Найдём первый и сороковой члены этой арифметической прогрессии:

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1,\ a_{40} = 5 \cdot 40 - 4 = 196.$$

Теперь по формуле (I) вычислим S_{40}:

$$S_{40} = \frac{(1 + 196) \cdot 40}{2} = 3940. \ \triangleleft$$

П р и м е р 3. Найдём сумму всех натуральных чисел, кратных шести и не превосходящих 250.

▶ Натуральные числа, кратные шести, образуют арифметическую прогрессию, которую можно задать формулой $a_n = 6n$. Чтобы выяснить, сколько членов этой прогрессии не превосходят 250, решим неравенство $6n \leqslant 250$. Получим $n \leqslant 41\frac{2}{3}$.

Значит, число членов прогрессии, сумму которых надо найти, равно 41.
Имеем

$$a_1 = 6,\ a_{41} = 6 \cdot 41 = 246,$$

$$S_{41} = \frac{(6 + 246) \cdot 41}{2} = 5166. \ \triangleleft$$

П р и м е р 4. Пифагор (IV в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами. Подсчитывая число кружков в треугольниках, квадратах, пятиугольниках (рис. 69), они получали:

- последовательность (a_n) треугольных чисел

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots;$$

- последовательность (b_n) квадратных чисел

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots;$$

- последовательность (c_n) пятиугольных чисел

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ \ldots.$$

КАРЛ ГАУСС (1777—1855) — немецкий математик, астроном, геодезист, физик. Выдающиеся математические способности проявил в раннем детстве. Его многочисленные исследования в области алгебры, теории чисел, геометрии и математического анализа оказали значительное влияние на развитие теоретической и прикладной математики, астрономии, геодезии, физики.

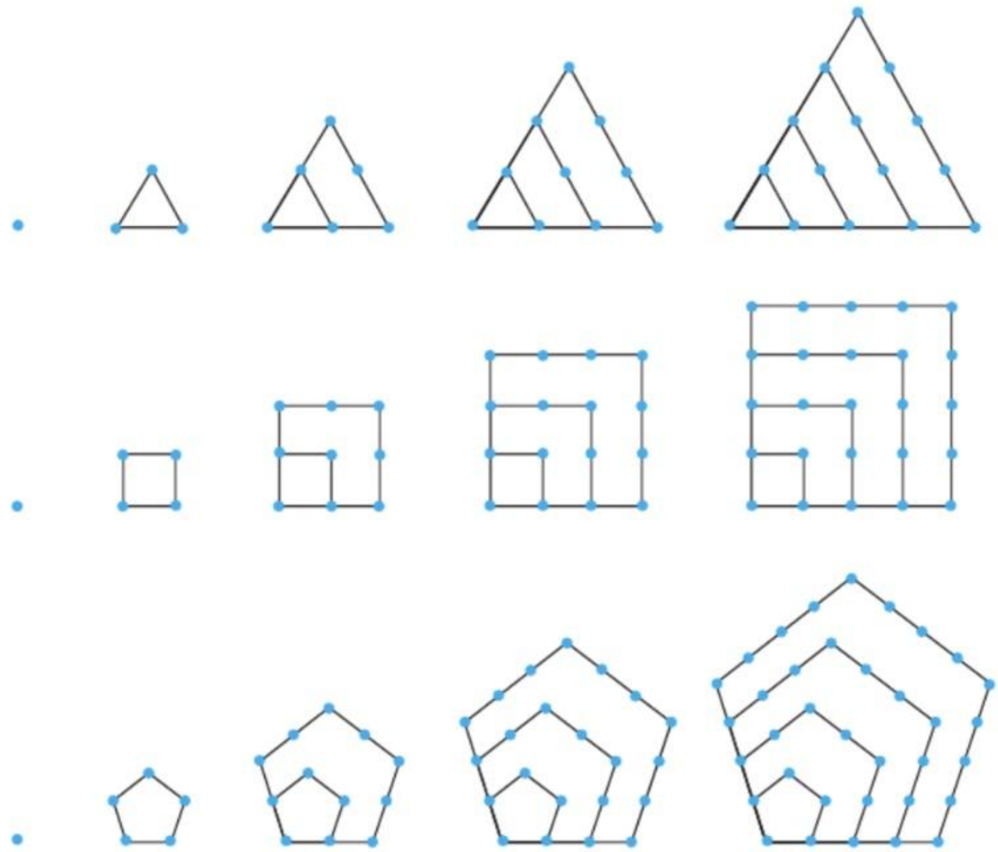


Рис. 69

Зададим каждую из этих последовательностей формулой n-го члена.

▶ Последовательность (a_n) треугольных чисел получается из последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... , т. е. из арифметической прогрессии, в которой первый член и разность равны 1, следующим образом:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 2,\ a_3 = 1 + 2 + 3,$$
$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

ДИОФАНТ (III в.) — древнегреческий математик из Александрии. В его «Арифметике» изложены начала алгебры, решён ряд задач, сводящихся к неопределённым уравнениям различных степеней. Теория диофантовых уравнений и теория диофантовых приближений — так названы два больших раздела современной теории чисел. Его труды оказали большое влияние на развитие математики.

Значит,

$$a_n = \frac{1+n}{2}n.$$

Последовательность (b_n) квадратных чисел аналогичным способом получается из последовательности нечётных чисел 1, 3, 5, ... , т. е. из арифметической прогрессии, первый член которой равен 1 и разность равна 2:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1 + 3,\ b_3 = 1 + 3 + 5,$$
$$b_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1.$$

Следовательно,

$$b_n = \frac{1 + 2n - 1}{2}n,\ b_n = n^2.$$

Мы пришли к формуле, очевидной для последовательности квадратных чисел.

Последовательность (c_n) пятиугольных чисел таким же способом можно получить из арифметической прогрессии 1, 4, 7, ... , в которой первый член равен 1 и разность равна 3:

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1 + 4,\ c_3 = 1 + 4 + 7,$$
$$c_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3(n - 1)).$$

Значит,

$$c_n = \frac{1 + 1 + 3(n-1)}{2}n,\ c_n = \frac{3n-1}{2}n. \ \triangleleft$$

Упражнения

569. Найдите сумму первых шестидесяти членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 3,\ a_{60} = 57$; б) $a_1 = -10{,}5,\ a_{60} = 51{,}5$.

570. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии:

а) $-23;\ -20;\ \ldots$; б) $14{,}2;\ 9{,}6;\ \ldots$.

571. Вычислите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -17,\ d = 6$; б) $b_1 = 6{,}4,\ d = 0{,}8$.

572. Найдите сумму первых пятидесяти, ста, n членов последовательности (x_n), если:

а) $x_n = 4n + 2$; в) $x_n = n - 4$;

б) $x_n = 2n + 3$; г) $x_n = 3n - 1$.

573. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 3n + 2$. Найдите сумму первых:

а) двадцати её членов; б) пятнадцати её членов.

574. Найдите:

а) сумму $2 + 4 + 6 + ... + 2n$, слагаемыми которой являются все чётные натуральные числа от 2 до $2n$;

б) сумму $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$, слагаемыми которой являются все нечётные натуральные числа от 1 до $2n - 1$.

575. Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, не превосходящих 150;

б) всех натуральных чисел от 20 до 120 включительно;

в) всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 300;

г) всех натуральных чисел, кратных 7 и не превосходящих 130.

576. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по тридцатый включительно, если первый член равен 10 и разность равна 3.

577. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с шестого по двадцать пятый включительно, если первый член равен 21 и разность равна $-0,5$.

578. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (c_n), если $c_7 = 18,5$ и $c_{17} = -26,5$.

579. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии (b_n), если $b_1 = 4,2$ и $b_{10} = 15,9$.

580. При свободном падении тело прошло в первую секунду 5 м, а в каждую следующую на 10 м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло её дна через 5 с после начала падения.

581. (*Для работы в парах.*) Какое расстояние пройдёт свободно падающее тело:

а) за пятую секунду после начала падения;

б) за пять секунд после начала падения?

1) Обсудите, какое известное вам из курса физики свойство надо использовать для решения задачи.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание.

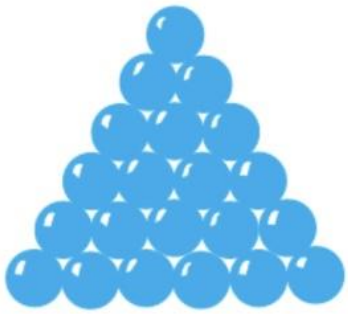


Рис. 70

582. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д. (рис. 70). Во сколько рядов размещены шары, если их число равно 120? Сколько потребуется шаров для треугольника из 30 рядов?

583. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots,$$

сумма которых не превосходит 120.

584. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии 17, 14, 11, ... , при сложении которых получается положительное число.

П

585. В арифметической прогрессии $a_7 = 8$ и $a_{11} = 12{,}8$. Найдите a_1 и d.

586. Является ли членом арифметической прогрессии 20,7; 18,3; ... число:

а) −1,3; б) −3,3?

587. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 = 13, \\ 3xy = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 6, \\ 3x^2 + xy - x = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ y^2 - 4x^2 = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 + y = 5. \end{cases}$

588. Покажите штриховкой множество точек, которое задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ 2y + x \leqslant 5. \end{cases}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример последовательности, заданной:
а) формулой n-го члена; б) рекуррентной формулой.
Найдите пять первых членов этой последовательности.
2. Сформулируйте определение арифметической прогрессии. Какое число называют разностью арифметической прогрессии?
3. Как выражается любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, через предыдущий и последующий члены?
4. Запишите формулы n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии.

§ 10 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

29. Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии

Рассмотрим последовательность, членами которой являются степени числа 2 с натуральными показателями: 2; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; ... .

Каждый член этой последовательности, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является примером *геометрической прогрессии*.

> **Определение.** Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Иначе говоря, последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, если для любого натурального n выполняются условия

$$b_n \neq 0 \text{ и } b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где q — некоторое число.

Обозначим, например, через (b_n) последовательность натуральных степеней числа 2. В этом случае для любого натурального n верно равенство $b_{n+1} = b_n \cdot 2$, здесь $q = 2$.

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого её члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т. е. при любом натуральном n верно равенство

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Число q называют *знаменателем геометрической прогрессии*. Ясно, что знаменатель геометрической прогрессии отличен от нуля.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать её первый член и знаменатель. Приведём примеры.

Если $b_1 = 1$ и $q = 0{,}1$, то получим геометрическую прогрессию

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots .$$

Условиями $b_1 = -5$ и $q = 2$ задаётся геометрическая прогрессия

$$-5;\ -10;\ -20;\ -40;\ -80;\ \ldots .$$

Если $b_1 = 2$ и $q = -3$, то имеем прогрессию

$$2;\ -6;\ 18;\ -54;\ 162;\ \ldots .$$

Если $b_1 = 8$ и $q = 1$, то получим геометрическую прогрессию

$$8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ \dots .$$

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии, можно найти последовательно второй, третий и вообще любой её член:

$$b_2 = b_1q,$$
$$b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2,$$
$$b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3.$$

Точно так же находим, что $b_5 = b_1q^4$, $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1q^6$ и т. д. Вообще, чтобы найти b_n, мы должны b_1 умножить на q^{n-1}, т. е.

$$\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}}.$$

Мы получили *формулу n-го члена геометрической прогрессии.*

Приведём примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. В геометрической прогрессии $b_1 = 12{,}8$ и $q = \frac{1}{4}$. Найдём b_7.

▶ По формуле n-го члена геометрической прогрессии

$$b_7 = 12{,}8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{128}{10} \cdot \frac{1}{4^6} = \frac{2^7}{10 \cdot 2^{12}} = \frac{1}{2^5 \cdot 10} = \frac{1}{320}. \ ◁$$

Пример 2. Найдём восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 162$ и $b_3 = 18$.

▶ Зная первый и третий члены геометрической прогрессии, можно найти её знаменатель q. Так как $b_3 = b_1q^2$, то

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}.$$

Решив уравнение $q^2 = \frac{1}{9}$, найдём, что $q = \frac{1}{3}$ или $q = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = \frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}$.

Если $q = -\frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}$.

Задача имеет два решения:

$$b_8 = \frac{2}{27} \text{ или } b_8 = -\frac{2}{27}. \ ◁$$

Члены как арифметической, так и геометрической прогрессии изображают точками на координатной плоскости.

Пример 3. Выясним, как можно изобразить на координатной плоскости:

а) члены арифметической прогрессии 0,5; 2; 3,5; 5; ...; a_n; ...;

б) члены геометрической прогрессии 0,5; 1; 2; 4; ...; b_n; ... .

▶ а) Формулу n-го члена арифметической прогрессии можно записать в виде $a_n = dn + (a_1 - d)$. Этой формулой задаётся линейная функция. Члены арифметической прогрессии изображаются на координатной плоскости точками с координатами $(1;\ a_1)$, $(2;\ a_2)$, $(3;\ a_3)$ и т. д., лежащими на прямой вида $y = kx + l$, где $k = d$, $l = a_1 - d$.

На рисунке 71, *а* построены точки, изображающие на координатной плоскости первые шесть членов арифметической прогрессии

$$0{,}5;\ 2;\ 3{,}5;\ 5;\ 6{,}5;\ 8;\ \ldots .$$

Они лежат на прямой $y = 1{,}5x - 1$ на одинаковом расстоянии друг от друга.

б) Формулу n-го члена геометрической прогрессии можно записать в виде $b_n = \dfrac{b_1}{q} \cdot q^n$. Значит, геометрическую прогрессию можно задать формулой вида $y = ca^n$. Функцию, задаваемую формулой вида $y = ca^x$, называют *показательной* или *экспоненциальной функцией*. На координатной плоскости члены геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, где $q > 0$, $q \neq 1$, изображаются точками с абсциссами 1, 2, 3, ..., n, ..., расположенными на кривой, являющейся графиком показательной функции $y = ca^x$, где $c = \dfrac{b_1}{q}$, $a = q$.

