параболе $y = (x-2)^2$ произвольную точку $M(x_0; y_0)$ и проведём через эту точку перпендикуляр к оси x (рис. 59). Координаты точки M удовлетворяют уравнению $y = (x-2)^2$, а координаты точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, удовлетворяют неравенству $y > (x-2)^2$. Значит, решениями данного неравенства являются координаты точек, принадлежащих параболе $y = (x-2)^2$, и координаты точек, расположенных выше её. Множество решений этого неравенства изображено на рисунке 59. ◁

Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

▶ Неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 16$ удовлетворяют те и только те пары чисел (значений x и y), сумма квадратов которых не превосходит 16.

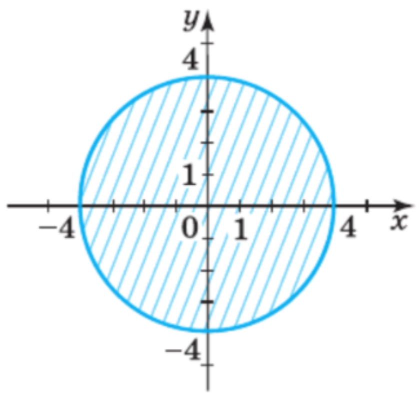

Рис. 60

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 16$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Эта окружность разбивает координатную плоскость на две области: множество точек, расположенных внутри круга, и множество точек, расположенных вне круга. Первая область (рис. 60) вместе с окружностью является множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 16$, а координаты точек второй области удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 > 16$. ◁

Пример 3. Выясним, какое множество точек задаётся неравенством $xy > 6$.

▶ Графиком уравнения $xy = 6$ является гипербола. Этот график разбивает координатную плоскость на три области: A, B и C (рис. 61).

Область A расположена выше ветви гиперболы, лежащей в первой координатной четверти, область B — между ветвями гиперболы, область C — ниже ветви гиперболы, лежащей в третьей координатной четверти.

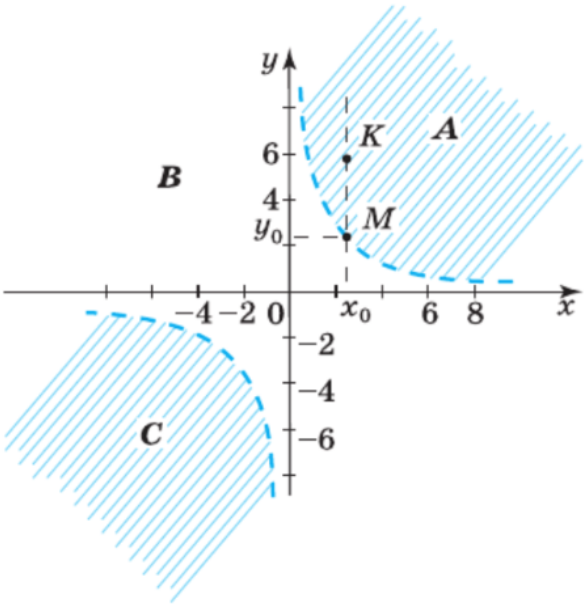

Рис. 61

Отметим на ветви гиперболы, расположенной в первой координатной четверти, точку $M(x_0; y_0)$. Координаты точки M удовлетворяют уравнению $xy = 6$, а координаты точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, удовлетворяют неравенству $xy > 6$, так как произведение координат каждой точки области A больше 6. Значит, координаты точек, расположенных в области A, удовлетворяют неравенству $xy > 6$.

Если точка принадлежит области C, то произведение координат такой точки также больше 6. Значит, координаты точек области также удовлетворяют неравенству $xy > 6$.

Аналогично можно доказать, что координаты каждой точки, расположенной в области B, удовлетворяют неравенству $xy < 6$, т. е. они не являются решениями неравенства $xy > 6$.

Отсюда следует, что множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy > 6$, является объединение областей A и C (см. рис. 61). ◁

Упражнения

447. Является ли пара чисел (–2; 3) решением неравенства:

а) $2x - 3y + 16 > 0$;
б) $x^2 + 3xy - y^2 < 20$;
в) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 < 2$;
г) $(x + y)(y - 8) < 1$;
д) $x^2 + y^2 - x - y \geqslant 0$;
е) $3x^2 - 5y^2 + x - y < 11$?

448. Найдите два каких-нибудь решения неравенства:

а) $y > 2x - 3$;
б) $y < 3x - 5$;
в) $y \leqslant x^2 - 1$;
г) $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

449. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $y \geqslant x$; б) $y \leqslant x - 1$; в) $y > \frac{1}{4}x - 1$; г) $y < \frac{1}{3}x - 3$.

450. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством $ax + by > c$, если:

а) $a = 0,\ b = 1,\ c = 3$; б) $a = 1,\ b = 0,\ c = 3$.

451. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $x \geqslant 3$; б) $y < -1$; в) $1 < x < 4$; г) $-3 \leqslant y \leqslant 3$.

452. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \leqslant x^2 - 4$; в) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;

б) $y \geqslant (x - 2)^2 - 1$; г) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$.

453. (*Для работы в парах.*) Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $xy < 4$; б) $xy > -6$.

1) Разберите совместно пример 3, приведённый в пункте 23.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность выполнения задания и исправьте ошибки, если они допущены.

454. Какое множество точек задаётся неравенством:

а) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \leqslant 0$;

б) $x^2 - 4x - y + 5 \geqslant 0$?

455. Задайте неравенством с двумя переменными:

а) круг с центром в точке (2; 0) и радиусом, равным 3;

б) множество точек, расположенных вне круга с центром в точке (0; 4) и радиусом, равным 2.

456. Опишите неравенством множество точек координатной плоскости, расположенных:

а) выше параболы $y = x^2 - 9$; б) ниже параболы $y = (x + 2)^2$.

457. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $xy \geqslant 0$; б) $xy < 0$.

458. Постройте график уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $\dfrac{x^2 - y}{x} = 0$.