На рисунке 71, *б* построены точки, изображающие на координатной плоскости первые пять членов геометрической прогрессии

$$0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots .$$

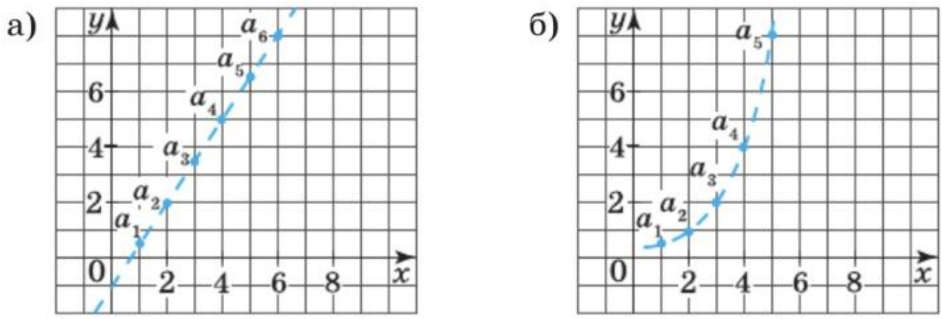


Рис. 71

Эти точки имеют координаты (1; 0,5), (2; 1), (3; 2), (4; 4), (5; 8) и расположены на кривой, являющейся графиком функции $y = 0{,}25 \cdot 2^x$. С возрастанием x расстояние между точками, изображающими члены последовательности, увеличивается, и они резко уходят вверх. ◁

В рассмотренных случаях говорят о *линейном росте* членов арифметической прогрессии и об *экспоненциальном росте* членов геометрической прогрессии.

Пример 4. Вкладчик положил в банк 500 000 р. на счёт, по которому сумма вклада ежегодно возрастает на 8%. Какая сумма будет у него на счету через 6 лет?

▶ Начальная сумма вклада составляла 500 000 р. Через год эта сумма возрастёт на 8% и составит 108% от 500 000 р., т. е. будет равна $500\,000 \cdot 1{,}08$ р. Через 2 года накопленная сумма составит $(500\,000 \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08$ р., т. е. $500\,000 \cdot 1{,}08^2$ р. Через 3 года на счету у вкладчика будет $(500\,000 \cdot 1{,}08^2) \cdot 1{,}08 = 500\,000 \cdot 1{,}08^3$ р. и т. д.
Таким образом, мы имеем дело с геометрической прогрессией

$$500\,000,\ 500\,000 \cdot 1{,}08,\ 500\,000 \cdot 1{,}08^2,\ 500\,000 \cdot 1{,}08^3,\ \ldots .$$

Сумма, накопленная на счету у вкладчика, через 6 лет будет равна седьмому члену этой прогрессии, т. е. составит

$$500\,000 \cdot 1{,}08^6.$$

Выполнив вычисления, найдём, что

$$500\,000 \cdot 1{,}08^6 \approx 793\,437.$$

(При выполнении вычислений удобно использовать калькулятор.) Значит, на счету у вкладчика через 6 лет окажется сумма, приближённо равная 793 437 р. ◁

В рассмотренном примере нам приходилось вычислять один и тот же процент от величины, найденной на предыдущем шаге. В таких случаях говорят, что мы имеем дело со *сложными процентами*.

Геометрическая прогрессия обладает следующим свойством:

> квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего её членов.

● Действительно, если последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то

$$b_n = b_{n-1}q,\ b_{n+1} = b_n q.$$

Так как все члены геометрической прогрессии отличны от нуля, то отсюда следует, что

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

$$\boldsymbol{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Верно и обратное утверждение:

> если в последовательности чисел, отличных от нуля, квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией.

Докажите это самостоятельно.

Заметим, что из равенства $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, выражающего свойство геометрической прогрессии, следует, что $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Таким образом, *модуль любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов*.

Упражнения

589. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 6$, $q = 2$; в) $b_1 = -24$, $q = -1{,}5$;

б) $b_1 = -16$, $q = \frac{1}{2}$; г) $b_1 = 0{,}4$, $q = \sqrt{2}$.

590. Последовательность (c_n) — геометрическая прогрессия, первый член которой равен c_1, а знаменатель равен q. Выразите через c_1 и q:

а) c_6; б) c_{20}; в) c_{125}; г) c_k; д) c_{k+3}; е) c_{2k}.

591. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) x_7, если $x_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$; г) x_6, если $x_1 = -125$, $q = 0{,}2$;

б) x_8, если $x_1 = -810$, $q = \frac{1}{3}$; д) x_5, если $x_1 = \frac{3}{4}$, $q = \frac{2}{3}$;

в) x_{10}, если $x_1 = \sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$; е) x_4, если $x_1 = 1{,}8$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

592. Изобразите на координатной плоскости первые пять членов:

а) арифметической прогрессии 1,5; 2,5; 3,5; ... ;

б) геометрической прогрессии 8; 4; 2; ... .

593. Найдите седьмой и n-й члены геометрической прогрессии:

а) $2; -6; \ldots;$ в) $-0{,}125; 0{,}25; \ldots;$

б) $-40; -20; \ldots;$ г) $-10; 10; \ldots.$

594. Найдите шестой и n-й члены геометрической прогрессии:

а) $48; 12; \ldots;$ в) $-0{,}001; -0{,}01; \ldots;$

б) $\frac{64}{9}; -\frac{32}{3}; \ldots;$ г) $-100; 10; \ldots.$

595. В треугольнике ABC (рис. 72) провели среднюю линию A_1C_1, в треугольнике A_1BC_1 также провели среднюю линию A_2C_2, во вновь образовавшемся треугольнике A_2BC_2 снова провели среднюю линию A_3C_3 и т. д. Найдите площадь треугольника A_9BC_9, если известно, что площадь треугольника ABC равна 768 см^2.

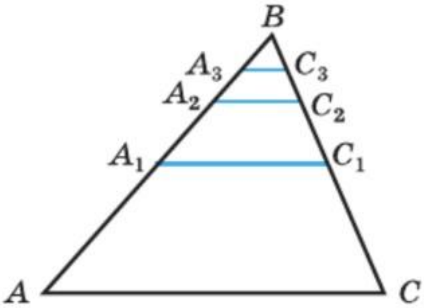


Рис. 72

596. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_6 = 3$, $q = 3$; б) $b_5 = 17\frac{1}{2}$, $q = -2\frac{1}{2}$.

597. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (c_n), если:

а) $c_5 = -6$, $c_7 = -54$; б) $c_6 = 25$, $c_8 = 4$.

598. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) x_1, если $x_6 = 0{,}32$, $q = 0{,}2$; б) q, если $x_3 = -162$, $x_5 = -18$.

599. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) b_6, если $b_1 = 125$, $b_3 = 5$;

б) b_7, если $b_1 = -\frac{2}{9}$, $b_3 = -2$;

в) b_1, если $b_4 = -1$, $b_6 = -100$.

600. Между числами 2 и 162 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.

601. Геометрическая прогрессия (x_n) состоит из четырёх членов: 2, a, b, $\frac{1}{4}$. Найдите a и b.

602. Найдите шестой член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_2 = 6$, $b_4 = 24$.

603. Население города составляет 60 тысяч человек. За последние годы наблюдается ежегодный прирост населения на 2%. Каким будет население города через 5 лет, если эта тенденция сохранится?

604. (*Для работы в парах.*) Ежегодный доход по вкладу «Юбилейный» составляет 6%. Первоначальный вклад был равен 80 000 р. Какая сумма будет на счету у вкладчика:

а) через 4 года; б) через 6 лет?

1) Обсудите, с какой последовательностью мы имеем дело в этой задаче.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните расчёты, используя калькулятор.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

605. Екатерина Михайловна открыла два вклада в разных банках. В первый банк она положила 100 000 р. под 6% годовых на 3 года, а во второй банк — 80 000 р. под 10% годовых на 2 года. В каком банке её доход по вкладу в итоге окажется больше и на сколько?

606. На опытном участке леса ежегодный прирост древесины составляет 10%. Какое количество древесины будет на этом участке через 6 лет, если первоначальное количество древесины равно $2{,}0 \cdot 10^4$ м^3?

607. После каждого движения поршня разрежающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нём воздуха. Определите давление воздуха внутри сосуда после шести движений поршня, если первоначально давление было равно 760 мм рт. ст.

608. Дан равносторонний треугольник со стороной 8 см. Из его высот построен второй треугольник. Из высот второго треугольника построен третий и т. д. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию, и найдите периметр шестого треугольника.

609. В равносторонний треугольник, сторона которого равна 16 см, вписан другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон первого. Во второй треугольник таким же способом вписан третий и т. д. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию. Найдите периметр восьмого треугольника.

610. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Найдите эти числа, если известно, что, уменьшив второе из них на 1 и увеличив третье на 1, мы получим геометрическую прогрессию.

611. Сумма трёх положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15. Найдите эти числа, если известно, что, увеличив первое и второе числа на 1, а третье на 4, мы получим геометрическую прогрессию.

612. (*Задача-исследование.*) Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника составлять геометрическую прогрессию?

1) Сделайте чертёж и введите необходимые обозначения.
2) Какую теорему из курса геометрии можно использовать при ответе на вопрос задачи?
3) Составьте уравнение и решите его.
4) Сформулируйте вывод и выполните проверку.

П

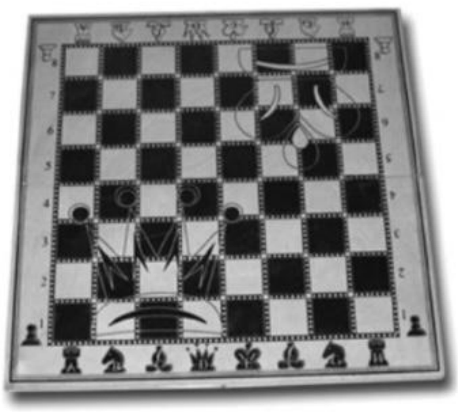
613. Найдите координаты точки, принадлежащей графику уравнения $x^2 - y^2 = 30$, если известно, что их сумма равна 5.

614. Решите неравенство:

а) $2x^2 - 13x - 34 \geqslant 0$; б) $10x - 4x^2 < 0$; в) $\dfrac{x-4}{2x+5} \leqslant 0$.

30. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии

Согласно легенде, индийский принц решил наградить изобретателя шахмат и предложил ему самому выбрать награду. Изобретатель шахмат попросил в награду за своё изобретение столько пшеничных зёрен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую — в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью — ещё в 2 раза больше, т. е. 4 зерна, и так далее до 64-й клетки. Каково же было удивление принца, когда он узнал, что такую, казалось бы, скромную просьбу невозможно выполнить.



Действительно, число зёрен, о которых идёт речь, является суммой шестидесяти четырёх членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 2. Обозначим эту сумму через S:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии, получим

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63} + 2^{64}.$$

Вычтем почленно из второго равенства первое и проведём упрощения:

$$2S - S = (2 + 2^2 + \dots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}),$$

$$S = 2^{64} - 1.$$

Можно подсчитать, что масса такого числа пшеничных зёрен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Выведем теперь формулу суммы первых n членов произвольной геометрической прогрессии. Воспользуемся тем же приёмом, с помощью которого была вычислена сумма S.

Пусть дана геометрическая прогрессия (b_n). Обозначим сумму первых n её членов через S_n:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n. \quad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \dots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Учитывая, что $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, $b_3 q = b_4$, ... , $b_{n-1} q = b_n$, получим

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_n q. \quad (2)$$

Вычтем почленно из равенства (2) равенство (1) и приведём подобные члены:

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n) = b_n q - b_1,$$

$$S_n (q - 1) = b_n q - b_1.$$

Отсюда следует, что при $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}.} \quad \text{(I)}$$

Мы получили *формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии*, в которой $q \neq 1$. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$.

При решении многих задач удобно пользоваться формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии, записанной в другом виде. Подставим в формулу (I) вместо b_n выражение $b_1 q^{n-1}$. Получим

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ если } q \neq 1.} \quad \text{(II)}$$

Пример 1. Найдём сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3$ и $q = \frac{1}{2}$.

▶ Так как известны первый член и знаменатель прогрессии, то удобно воспользоваться формулой (II). Получим

$$S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 6 - \frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Найдём сумму

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-1},$$

где $x \neq 1$, слагаемые которой являются последовательными членами геометрической прогрессии 1; x; x^2; ... .

▶ Первый член прогрессии равен 1, а знаменатель равен x. Так как x^{n-1} является членом этой прогрессии с номером n, то задача состоит в нахождении суммы первых n её членов. Воспользуемся формулой (I):

$$S_n = \frac{x^{n-1}x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Таким образом, если $x \neq 1$, то

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \quad \triangleleft$$

Пример 3. Найдём сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_3 = 12$ и $b_5 = 48$.

▶ Зная b_3 и b_5, можно найти знаменатель прогрессии q. Так как $b_5 = b_3q^2$, то

$$q^2 = \frac{b_5}{b_3} = \frac{48}{12} = 4.$$

Значит,

$$q = 2 \text{ или } q = -2.$$

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = -2$, то

$$b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 3 \text{ и } S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -63.$$

Если $q = 2$, то

$$b_1 = 3 \text{ и } S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189. \quad \triangleleft$$

Упражнения

615. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_1 = 500$, $q = \frac{1}{5}$.

616. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии:

а) $3; -6; \dots;$ б) $54; 36; \dots;$ в) $-32; -16; \dots;$ г) $1; -\frac{1}{2}; \dots.$

617. Вычислите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии, если:

а) $c_1 = -4$, $q = 3$; в) $c_1 = -2$, $q = 2$;
б) $c_1 = 1$, $q = -2$; г) $c_1 = 32$, $q = -0{,}5$.

618. (*Для работы в парах.*) Докажите, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, и найдите сумму первых n её членов, если:

а) $b_n = 0{,}2 \cdot 5^n$; б) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; в) $b_n = 3^{1+n}$; г) $b_n = 2^{n+2}$.

1) Обсудите ход доказательства.
2) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

619. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии:

а) $1; 3; 3^2; \dots;$ г) $1; -x; x^2; \dots$, где $x \neq -1$;
б) $2; 2^2; 2^3; \dots;$ д) $1; x^2; x^4; \dots$, где $x \neq \pm 1$;
в) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots;$ е) $1; -x^3; x^6; \dots$, где $x \neq -1$.

620. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_7 = 72{,}9$, $q = 1{,}5$; в) $b_3 = 64$, $q = \frac{1}{2}$;
б) $b_5 = \frac{16}{9}$, $q = \frac{2}{3}$; г) $b_4 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$.

621. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (x_n), если:

а) $x_5 = 1\frac{1}{9}$, $q = \frac{1}{3}$; б) $x_4 = 121{,}5$, $q = -3$.

622. Первый член геометрической прогрессии равен 2, а пятый равен 162. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии, если известно, что её члены с чётными номерами отрицательны, а с нечётной — положительны.

623. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_2 = 6$ и $b_4 = 54$, если известно, что все её члены положительны.

624. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, сумма первых двух членов равна 8, а сумма третьего и четвёртого членов равна 72. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить в сумме 242?

625. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 = 0{,}012$ и $q = 0{,}2$. Запишите формулу n-го члена этой прогрессии.

П

626. Сократите дробь: а) $\dfrac{2^{n+2} - 2^{n-2}}{2^n}$; б) $\dfrac{25^n - 5^{2n-1}}{5^{2n}}$.

627. Решите неравенство: а) $1{,}5x - x^2 \leqslant 0$; б) $x^2 + x + 6 > 0$.

628. Какую фигуру задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} 3x - y \geqslant 0, \\ y - 5 \geqslant 0? \end{cases}$$

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте определение геометрической прогрессии. Что называют знаменателем геометрической прогрессии?

2 Как выражается квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, через предыдущий и последующий члены?

3 Запишите формулы n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Для тех, кто хочет знать больше

31. Метод математической индукции

Пусть дана последовательность (a_n), в которой

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3.$$

Попытаемся задать её формулой n-го члена.

Вычислим первые несколько членов последовательности:

$$a_1 = 4,\ a_2 = 4 + 2 \cdot 1 + 3 = 9,$$
$$a_3 = 9 + 2 \cdot 2 + 3 = 16.$$

Значит, последовательность (a_n) начинается так:

$$4,\ 9,\ 16,\ \dots .$$

Естественно предположить, что эту последовательность можно задать формулой

$$a_n = (n + 1)^2.$$

Формула верна для $n = 1,\ 2,\ 3$. Однако, как долго бы мы ни продолжали вычисления, они не дают оснований утверждать, что эта формула верна при любом натуральном n. Поэтому воспользуемся специальным методом рассуждений.

Предположим, что формула верна при $n = k$, т. е.

$$a_k = (k + 1)^2,$$

и докажем, что она также верна при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$a_{k+1} = (k + 2)^2.$$

По условию

$$a_{k+1} = a_k + 2k + 3.$$

Заменив a_k на $(k + 1)^2$, получим

$$a_{k+1} = (k + 1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = \\ = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2.$$

Значит,

$$a_{k+1} = (k + 2)^2,$$

т. е. если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$.

Мы убедились, что формула верна для $n = 1$. Следовательно, она верна и для $n = 1 + 1$, т. е. для $n = 2$. Из того, что формула верна для $n = 2$, следует, что она верна и для $n = 2 + 1$, т. е. для $n = 3$. (Заметим, что в справедливости формулы для $n = 2$ и $n = 3$ нас убедили и непосредственные расчёты.) Из справедливости формулы для $n = 3$ вытекает её справедливость для $n = 3 + 1$, т. е. для $n = 4$. Из того, что формула верна для $n = 4$, следует, что она верна для $n = 5$ и т. д.

Ясно, что, строя такую цепочку рассуждений, мы дойдём до любого натурального числа. Значит, формула

$$a_n = (n + 1)^2$$

верна при любом натуральном n, т. е. последовательность (a_n) можно задать этой формулой.

Применённый метод доказательства называется *методом математической индукции*. Он основан на следующем положении, известном под названием *принцип математической индукции*:

утверждение о том, что некоторый факт имеет место при любом натуральном n, верно, если выполняются два условия:
а) утверждение верно при $n = 1$;
б) из справедливости утверждения для $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

Доказательство некоторого утверждения методом математической индукции состоит из двух частей. Сначала проверяют его справедливость при $n = 1$. Затем, предположив, что утверждение верно при $n = k$, доказывают, что оно верно и при $n = k + 1$.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции.

Пример 1. При решении некоторых задач из геометрии и механики Архимед (287—212 до н. э.) вывел формулу

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Докажем её справедливость.

▶ При $n = 1$ формула верна:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Допустим, что эта формула верна для $n = k$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что отсюда следует её справедливость для $n = k + 1$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Имеем

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}.$$

Разложив на множители квадратный трёхчлен

$$2k^2 + 7k + 6,$$

получим

$$2k^2 + 7k + 6 = (k + 2)(2k + 3).$$

Значит,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Таким образом, справедливость формулы Архимеда доказана. ◁

Пример 2. Докажем, что при любом натуральном n сумма $13^n + 5$ кратна 6.

▶ При $n = 1$ утверждение верно, так как $13^1 + 5 = 18$, а число 18 кратно 6.

Допустим, что утверждение верно при $n = k$, т. е. сумма $13^k + 5$ кратна 6, и докажем, что из этого следует его справедливость для $n = k + 1$, т. е. сумма $13^{k+1} + 5$ также кратна 6.

Имеем

$$13^{k+1} + 5 = 13^k \cdot 13 + 5 = 13^k(12 + 1) + 5 =$$
$$= 13^k \cdot 12 + (13^k + 5).$$

В полученной сумме каждое слагаемое кратно 6. Значит, сумма $13^{k+1} + 5$ при любом натуральном k кратна 6.

В силу принципа математической индукции утверждение доказано. ◁

Упражнения

629. Проверьте, что при $n = 1, 2, 3$ верна формула

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Докажите, что эта формула верна при любом натуральном n.

630. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2).$$

631. Докажите, что при любом натуральном n сумма

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

может быть вычислена по формуле $S_n = \frac{n}{n+1}$.

632. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

633. Пусть (b_n) — последовательность, в которой

$$b_1 = -3,\ b_{k+1} = b_k + 6k + 3.$$

Докажите, что эту последовательность можно задать формулой $b_n = 3n^2 - 6$.

634. Докажите, что последовательность (a_n), в которой $a_1 = -5$, $a_{k+1} = a_k + 10k + 5$, можно задать формулой $a_n = 5n^2 - 10$.

635. Докажите, что разность $49^n - 1$ кратна 48 при любом натуральном n.

636. Пусть (u_n) — последовательность чисел Фибоначчи, т. е. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ при $n > 2$. Докажите, что эта последовательность обладает следующим свойством:

а) $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$;

б) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$.

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 9

637. Вычислите первые пять членов последовательности (c_n), заданной формулой:

а) $c_n = -2n^2 + 7$; г) $c_n = 3{,}2 \cdot 2^{-n}$;

б) $c_n = \dfrac{100}{n^2 - 5}$; д) $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{4n}$;

в) $c_n = -2{,}5 \cdot 2^n$; е) $c_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{2n + 1}$.