459. Представьте в виде рациональной дроби:

$$\frac{x - 1}{x + 2} - \frac{1 - x}{x^2 + 3x + 2}.$$

460. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - 2 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

24. Системы неравенств с двумя переменными

Рассмотрим систему неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x \leqslant y^2, \\ y < x + 2. \end{cases}$$

Пара чисел (1; 2) значений переменных x и y является решением как первого, так и второго неравенства системы, т. е. является *общим* решением неравенств этой системы. Такую пару чисел называют *решением системы неравенств с двумя переменными.* Множеством решений системы неравенств с двумя переменными является пересечение множеств решений входящих в неё неравенств. На координатной плоскости множество решений системы неравенств изображается множеством точек, представляющих собой общую часть множеств, задаваемых неравенствами, входящими в систему.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 1. \end{cases}$$

▶ Первое неравенство системы задаёт на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиусом, равным 2. На рисунке 62 это множество точек показано горизонтальной штриховкой. Второе неравенство задаёт полуплоскость, которая показана на рисунке 62 наклонной штриховкой. Множество решений системы изображено двойной штриховкой.

Итак, множеством точек, которое задаёт система неравенств

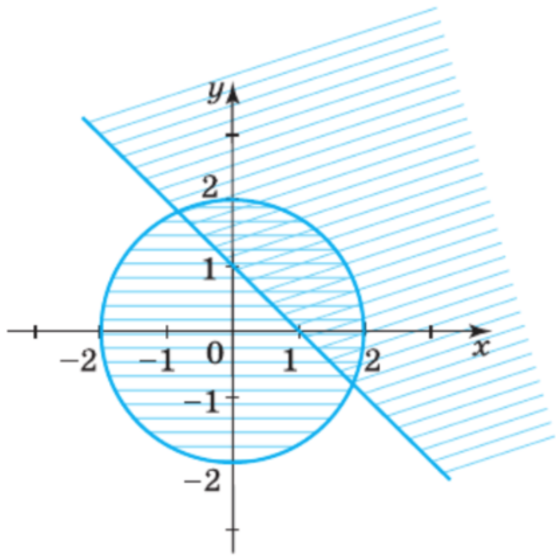

Рис. 62

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 1, \end{cases}$$

является сегмент, показанный на рисунке 62 двойной штриховкой. ◁

Остановимся подробнее на примерах систем, состоящих из двух линейных неравенств.

Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} y \geqslant x - 2, \\ y \geqslant -1{,}5x + 3. \end{cases}$$

▶ Множество точек, задаваемое первым неравенством, — полуплоскость, расположенная выше прямой $y = x - 2$. Множество точек, задаваемое вторым неравенством, — полуплоскость, расположенная выше прямой $y = -1{,}5x + 3$. Пересечение этих множеств представляет собой угол, отмеченный на координатной плоскости двойной штриховкой (рис. 63). ◁

Пример 3. Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 2x + 1, \\ y \geqslant 2x - 2. \end{cases}$$

▶ Множество точек, задаваемое первым неравенством, — полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = 2x + 1$. Множество точек, задаваемое вторым неравенством, — полуплоскость, рас-

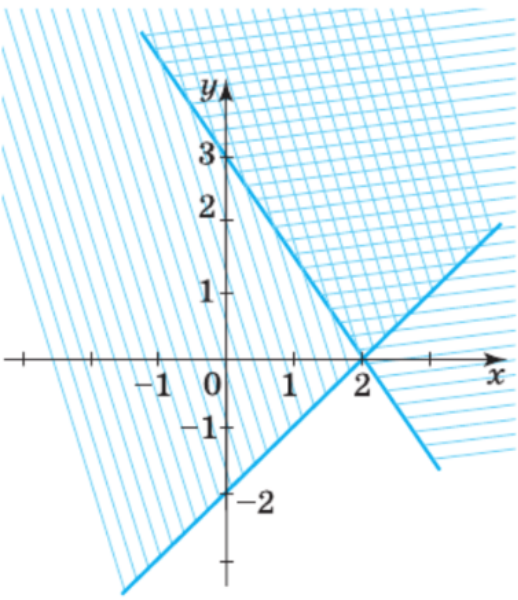

Рис. 63

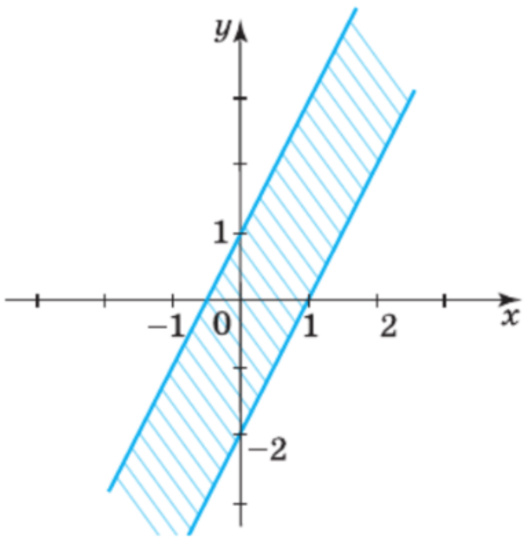

Рис. 64

положенная выше прямой $y = 2x - 2$. Так как угловые коэффициенты прямых

$$y = 2x + 1 \text{ и } y = 2x - 2$$

равны, то прямые параллельны. Следовательно, пересечением указанных полуплоскостей является полоса, изображённая на рисунке 64. ◁

Упражнения

461. Являются ли решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2y > 7, \\ 3x + y > 3 \end{cases}$$

пара чисел:

а) (4; 2); б) (−5; 1); в) (−2; −1); г) (6; −5)?

462. (*Для работы в парах.*) Покажите штриховкой на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant x - 3, \\ y \leqslant -x + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2x + y < -1, \\ x - y > 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y < 4, \\ x + y < 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ x - y < 2. \end{cases}$

1) Обсудите, к какому виду удобно привести неравенства системы в заданиях б), в) и г).
2) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли показано множество решений системы неравенств в каждом случае.

463. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -1, \\ y > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

464. Задайте системой неравенств:

а) первую координатную четверть (включая оси координат);
б) третью координатную четверть (включая оси координат).

465. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ (x-3)^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x - y \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \geqslant 1, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 9. \end{cases}$

466. (*Задача-исследование.*) При каких значениях k и b система неравенств $\begin{cases} y \leqslant 3x-1, \\ y \geqslant kx+b \end{cases}$ задаёт на координатной плоскости:

а) полосу; б) угол; в) прямую?

Может ли эта система не иметь решений?

1) Обсудите, какое множество точек задаёт на координатной плоскости каждое неравенство системы.
2) Выясните, при каких значениях k и b система неравенств задаёт полосу; угол; прямую.
3) Для каждого случая проиллюстрируйте свой ответ рисунком.
4) Приведите пример, когда такая система неравенств не имеет решений.

467. Задайте системой неравенств:

а) треугольник, изображённый на рисунке 65, *а*;
б) кольцо, изображённое на рисунке 65, *б*.

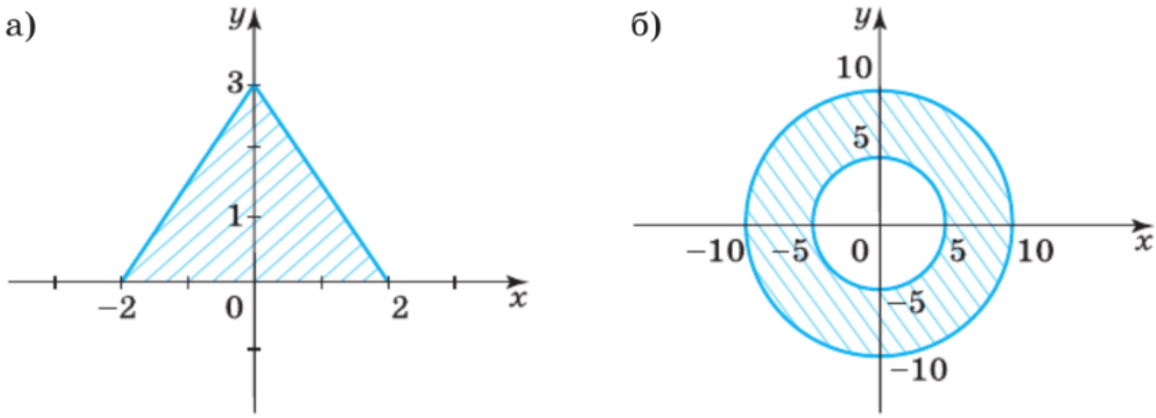

Рис. 65

468. Одна из сторон острого угла проходит через точки (0; 0) и (3; 3), а другая — через точки (0; –2) и (3; –2). Задайте этот угол системой неравенств.

469. Решите уравнение:

а) $(x + 2)^2 + 9(x + 2) + 20 = 0$;
б) $(x - 5)^2 + 2(x - 5) - 63 = 0$.

470. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{15 - x}$.

471. Докажите, что для любого значения x верно неравенство

$$6x(x + 8) - (5x - 27)(x + 17) > 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1 Что называется решением неравенства с двумя переменными?

2 Какую пару чисел называют решением системы неравенств с двумя переменными?

3 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства: а) $x + y \geqslant 4$; б) $xy \geqslant 4$.

4 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 36, \\ x+y \leqslant 6. \end{cases}$$

Для тех, кто хочет знать больше

25. Некоторые приёмы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными

Рассмотрим на примерах некоторые приёмы решения систем уравнений, в которых оба уравнения второй степени.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 - x + 3y = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases}$$

▶ В этой системе многочлен, записанный в левой части первого уравнения, можно разложить на линейные множители:

$$x^2 - 9y^2 - x + 3y =$$
$$= (x - 3y)(x + 3y) - (x - 3y) =$$
$$= (x - 3y)(x + 3y - 1).$$

Система уравнений примет вид

$$\begin{cases} (x - 3y)(x + 3y - 1) = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases}$$

Произведение $(x - 3y)(x + 3y - 1)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x - 3y = 0$ или $x + 3y - 1 = 0$.
Решениями исходной системы являются те пары значений переменных x и y, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - xy + y = 7, \end{cases} \qquad (1)$$

или системе уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases} \qquad (2)$$

Поэтому множеством решений исходной системы является объединение множеств решений систем (1) и (2). Говорят, что данная система равносильна *совокупности систем уравнений* (1) и (2):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - xy + y = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первую систему. Выполнив подстановку $x = 3y$, получим квадратное уравнение $6y^2 + y - 7 = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = -1\frac{1}{6}$, $y_2 = 1$. Подставив их значения в первое уравнение, найдём, что $x_1 = -3\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$. Значит, система (1) имеет решения $\left(-3\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$ и $(3; 1)$.

Решим систему (2). Выполнив подстановку $x = -3y + 1$, получим квадратное уравнение

$$(-3y + 1)^2 - y(-3y + 1) + y - 7 = 0,$$

которое после упрощения примет вид

$$2y^2 - y - 1 = 0,$$

откуда $y_3 = -\frac{1}{2}$, $y_4 = 1$. Подставив эти значения в первое уравнение системы (2), найдём, что $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = -2$. Значит, система (2) имеет решения $(2{,}5; -0{,}5)$, $(-2; 1)$.
Исходная система имеет 4 решения.

Ответ: $\left(-3\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$, $(3; 1)$, $(2{,}5; -0{,}5)$, $(-2; 1)$. ◁

Таким образом, мы решили исходную систему уравнений, заменив её совокупностью двух систем.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y = xy, \\ x^2 - y = 3xy. \end{cases}$$

▶ Воспользуемся способом сложения. Первое уравнение оставим без изменения, а второе умножим на 3. Затем сложим почленно левые и правые части уравнений. Получим уравнение $5x^2 = 10xy$, которое можно представить в виде $x(x - 2y) = 0$. Значит, исходную систему можно заменить равносильной ей совокупностью двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 0,\\ x^2 - y = 3xy,\end{cases}\\ \begin{cases}x = 2y,\\ x^2 - y = 3xy.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система имеет единственное решение: (0; 0), вторая система имеет два решения: (0; 0) и (–1; –0,5).
Исходная система имеет два решения.
Ответ: (0; 0), (–1; –0,5). ◁

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}3x^2 + 4xy + y^2 = 0,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0.\end{cases}$$

▶ Левая часть первого уравнения системы — однородный многочлен, т. е. многочлен, каждый член которого имеет одну и ту же степень.
Разделим обе части первого уравнения на y^2, предполагая, что $y \neq 0$. Получим квадратное относительно $\frac{x}{y}$ уравнение $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 1 = 0$. При этом мы потеряем решение (0; 0) первого уравнения системы. Но так как пара (0; 0) не является решением второго уравнения, то система

$$\begin{cases}3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 1 = 0,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0\end{cases}$$

является равносильной исходной системе.

Обозначив $\frac{x}{y}$ буквой t, получим уравнение $3t^2 + 4t + 1 = 0$.

Решив его, найдём, что $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$, т. е. $\frac{x}{y} = -1$ или $\frac{x}{y} = -\frac{1}{3}$.

Отсюда $x = -y$ или $x = -\frac{1}{3}y$.