638. Задайте формулой n-го члена последовательность (a_n), если:

а) (a_n) — последовательность натуральных чисел, кратных 5;
б) (a_n) — последовательность натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

639. Вычислите первые несколько членов последовательности (y_n), если:

а) $y_1 = -3,\ y_{n+1} - y_n = 10$; в) $y_1 = 1{,}5,\ y_{n+1} - y_n = n$;
б) $y_1 = 10,\ y_{n+1} \cdot y_n = 2{,}5$; г) $y_1 = -4,\ y_{n+1} : y_n = -n^2$.

640. Найдите члены арифметической прогрессии (a_n), обозначенные буквами:

а) a_1; a_2; -19; $-11{,}5$; a_5; ... ;

б) a_1; $-8{,}5$; a_3; $-4{,}5$; a_5; a_6; ... .

641. Периметр треугольника равен 24 см, причём длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Можно ли определить длину хотя бы одной из сторон? Какие целые значения могут принимать длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах?

642. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из них равен $60°$.

643. Верно ли утверждение, что если (a_n) — арифметическая прогрессия, то:

а) последовательность a_2; a_4; ... ; a_{2n}; ... является арифметической прогрессией;
б) последовательность $a_1 - 1$; $a_2 - 1$; ... ; $a_n - 1$; ... является арифметической прогрессией;
в) последовательность $2a_1$; $2a_2$; ... ; $2a_n$; ... является арифметической прогрессией;
г) последовательность a_1^2; a_2^2; ... ; a_n^2; ... является арифметической прогрессией?

644. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) a_{12}, если $a_1 = 9\sqrt{3} - 2$ и $d = 2 - \sqrt{3}$;
б) a_8, если $a_1 = \dfrac{5\sqrt{3} - 7}{3}$ и $d = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{3}$.

645. Найдите номер члена арифметической прогрессии (a_n):

а) равного $-2{,}94$, если $a_1 = 1{,}26$ и $d = -0{,}3$;
б) равного $-9{,}7$, если $a_5 = -3{,}7$ и $d = -0{,}6$.

646. Дана арифметическая прогрессия, первый член которой равен $2\frac{3}{4}$, а разность равна $\frac{2}{5}$. Является ли членом этой прогрессии число:

а) $14\frac{3}{4}$; б) $8{,}35$?

647. Найдите:

а) первый положительный член арифметической прогрессии

$$-10\frac{1}{2};\ -10\frac{1}{4};\ -10;\ \dots;$$

б) первый отрицательный член арифметической прогрессии

$$8\frac{1}{2};\ 8\frac{1}{3};\ 8\frac{1}{6};\ \dots.$$

648. Докажите, что если (y_n) — арифметическая прогрессия, то:

а) $y_2 + y_7 = y_4 + y_5$;
б) $y_{n-5} + y_{n+10} = y_n + y_{n+5}$, где $n > 5$.

649. Докажите, что если d — разность арифметической прогрессии, а x_m и x_n — члены этой прогрессии, причём $m \neq n$, то $d = \dfrac{x_m - x_n}{m - n}$.

650. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Найдите:

а) d, если $a_{20} = 1{,}7$ и $a_{37} = 0$;

б) a_{100}, если $a_{10} = 270$ и $d = -3$.

651. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии:

а) $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{3}{4}$; ... ; б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{12}$; ... .

652. Найдите сумму, слагаемыми которой являются последовательные члены арифметической прогрессии:

а) $2 + 6 + 10 + ... + 198$;

б) $95 + 85 + 75 + ... + (-155)$.

653. На одной стороне угла от вершины отложены двенадцать равных отрезков, и через их концы (кроме вершины угла) проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла. Найдите сумму длин всех параллельных отрезков, заключённых между сторонами угла, если длина наименьшего из них равна 3 см.

654. В арифметической прогрессии (a_n):

а) $d = -0{,}4$, $n = 12$, $a_n = 2{,}4$; найдите a_1 и S_n;

б) $a_1 = -35$, $d = 5$, $S_n = 250$; найдите n и a_n;

в) $d = \dfrac{1}{2}$, $a_n = 50$, $S_n = 2525$; найдите a_1 и n;

г) $a_1 = -\dfrac{1}{2}$, $a_n = -29\dfrac{1}{2}$, $S_n = -450$; найдите d и n.

655. Найдите разность арифметической прогрессии (x_n) и её первый член, если десятый член этой прогрессии равен 1 и сумма первых шестнадцати её членов равна 4.

656. Найдите сумму:

а) всех двузначных чисел;

б) всех трёхзначных чисел.

657. Найдите сумму:

а) всех натуральных чётных чисел, не превосходящих 200;

б) всех натуральных нечётных чисел, не превосходящих 150;

в) всех натуральных чисел, кратных 3, заключённых в промежутке от 100 до 200.

658. Какова сумма натуральных чисел:

а) меньших 100 и не кратных 3;

б) больших 50, но меньших 150 и не кратных 5?

659. Найдите натуральное число, которое:

а) в 5 раз меньше суммы предшествующих ему натуральных чисел;

б) равно сумме предшествующих ему натуральных чисел.

660. Члены арифметической прогрессии

$$2;\ 5;\ 8;\ \ldots$$

с чётными номерами заменили противоположными им числами. В результате получили последовательность (x_n). Напишите формулу n-го члена этой последовательности и найдите сумму первых пятидесяти её членов.

661. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{2n-1}}$;

б) $\dfrac{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}$.

662. Найдите:

а) сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 8,2; 7,4; ... ;

б) сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии –6,5; –6; ... .

663. Найдите сумму первых сорока членов арифметической прогрессии, если сумма первых десяти её членов равна 100 и сумма первых тридцати её членов равна 900.

664. Найдите пятидесятый член арифметической прогрессии, если:

а) $S_{20} = 1000,\ S_{40} = 10\,000$;

б) $S_5 = 0{,}5,\ S_{15} = -81$.

665. Запишите формулу суммы первых n членов последовательности (a_n), если:

а) $a_n = 2n + 1$; б) $a_n = 3 - n$.

666. Является ли последовательность (x_n) арифметической прогрессией, если сумму первых n её членов можно найти по формуле $S_n = n^2 - 8n$? Найдите пятый член этой последовательности.

667. Является ли последовательность (x_n) арифметической прогрессией, если сумма первых n её членов может быть найдена по формуле:

а) $S_n = -n^2 + 3n$; в) $S_n = n^2 + 2n - 8$;

б) $S_n = 2n^2 - 1$; г) $S_n = 6n + 5$?

К параграфу 10

668. Найдите обозначенные буквами члены геометрической прогрессии (b_n):

а) b_1; b_2; 225; −135; 81; b_6; ... ;

б) b_1; b_2; b_3; 36; 54; ... .

669. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) $x_1 + 1$; $x_2 + 1$; ... ; $x_n + 1$; ... ;

б) $3x_1$; $3x_2$; ... ; $3x_n$; ...;

в) x_1^2; x_2^2; ... ; x_n^2; ... ;

г) $\frac{1}{x_1}$; $\frac{1}{x_2}$; ... ; $\frac{1}{x_n}$; ... ?

670. Существуют ли три числа, которые составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии?

671. Является ли геометрической прогрессией последовательность (x_n), если:

а) $x_n = 2^n$;

б) $x_n = 3^{-n}$;

в) $x_n = n^2$;

г) $x_n = ab^n$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$?