Таким образом, решение исходной системы можно свести к решению совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = -y,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\dfrac{1}{3}y,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решив первую систему, найдём, что

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{177}}{12},\ y_1 = \frac{3-\sqrt{177}}{12};\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{177}}{12},\ y_2 = \frac{3+\sqrt{177}}{12}.$$

Решив вторую систему, найдём, что

$$x_3 = \frac{7}{16},\ y_3 = -1\frac{5}{16};\ x_4 = -1,\ y_4 = 3.$$

Ответ:

$$\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{12};\ \frac{3-\sqrt{177}}{12}\right), \left(\frac{-3-\sqrt{177}}{12};\ \frac{3+\sqrt{177}}{12}\right), \left(\frac{7}{16};\ -1\frac{5}{16}\right), (-1;\ 3).$$ ◁

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}x^2 + 3xy + y^2 = 11,\\ xy + x + y = 5.\end{cases}$$

▶ Уравнения в этой системе содержат сумму переменных $x + y$, произведение xy и сумму квадратов $x^2 + y^2$. Если в этой системе заменить x на y, а y на x, то получим ту же систему. Такие системы называют *симметрическими системами*. Их удобно решать, вводя новые переменные.

Пусть $x + y = u$, $xy = v$. Тогда

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases}u^2 - 2v + 3v = 11,\\ v + u = 5,\end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases}u^2 + v = 11,\\ v + u = 5.\end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки, найдём, что $u_1 = -2$, $v_1 = 7$, $u_2 = 3$, $v_2 = 2$. Выполнив обратную замену, получим совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x + y = -2,\\ xy = 7,\end{cases}\\ \begin{cases}x + y = 3,\\ xy = 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений. Вторая имеет решения (1; 2) и (2; 1).

Ответ: (1; 2), (2; 1). ◁

Упражнения

472. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x-2y)(x+3y)=0,\\ x^2-y^2=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-4xy+3y^2+2x-6y=0,\\ x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$

473. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+xy-2y^2-x+y=0,\\ x^2+y^2=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-6xy+5y^2-x+5y=0,\\ x^2-20y^2=5.\end{cases}$

474. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases}x^2-3xy+14=0,\\ 3x^2+2xy-24=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x^2-6y=xy,\\ 3x^2-8y=0{,}5xy.\end{cases}$

475. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+3xy-10y^2=0,\\ x^2-4xy+3y=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+xy-6y^2=0,\\ x^2+3xy+2y-6=0.\end{cases}$

476. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12},\\ x^2-y^2=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=2{,}1,\\ x^2+y^2=29.\end{cases}$

477. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+xy=6,\\ y^2+xy=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-xy=7,\\ y^2-xy=9.\end{cases}$

478. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ xy=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=26,\\ x+y=6.\end{cases}$

479. Найдите множество решений системы:

а) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7,\\ x+xy+y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19,\\ x+xy+y=1.\end{cases}$

480. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}4x(x+y)+y^2=49,\\ 4x(x-y)+y^2=81;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x(3x-4y)+4y^2=64,\\ 3x(3x+4y)+4y^2=16.\end{cases}$

Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 7

481. Докажите, что уравнение не имеет решений:

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5 = 0$; в) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = 0$;
б) $x^2 - 2xy + 8 + y^2 = 0$; г) $x^2y^2 - 2xy + 3 = 0$.

482. Докажите, что уравнение имеет единственное решение:

а) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$; б) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$.

483. Составьте уравнение, графиком которого является:

а) пара прямых $y = x + 5$ и $y = x - 5$;
б) окружность $x^2 + y^2 = 4$ и пара прямых $y = -3$ и $y = 3$;
в) гипербола $xy = 6$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$.

484. Постройте график уравнения:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$; б) $y^2 - x^4 = 0$.

485. Постройте график уравнения:

а) $\dfrac{y - x}{x - 2} = 0$; в) $\dfrac{x^2 + y^2 - 16}{y^2 - 4} = 0$;

б) $\dfrac{y - x^2}{x^2 - 1} = 0$; г) $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2} = 0$.

486. При каком значении a окружность $(x - a)^2 + (y - 3)^2 = 16$ проходит через точку:

а) $A(2; 3)$; б) $B(7; -1)$; в) $C(-2; 7)$; г) $D(1; 5)$?

487. Найдите целые решения уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 5$; б) $x^2 - y^2 = 8$.

488. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + x + x^2 = 0, \\ x - y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 4x + 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = 8, \\ (x + 1)^2 + y^2 = 81; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = 2x^2 - 14; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -x^2 + 4, \\ y = |x|. \end{cases}$

489. Изобразив схематически графики уравнений, определите, имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} x^2 - y + 11 = 0, \\ y + x^2 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+3)^2+(y+4)^2=1,\\(x-2)^2+(y-1)^2=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}y=|x|,\\\frac{1}{2}x^3-y=0.\end{cases}$

490. Сколько решений может иметь система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=r^2,\\y=-x^2+4,\end{cases}$$

где r — положительное число?

491. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\x-y=m\end{cases}$$

имеет: а) одно решение; б) два решения?

492. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+3y=-1,\\x^2+2xy+y=3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x-y=1,\\xy-y^2+3x=-1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x+y-11=0,\\2x+5y-y^2-6=0;\end{cases}$

г) $\begin{cases}2x^2-3y^2-5x-2y=26,\\x-y=4;\end{cases}$

д) $\begin{cases}4x^2-9y^2+x-40y=19,\\2x-3y=5;\end{cases}$

е) $\begin{cases}3x^2+y^2+8x+13y=5,\\x-y+2=0.\end{cases}$

493. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=4,\\(x-1)(y+1)=2xy+3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}y-x=1,\\(2y+1)(x-1)=xy+1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x-y=5,\\(x+1)(y+4)=2xy-1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+y=1,\\(x-1)(y+5)=y^2-12.\end{cases}$

494. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=40,\\xy=-12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+2y^2=228,\\3x^2-2y^2=172.\end{cases}$

495. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+3x-4y=20,\\x^2-2x+y=-5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}y^2+3x-y=1,\\y^2+6x-2y=1.\end{cases}$

496. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + xy + y = 10, \\ xy - 2x - 2y = 2. \end{cases}$

497. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 3)(y - 5) = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ (x - 7y)(x + 7y) = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y + 1) = 0. \end{cases}$

498. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 14, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{20}, \\ x + 2y = 14; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}. \end{cases}$

499. Имеет ли решения система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = -2, \\ 3x + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 - x + y = 100? \end{cases}$$

500. Имеют ли общую точку графики уравнений

$$x + y = 7,\ 2x - y = 2,\ x^2 + xy - y^2 - y = 1?$$

501. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15, \\ x + xy + y = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3. \end{cases}$

502. Если умножить квадратный трёхчлен $ax^2 - 2x + b$ на квадратный трёхчлен $x^2 + ax - 1$, то получится многочлен четвёртой степени, в котором коэффициенты при x^2 и x соответственно равны 8 и -2. Найдите a и b.

503. Сумма двух положительных чисел в 5 раз больше их разности. Найдите эти числа, если известно, что разность их квадратов равна 180.

504. Произведение двух чисел в 15 раз больше их суммы. Если к первому числу прибавить удвоенное второе число, то получится 100. Найдите эти числа.

505. Разность квадратов двух чисел равна 100. Если из утроенного первого числа вычесть удвоенное второе число, то получится 30. Найдите эти числа.

506. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и в 2 раза больше произведения его цифр.

507. Если числитель обыкновенной дроби возвести в квадрат, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 2. Если же числитель дроби уменьшить на 1, а знаменатель увеличить на 1, то получится дробь, равная $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

508. Если числитель обыкновенной дроби увеличить на 7, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная $\frac{3}{4}$. Если же числитель оставить без изменения, а знаменатель увеличить на 6, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

509. Диагональ прямоугольника равна 15 см. Если одну из его сторон уменьшить на 6 см, а другую уменьшить на 8 см, то периметр уменьшится в 3 раза. Найдите стороны прямоугольника.

510. Бассейн наполняется через первую трубу на 5 ч быстрее, чем через вторую. Бассейн можно наполнить, если открыть сначала одну первую трубу на 5 ч, а затем одну вторую на 7,5 ч. За сколько часов наполнится бассейн при совместной работе обеих труб?

511. Чтобы наполнить бассейн, сначала открыли одну трубу и через 2 ч, не закрывая её, открыли вторую. Через 4 ч совместной работы труб бассейн был наполнен. Одна вторая труба могла бы наполнить бассейн в 1,5 раза быстрее, чем одна первая. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу?

512. Из двух городов, расстояние между которыми равно 270 км, одновременно навстречу друг другу выходят два поезда и встречаются через 3 ч. На весь путь один из поездов тратит на 1 ч 21 мин больше, чем другой. Найдите скорость каждого поезда.

513. Из пунктов M и N выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Один из них приехал в пункт N через 1 ч 15 мин после встречи, а другой — в пункт M через 48 мин после встречи. Расстояние между пунктами M и N равно 90 км. Найдите скорости автомобилей.

514. Двое туристов идут навстречу друг другу из пунктов A и B. Первый вышел из пункта A на 6 ч позже, чем второй из пункта B, и при встрече оказалось, что он прошёл на 12 км меньше второго. Продолжая движение с той же скоростью, первый пришёл в пункт B через 8 ч, а второй — в пункт A через 9 ч после встречи. Найдите скорость каждого туриста.

К параграфу 8

515. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y - 2x > 2$; б) $x + y < -1$.

516. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 \leqslant 4$; б) $y \leqslant x^2 - 5x + 6$.

517. Где на координатной плоскости расположены точки, у которых:

а) абсцисса больше ординаты;
б) ордината больше абсциссы?

518. Какое множество точек координатной плоскости задаётся неравенством:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 8y \leqslant 0$; б) $x^2 - 6x + y + 4 > 0$?

519. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \geqslant |x|$; б) $y \leqslant |x - 2|$.

520. Какое множество точек задаёт на координатной плоскости неравенство:

а) $(x - 1)(y - 1) \geqslant 0$; б) $x^2 - y^2 > 0$?

521. Докажите, что неравенством $|x| + |y| \leqslant 1$ на координатной плоскости задаётся фигура, изображённая на рисунке 66.

522. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ xy \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$

523. Укажите какие-нибудь значения k и b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 2x + 3, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости:

а) полосу; б) угол.

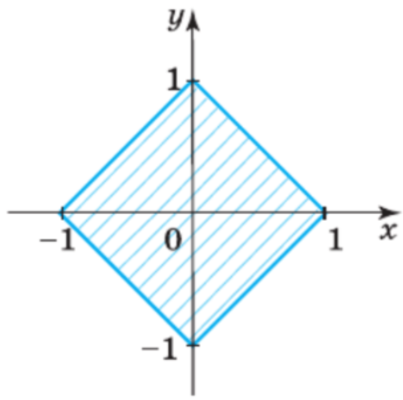

Рис. 66

524. Каким множеством точек изображается множество решений неравенства:

а) $y(x^2 + y^2 - 1) \geqslant 0$; б) $x(x^2 - y) \leqslant 0$?

Глава V АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Вам уже приходилось встречаться с простейшими примерами числовых последовательностей. В этой главе вы узнаете о способах задания последовательностей, научитесь вычислять члены последовательности, заданной с помощью формулы n-го члена или рекуррентным способом. Вы познакомитесь со свойствами интересных последовательностей — арифметической и геометрической прогрессий, с формулами n-го члена и суммы первых n членов этих прогрессий. Советуем обратить внимание на связь арифметической прогрессии с линейной функцией, а геометрической — с показательной функцией. Вам придётся выполнять разнообразные упражнения, в которых изученные сведения о прогрессиях находят применение. Среди заданий на прогрессии вам встретятся различные задачи с практическим содержанием, с сюжетами, взятыми из курсов геометрии и физики. Вас, безусловно, привлекут задачи на вычисление сложных процентов, находящие широкое применение на практике, в частности в банковских расчётах.

§ 9 АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

26. Последовательности

Будем выписывать в порядке возрастания положительные чётные числа. Первое такое число — 2, второе — 4, третье — 6, четвёртое — 8 и т. д. Получим *последовательность*

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \dots .$$

Ясно, что на пятом месте в этой последовательности будет число 10, на десятом — число 20, на сотом — число 200. Вообще для любого натурального числа n можно указать соответствующее ему положительное чётное число; оно равно $2n$.

Рассмотрим ещё одну последовательность. Будем выписывать в порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \dots .$$

Для любого натурального числа n мы можем указать соответствующую дробь, стоящую в этой последовательности на n-м месте; она равна $\frac{1}{n+1}$. Так, на шестом месте должна стоять дробь $\frac{1}{7}$, на тридцатом — дробь $\frac{1}{31}$, на тысячном — дробь $\frac{1}{1001}$.