672. Известны первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n). Найдите b_n, если:

а) $b_1 = \frac{243}{256}$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 8$;

б) $b_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $q = -\sqrt{6}$, $n = 5$.

673. Первый и девятый члены геометрической прогрессии равны соответственно 135 и $\frac{5}{3}$. Найдите заключённые между ними члены этой прогрессии.

674. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Докажите, что:

а) если $b_1 > 0$ и $q > 1$, то каждый следующий член прогрессии больше предыдущего;
б) если $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$, то каждый следующий член прогрессии меньше предыдущего;
в) если $b_1 < 0$ и $q > 1$, то каждый следующий член прогрессии меньше предыдущего;
г) если $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$, то каждый следующий член прогрессии больше предыдущего.

Для каждого из рассмотренных случаев приведите пример.

675. Докажите, что если (a_n) — геометрическая прогрессия, то:

а) $a_2 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5$;

б) $a_{n-3} \cdot a_{n+8} = a_n \cdot a_{n+5}$, где $n > 3$.

676. Докажите, что если b_n и b_m — члены геометрической прогрессии, знаменатель которой равен q, то $b_n = b_m q^{n-m}$.

677. В геометрической прогрессии (x_n):

а) $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$, $S_n = 20\frac{1}{3}$; найдите x_1 и x_n;

б) $x_1 = 11$, $x_n = 88$, $S_n = 165$; найдите q и n;

в) $x_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{21}{64}$; найдите n и x_n;

г) $q = \sqrt{3}$, $x_n = 18\sqrt{3}$, $S_n = 26\sqrt{3} + 24$; найдите x_1 и n.

678. Сумму первых n членов последовательности (x_n) можно найти по формуле

$$S_n = \frac{3}{4}(5^n - 1).$$

Докажите, что последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите знаменатель и первый член этой прогрессии.

679. Геометрическая прогрессия состоит из пятнадцати членов. Сумма первых пяти членов равна $\frac{11}{64}$, а сумма следующих пяти членов равна $-5\frac{1}{2}$. Найдите сумму последних пяти членов этой прогрессии.

680. Упростите выражение, применив формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, где $x \neq 1$ и $x \neq 0$;

б) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$, где $x \neq -1$ и $x \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА 7–9 КЛАССОВ

Вычисления

681. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2-3x^2}{x^3}$ при $x=-\dfrac{1}{2}$;

б) $\dfrac{1-m^2}{3m^2-m}$ при $m=\dfrac{2}{3}$;

в) $\dfrac{10x^2-5y^2}{x+y}$ при $x=1{,}4,\ y=-1{,}6$;

г) $\dfrac{abc}{a(b-c)}$ при $a=1{,}5,\ b=10,\ c=-2$.

682. а) Телевизор стоил 10000 р. В апреле он подорожал на 30%, а в декабре подешевел на 40%. Сколько стал стоить телевизор в декабре?
б) Цену товара повысили на 30%, а через некоторое время снизили на 40%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?

683. К 200 г 40%-го раствора соли долили 300 г воды. Какой стала концентрация раствора соли?

684. а) Некоторое количество 15%-го раствора соли смешали с таким же количеством 45%-го раствора этой же соли. Какова концентрация получившегося раствора?
б) Некоторое количество 30%-го раствора соли смешали с вдвое большим количеством 15%-го раствора этой же соли. Какова концентрация получившегося раствора?

685. Имеется два сорта сливок — жирностью 10% и 20%. Их смешали в отношении 3 : 1. Какова жирность получившихся сливок?

686. а) Клиент банка внёс 80 000 р. на вклад с годовым доходом 5%. Какая сумма окажется у него на счету через 2 года, если он никаких сумм со счёта не снимал и дополнительных вложений не делал?

б) Клиент банка внёс 80 000 р. на вклад с годовым доходом 5%. Через год он положил на этот же вклад ещё 20 000 р. Какая сумма будет у него на счету через 2 года после открытия счёта в банке?

687. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{15}+\sqrt{10})\cdot 2\sqrt{5}-5\sqrt{12}$;

б) $\dfrac{2\sqrt{70}-2\sqrt{28}}{3\sqrt{35}-3\sqrt{14}}$;

в) $(2\sqrt{12}-3\sqrt{3})^2$;

г) $\dfrac{10-5\sqrt{3}}{10+5\sqrt{3}}+\dfrac{10+5\sqrt{3}}{10-5\sqrt{3}}$.

688. Упростите выражение $(5-2\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{2}+8\sqrt{3})$.

689. Докажите, что:

а) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{18}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{18}+3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{1,5}$;

б) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}}=\sqrt{0,4}$.

690. Докажите равенство:

а) $\sqrt{19-6\sqrt{10}}=\sqrt{10}-3$;

б) $\sqrt{23-8\sqrt{7}}=4-\sqrt{7}$.

691. Найдите значение выражения:

а) $3x^2-6x-5$ при $x=1+\sqrt{2}$;

б) $\dfrac{x^2-x-5}{x-1}$ при $x=\sqrt{5}+1$.

692. Найдите значение выражения:

а) $0,3^{-3}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\dfrac{3}{4}+(-1)^{-8}\cdot 6$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1}+\left(\dfrac{6}{17}\right)^{0}\cdot\dfrac{1}{8}-0,25^{-2}\cdot 16$.

693. Верно ли высказывание:

а) простое число не может быть чётным;
б) простое число не имеет делителей;
в) квадрат чётного числа — число чётное?

694. а) Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_2=-6$, $a_3=-2$.

б) Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_2=-2,4$ и $d=1,2$.

695. Найдите двенадцатый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -\frac{1}{32}$, $b_3 = \frac{1}{16}$.

696. Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (x_n), если $x_2 = -32$ и $q = -\frac{1}{2}$.

697. Каждую из десятичных дробей

$$0{,}45;\ 2{,}53;\ 31{,}98$$

округлите до десятых, вычислите абсолютную и относительную погрешности приближённых значений.

698. Площадь Белого моря приближённо равна 91 тыс. км^2 (с точностью до 500 км^2). Оцените относительную погрешность приближённого значения.

Тождественные преобразования

699. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x - 2y)(x + 2y) + 4y^2$;

б) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 3a^2$;

в) $(5x - 1)^2 + 10x$;

г) $(3y + 4z)^2 - 8z(3y - 2z)$;

д) $(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2) + 6n^3$;

е) $(c^2 + 4d)(c^4 - 4c^2d + 16d^2) - c^2(c^4 - 1)$;

ж) $(3x - 4y)^2 - (2x - 7y)(4x + 2y)$;

з) $2x(2x + 3)^2 - (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.

700. Найдите значение выражения:

а) $8x^2(x - 4) - (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - 17$ при $x = 0{,}5$;

б) $4a^2(3a - 2) - 3a(2a - 1)^2 - (2a - 5)(2a + 5)$ при $a = 3{,}3$;

в) $(9x^2 - 3xb + b^2)(3x + b) - 9x(3x^2 - b) - b^3$ при $x = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$;

г) $x(3x - 2y)(3x + 2y) - x(3x + 2y)^2 + 2xy(5x + 2y)$ при $x = 0{,}5$, $y = -1$.