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности*. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена, например, a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. (читают: «a первое, a второе, a третье, a четвёртое...»). Вообще член последовательности с номером n, или, как говорят, *n-й член последовательности*, обозначают a_n. Саму последовательность будем обозначать так: (a_n).

В рассмотренных примерах мы имели дело с последовательностями, содержащими бесконечно много членов. Такие последовательности называют *бесконечными*. Однако последовательность может содержать и конечное число членов. В таком случае её называют *конечной*. Например, конечной является последовательность двузначных чисел

$$10;\ 11;\ 12;\ 13;\ \dots;\ 98;\ 99.$$

Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером.

Часто последовательность задают с помощью *формулы n-го члена*. Например, последовательность положительных чётных чисел можно задать формулой $a_n = 2n$, последовательность правильных дробей с числителем, равным 1, — формулой $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Приведём другие примеры задания последовательности формулой n-го члена.

Пример 1. Пусть последовательность задана формулой

$$y_n = n^2 - 3n.$$

Подставляя вместо n натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., получаем

$$y_1 = -2,\ y_2 = -2,\ y_3 = 0,\ y_4 = 4,\ y_5 = 10,\ \dots .$$

Рассматриваемая последовательность начинается так:

$$-2;\ -2;\ 0;\ 4;\ 10;\ \dots .$$

Пример 2. Пусть последовательность задана формулой

$$x_n = (-1)^n \cdot 10.$$

Все члены этой последовательности с нечётными номерами равны –10, а с чётными номерами равны 10:

$$x_1 = -10,\ x_2 = 10,\ x_3 = -10,\ x_4 = 10,\ \dots .$$

Получаем последовательность

$$-10;\ 10;\ -10;\ 10;\ -10;\ \dots .$$

Пример 3. Формулой $c_n = 5$ задаётся последовательность, все члены которой равны 5:

$$5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5;\ \dots .$$

Рассмотрим ещё один способ задания последовательности. Он состоит в том, что указывают её первый член или первые несколько членов и формулу, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие (один или несколько). Такую формулу называют *рекуррентной* (от латинского слова *recurro* — «возвращаться»), а соответствующий способ задания последовательности — *рекуррентным способом*.

Приведём пример задания последовательности рекуррентным способом.

Пример 4. Пусть (u_n) — последовательность, в которой $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ при $n > 2$.

Выпишем первые несколько её членов:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \dots .$$

Эта последовательность описана в работах итальянского математика Леонардо из Пизы, известного под именем Леонардо Фибоначчи (1180—1240). Члены этой последовательности называют *числами Фибоначчи*.

Упражнения

525. Выпишите первые несколько членов последовательности натуральных чисел, кратных 3, взятых в порядке возрастания. Укажите первый, пятый, десятый, сотый и n-й члены этой последовательности.

526. Известно, что (c_n) — последовательность, все члены которой с нечётными номерами равны –1, а с чётными равны 0. Выпишите первые восемь членов этой последовательности. Найдите c_{10}, c_{25}, c_{200}, c_{253}, c_{2k}, c_{2k+1} (k — произвольное натуральное число).

527. Пусть (a_n) — последовательность квадратов натуральных чисел. Выпишите первые десять членов этой последовательности. Найдите a_{20}, a_{40}, a_n.

528. Какой член последовательности a_1, a_2, a_3, ... :

а) следует за членом a_{99}, a_{200}, a_n, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n};

б) предшествует члену a_{71}, a_{100}, a_{n-2}, a_{n+3}, a_{3n}?

529. Перечислите члены последовательности (x_n), которые расположены между:

а) x_{31} и x_{35}; б) x_n и x_{n+6}; в) x_{n-4} и x_n; г) x_{n-2} и x_{n+2}.

530. Найдите первые шесть членов последовательности, заданной формулой n-го члена:

а) $x_n = 2n - 1$; в) $x_n = \frac{n}{n+1}$; д) $x_n = 2^{n-3}$;

б) $x_n = n^2 + 1$; г) $x_n = (-1)^{n+1} \cdot 2$; е) $x_n = 0{,}5 \cdot 4^n$.

531. Последовательность (b_n) задана формулой $b_n = 2n^2 + 3n$. Найдите:

а) b_5; б) b_{10}; в) b_{50}.

532. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = n^2 - n - 20$. Укажите номера отрицательных членов последовательности и вычислите эти члены.

533. Вычислите второй, третий, четвёртый и пятый члены последовательности (b_n), если известно, что:

а) первый член равен 10, а каждый следующий на 3 больше предыдущего, т. е. $b_1 = 10$ и $b_{n+1} = b_n + 3$;

б) первый член равен 40, а каждый следующий равен предыдущему, делённому на 2, т. е. $b_1 = 40$ и $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$.

534. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n), если:

а) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; в) $a_1 = 16$, $a_{n+1} = -0{,}5a_n$;

б) $a_1 = 1000$, $a_{n+1} = 0{,}1a_n$; г) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^{-1}$.

535. Выпишите первые четыре члена последовательности (b_n), если:

а) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n + 5$; б) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n \cdot 5$.

П

536. Найдите пару положительных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 45$, если известно, что y вдвое больше x.

537. Решите уравнение:

а) $4x^4 + 4x^2 - 15 = 0$; б) $2x^4 - x^2 - 36 = 0$.

538. Решите неравенство:

а) $x^2 + x - 42 \leqslant 0$; б) $(x + 11)(x + 4)(x - 1) > 0$.

539. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:

а) $81 \cdot 3^{-6}$; б) $\dfrac{(-3^{-3})^3}{-9^{-2}}$; в) $9^{-5} \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}$; г) $(-3^{-3})^2 \cdot 27^3$.

27. Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии

Рассмотрим числовую последовательность:

$$1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \ldots .$$

Каждый её член, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену числа 4. Эта последовательность является примером *арифметической прогрессии*.

> **Определение.** Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Иначе говоря, последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом постоянна и равна d, т. е. при любом натуральном n верно равенство

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Число d называют *разностью арифметической прогрессии*.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать её первый член и разность d. Приведём примеры.

Если $a_1 = 1$ и $d = 1$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots ,$$

члены которой — последовательные натуральные числа.

Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \ldots ,$$

которая является последовательностью положительных нечётных чисел.

Если $a_1 = -2$ и $d = -2$, то получим арифметическую прогрессию

$$-2;\ -4;\ -6;\ -8;\ -10;\ \ldots,$$

которая является последовательностью отрицательных чётных чисел.

Если $a_1 = 7$ и $d = 0$, то имеем арифметическую прогрессию

$$7;\ 7;\ 7;\ 7;\ 7;\ \ldots,$$

все члены которой равны между собой.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой её член, вычисляя последовательно второй, третий, четвёртый и т. д. члены. Однако для нахождения члена прогрессии с большим номером такой способ неудобен. Постараемся отыскать способ, требующий меньшей вычислительной работы.

По определению арифметической прогрессии

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d,\\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,\\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.
\end{aligned}$$

Точно так же находим, что $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$, ... Вообще чтобы найти a_n, нужно к a_1 прибавить $(n-1)d$, т. е.

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n-1).}$$

Мы получили *формулу n-го члена арифметической прогрессии*.

Приведём примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия, в которой $c_1 = 0{,}62$ и $d = 0{,}24$. Найдём пятидесятый член этой прогрессии.

▶ Имеем $c_{50} = 0{,}62 + 0{,}24 \cdot (50 - 1) = 12{,}38$. ◁

Пример 2. Выясним, является ли число -122 членом арифметической прогрессии (x_n):

$$23;\ 17{,}2;\ 11{,}4;\ 5{,}6;\ \ldots\ .$$

▶ В данной арифметической прогрессии $x_1 = 23$ и $d = x_2 - x_1 = 17{,}2 - 23 = -5{,}8$. Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$$x_n = 23 - 5{,}8\,(n-1),\ \text{т. е. }\ x_n = 28{,}8 - 5{,}8n.$$

Число -122 является членом арифметической прогрессии (x_n), если существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $28{,}8 - 5{,}8n$ равно -122.

Решим уравнение

$$28{,}8 - 5{,}8n = -122,$$

$$5{,}8n = 150{,}8, \ n = 26.$$

Значит, число -122 является 26-м членом данной арифметической прогрессии. ◁

Отметим важное свойство арифметической прогрессии:

каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

● Действительно, если последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, \text{ т. е.}$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}. \ ○$$

Верно и обратное утверждение:

если в последовательности (a_n) каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

● Действительно, из равенства

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ где } n \geqslant 2,$$

следует, что

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

а это означает, что разность между последующим и предыдущим членами последовательности (a_n) остаётся постоянной. Значит, последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. ○

Заметим, что формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ можно записать иначе:

$$a_n = dn + (a_1 - d).$$

Отсюда ясно, что

любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида

$$a_n = kn + b,$$

где k и b — некоторые числа.

Верно и обратное:

последовательность (a_n), заданная формулой вида

$$a_n = kn + b,$$

где k и b — некоторые числа, является арифметической прогрессией.

● Действительно, найдём разность $(n+1)$-го и n-го членов последовательности (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b - kn - b = k.$$

Значит, при любом n справедливо равенство

$$a_{n+1} = a_n + k,$$

и, по определению, последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, причём разность этой прогрессии равна k. ○

Пример 3. Изобразим точками на числовой оси члены арифметической прогрессии, заданной формулой:

а) $a_n = -6{,}5 + 1{,}5n$; б) $a_n = 9 - 2{,}5n$.

▶ а) Из формулы получаем $a_1 = -6{,}5 + 1{,}5 \cdot 1 = -5$, $d = 1{,}5$. Все члены прогрессии расположены на числовой оси (рис. 67, *а*) <u>правее</u> a_1 с шагом $d = 1{,}5$, т. е. $a_2 = -3{,}5$, $a_3 = -2$ и т. д.

б) Из формулы получаем $a_1 = 9 - 2{,}5 \cdot 1 = 6{,}5$, $d = -2{,}5$. Все члены прогрессии расположены на числовой оси (рис. 67, *б*) <u>левее</u> a_1 с шагом $d = -2{,}5$, т. е. $a_2 = 4$, $a_3 = 1{,}5$ и т. д.

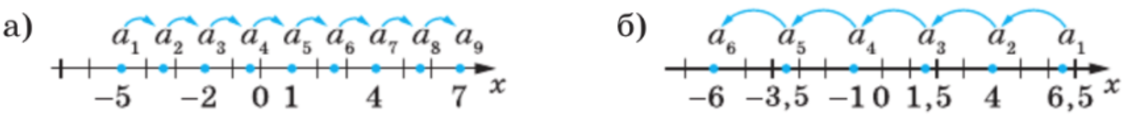

Рис. 67

Упражнения

540. Выпишите первые пять членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 10$, $d = 4$; в) $a_1 = 1{,}7$, $d = -0{,}2$;
б) $a_1 = 30$, $d = -10$; г) $a_1 = -3{,}5$, $d = 0{,}6$.

541. Изобразите точками на числовой оси члены арифметической прогрессии, заданной формулой:

а) $a_n = -10 + 2n$; б) $a_n = 8 - 3n$.

542. Последовательность (b_n) — арифметическая прогрессия, первый член которой равен b_1, а разность равна d. Выразите через b_1 и d:

а) b_7; в) b_{231}; д) b_{k+5};
б) b_{26}; г) b_k; е) b_{2k}.

543. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) c_5, если $c_1 = 20$ и $d = 3$;
б) c_{21}, если $c_1 = 5{,}8$ и $d = -1{,}5$.

544. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) a_{11}, если $a_1 = -3$ и $d = 0{,}7$;
б) a_{26}, если $a_1 = 18$ и $d = -0{,}6$.

545. Найдите десятый и n-й члены арифметической прогрессии:

а) $\frac{1}{3}$; -1; ... ; б) 2,3; 1; ... .

546. Найдите двадцать третий и n-й члены арифметической прогрессии:

а) -8; $-6{,}5$; ... ; б) 11; 7; ... .

547. Тело в первую секунду движения прошло 7 м, а за каждую следующую секунду — на 3 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние тело прошло за восьмую секунду?

548. Поезд, отойдя от станции, стал двигаться, увеличивая скорость на 50 м в минуту. Какова была скорость поезда в конце двадцатой минуты?

549. (*Для работы в парах.*) На стороне OA угла AOB от его вершины отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые (рис. 68). Длина отрезка A_1B_1 равна 1,5 см. Найдите длину отрезка:

а) A_5B_5; б) $A_{10}B_{10}$.

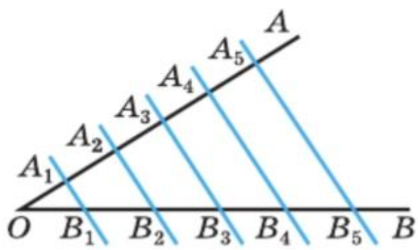

Рис. 68

1) Обсудите, какое известное вам из курса геометрии свойство надо использовать для решения задачи.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание, и исправьте ошибки, если они допущены.

550. Найдите первый член арифметической прогрессии (x_n), если известно, что:

а) $x_{30} = 128$, $d = 4$; в) $x_{11} = 36$, $d = -8$;
б) $x_{45} = -208$, $d = -7$; г) $x_{17} = 1$, $d = -3$.

551. Найдите разность арифметической прогрессии (y_n), в которой:

а) $y_1 = 10$, $y_5 = 22$; в) $y_1 = 16$, $y_8 = -1$;
б) $y_1 = 28$, $y_{15} = -21$; г) $y_1 = -22$, $y_{16} = -4$.

552. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) c_1, если $c_{36} = 26$ и $d = 0{,}7$;
б) d, если $c_1 = -10$ и $c_{15} = 1{,}2$.

553. Между числами 5 и 1 вставьте семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

554. (*Задача-исследование.*) Могут ли числа 20 и 35 быть членами арифметической прогрессии, первый член которой равен 12 и разность не равна 1?

1) Предположив, что числа 20 и 35 являются членами арифметической прогрессии, выразите каждое из них через d, n или m, где d — разность прогрессии, n — номер члена, равного 20, m — номер члена, равного 35. Докажите, что $\frac{n-1}{m-1} = \frac{8}{23}$.

2) Полагая, что $n - 1 = 8k$ и $m - 1 = 23k$, где $k \in N$, выразите m и n через k. Обсудите, как, выбрав значение k, большее 1, можно получить арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условию задачи. Выполните необходимые вычисления.
3) Объясните, почему значение $k = 1$ приводит к противоречию с условием задачи.

555. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (c_n), если:

а) $c_5 = 27$, $c_{27} = 60$; б) $c_{20} = 0$, $c_{66} = -92$.

556. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (x_n), если $x_{16} = -7$ и $x_{26} = 55$.

557. Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9; ... число:

а) 156; б) 295?

558. Дана арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_1 = 32$ и $d = -1,5$. Является ли членом этой прогрессии число: а) 0; б) -28?

559. В арифметической прогрессии (x_n) первый член равен 8,7, а разность равна $-0,3$. Для каких членов прогрессии выполняется условие:

а) $x_n \geqslant 0$; б) $x_n < 0$?

560. Найдите номера отрицательных членов арифметической прогрессии $-20,3$; $-18,7$; ... . Чему равен первый положительный член этой прогрессии?

561. Докажите, что если числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ и $b^2 + bc + c^2$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

562. Известно, что числа a^2, b^2, c^2 — последовательные члены арифметической прогрессии. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

563. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

а) $a_n = 3n + 1$; в) $a_n = n + 4$; д) $a_n = -0,5n + 1$;

б) $a_n = n^2 - 5$; г) $a_n = \frac{1}{n+4}$; е) $a_n = 6n$?

564. Докажите, что последовательность сумм внутренних углов треугольника, выпуклого четырёхугольника, выпуклого пятиугольника и т. д. является арифметической прогрессией. Чему равна её разность?

П

565. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ x^2 - y^2 = -12. \end{cases}$

566. Решите уравнение:

а) $x^3 + 4x^2 - 32x = 0$; б) $x^3 - 10x^2 + 4x - 40 = 0$.

567. Решите неравенство:

а) $(2x - 1)(x + 8) > 0$; б) $(33 - x)(16 + 2x) \leqslant 0$.

568. Найдите значение выражения:

а) $125^{-1} \cdot 25^2$; в) $\frac{16^{-3} \cdot 4^5}{8}$;

б) $0,0001 \cdot (10^3)^2 \cdot (0,1)^{-2}$; г) $9^4 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-3} \cdot 81^{-4}$.

28. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

Пусть требуется найти сумму первых ста натуральных чисел. Покажем, как можно решить эту задачу, не выполняя непосредственного сложения чисел.

Обозначим искомую сумму через S и запишем её дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания, а во втором — в порядке убывания:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100,$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, даёт в сумме 101. Всего таких пар 100. Поэтому, сложив равенства почленно, получим

$$2S = 101 \cdot 100,$$

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = 5050.$$

С рассмотренной задачей связана история, которую рассказывают об известном немецком математике Карле Гауссе. Когда учитель предложил ученикам третьего класса сложить все числа от 1 до 100 включительно, рассчитывая при этом надолго занять их работой, маленький Карл моментально подошёл с готовым ответом. Возможно, он заметил, что каждая из сумм $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... равна 101, а таких сумм 50.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые мы провели при вычислении суммы первых ста натуральных чисел, можно найти сумму первых n членов любой арифметической прогрессии.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) через S_n и запишем эту сумму дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания их номеров, а во втором случае в порядке убывания:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n, \qquad (1)$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Сумма каждой пары членов прогрессии, расположенных друг под другом, равна $a_1 + a_n$. Действительно,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

и т. д.

Число таких пар равно n. Поэтому, сложив почленно равенства (1) и (2), получим

$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

Разделив обе части последнего равенства на 2, получим *формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:*

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.} \qquad \text{(I)}$$

Заметим, что если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Подставив в формулу (I) вместо a_n выражение $a_1 + d(n - 1)$, получим

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + d(n-1))n}{2},$$

т. е.

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.} \qquad \text{(II)}$$

Приведём примеры вычисления суммы членов арифметической прогрессии.

Пример 1. Найдём сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии 4; 5,5; ... .

▶ В данной арифметической прогрессии $a_1 = 4$, $d = 1{,}5$. Тридцатый член прогрессии найдём по формуле n-го члена:

$$a_{30} = 4 + 1{,}5 \cdot 29 = 47{,}5.$$

Теперь вычислим сумму первых тридцати членов, воспользовавшись формулой (I):

$$S_{30} = \frac{(4 + 47{,}5) \cdot 30}{2} = 772{,}5.$$

Если для решения рассмотренной задачи воспользоваться формулой (II), то вычисления будут выглядеть так:

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 4 + 1{,}5 \cdot 29}{2} \cdot 30 = 772{,}5. \ \triangleleft$$

Пример 2. Найдём сумму первых сорока членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 5n - 4$.

▶ Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, так как она задана формулой вида

$$a_n = kn + b, \text{ где } k = 5 \text{ и } b = -4.$$