701. Докажите тождество:

а) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2) = a^4 - 16b^4$;

б) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1$;

в) $(a - 2)(a + 2)(a^2 - 2a + 4)(a^2 + 2a + 4) = a^6 - 64$;

г) $(c^2 - c - 2)(c^2 + c - 2) = c^4 - 5c^2 + 4$.

702. Разложите на множители:

а) $12x^3 - 3x^2y - 18xy^2$;

б) $42a^5 - 6a^4 + 30a^3$;

в) $8ab - 14a - 12b + 21$;

г) $x^2 - 5x - 9xy + 45y$.

703. Разложите на множители:

а) $x^4 - 25y^2$; в) $8a^3 + c^3$; д) $9ab^2 - 16ac^2$;

б) $4b^2 - 0{,}01c^6$; г) $x^9 - 27$; е) $-20xy^3 + 45x^3y$.

704. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - x - 42$; г) $16b^2 - 24b + 9$;

б) $y^2 + 9y + 18$; д) $6x^2 - x - 1$;

в) $81x^2 + 18x + 1$; е) $3a^2 - 13a - 10$.

705. Сократите дробь:

а) $\dfrac{21a^3 - 6a^2b}{12ab - 42a^2}$; е) $\dfrac{9x^2 - 25y^2}{9x^2 + 30xy + 25y^2}$;

б) $\dfrac{6m^3 + 3mn^2}{2m^3n + mn^3}$; ж) $\dfrac{a^2 - 3a}{a^2 + 3a - 18}$;

в) $\dfrac{x^2 - 2mx + 3x - 6m}{x^2 + 2mx + 3x + 6m}$; з) $\dfrac{4x^2 - 8x + 3}{4x^2 - 1}$;

г) $\dfrac{8ab + 2a - 20b - 5}{4ab - 8b^2 + a - 2b}$; и) $\dfrac{m^2 + 4m - 5}{m^2 + 7m + 10}$.

д) $\dfrac{16a^2 - 8ab + b^2}{16a^2 - b^2}$;

706. а) Найдите значение выражения $\dfrac{3x + 2y}{x}$, если известно, что $\dfrac{2x + 3y}{y} = 7$.

б) Найдите значение выражения $\dfrac{b}{a + b}$, если известно, что $\dfrac{4a - 5b}{b} = 3$.

707. Упростите:

а) $\dfrac{2}{x^2 - 3x} - \dfrac{1}{x^2 + 3x} - \dfrac{x + 1}{x^2 - 9}$;

б) $\dfrac{2y + 1}{y^2 + 3y} + \dfrac{y + 2}{3y - y^2} - \dfrac{1}{y}$;

в) $\dfrac{a^2 + 16a + 12}{a^3 - 8} - \dfrac{2 - 3a}{a^2 + 2a + 4} - \dfrac{3}{a - 2}$;

г) $\dfrac{2}{4b^2 - 6b + 9} + \dfrac{4b^2 + 18}{8b^3 + 27} - \dfrac{1}{2b + 3}$.

708. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{ab^2 - 16a}{5b^3} \cdot \frac{20b^5}{a^2b + 4a^2}$;

б) $\frac{7xy}{x^2 - 4xy + 4y^2} \cdot \frac{3x - 6y}{14y^2}$;

в) $\frac{p^3 - 125}{8p^2} \cdot \frac{4p}{p^2 + 5p + 25}$;

г) $\frac{9m^2 - 12mn + 4n^2}{3m^3 + 24n^3} \cdot \frac{3m + 6n}{2n - 3m}$.

709. Упростите:

а) $\frac{x^2 - 4x}{x^2 + 7x} : \frac{24 - 6x}{49 - x^2}$;

б) $\frac{y^3 - 16y}{2y + 18} : \frac{4 - y}{y^2 + 9y}$;

в) $\frac{(a + b)^2 - 2ab}{4a^2} : \frac{a^2 + b^2}{ab}$;

г) $\frac{5c^3 - 5}{c + 2} : \frac{(c + 1)^2 - c}{13c + 26}$.

710. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{7(m - 2)}{m^3 - 8} - \frac{m + 2}{m^2 + 2m + 4}\right) \cdot \frac{2m^2 + 4m + 8}{m - 3}$;

б) $\frac{a + 5}{a^2 - 9} : \left(\frac{a + 2}{a^2 - 3a + 9} - \frac{2(a + 8)}{a^3 + 27}\right)$;

в) $\left(\frac{x + 2}{3x} - \frac{2}{x - 2} - \frac{x - 14}{3x^2 - 6x}\right) : \frac{x + 2}{6x} \cdot \frac{1}{x - 5}$;

г) $\left(\frac{4x}{9 - x^2} - \frac{x - 3}{9 + 3x}\right) \cdot \frac{18}{x + 3} - \frac{2x}{3 - x}$.

711. Преобразуйте выражение:

а) $\frac{1}{2} + \left(\frac{3m}{1 - 3m} + \frac{2m}{3m + 1}\right) \cdot \frac{9m^2 - 6m + 1}{6m^2 + 10m}$;

б) $\left(\frac{1}{x + y} - \frac{y^2}{xy^2 - x^3}\right) : \left(\frac{x - y}{x^2 + xy} - \frac{x}{y^2 + xy}\right) - \frac{x}{x + y}$;

в) $\frac{2a + 3}{2a - 3} \cdot \left(\frac{2a^2 + 3a}{4a^2 + 12a + 9} - \frac{3a + 2}{2a + 3}\right) + \frac{4a - 1}{2a - 3} - \frac{a - 1}{a}$;

г) $\left(\frac{a + 3}{a^2 + 2a + 1} + \frac{a - 1}{a^2 - 2a - 3}\right) \cdot \frac{a^2 - 2a - 3}{a + 2} - 1$;

д) $\frac{3(m + 3)}{m^2 + 3m + 9} + \frac{m^3 - 3m^2}{(m + 3)^2} \cdot \left(\frac{3m}{m^3 - 27} + \frac{1}{m - 3}\right)$;

е) $\left(\frac{9x^2 + 8}{27x^3 - 1} - \frac{1}{3x - 1} + \frac{4}{9x^2 + 3x + 1}\right) \cdot \frac{3x - 1}{3x + 1}$.

712. а) Найдите значение выражения $a^2 + b^2$, если $a + b = 6$, $ab = 3$.

б) Найдите значение выражения $c^2 + \frac{1}{c^2}$, если $c + \frac{1}{c} = 2{,}5$.

713. Докажите, что:

а) значение выражения $a^2 + 2a + 2$ ни при каком значении переменной a не может быть отрицательным;

б) выражение $2x^2 - 2xy + y^2$ при любых значениях x и y принимает неотрицательные значения.

714. Упростите выражение:

а) $(4x^{-2}y^3)^2 \cdot (0{,}5x^2y^{-1})^3$;

б) $\left(\frac{c^4}{6x^2y^{-5}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}c^2x^3y^{-2}\right)^4$;

в) $(0{,}25a^{-3}b^4)^{-2} \cdot (2a^5b^{-6})^{-1}$;

г) $\left(\frac{0{,}1a^{-2}}{b^{-1}c^3}\right)^5 \cdot \left(\frac{b^5}{10a^4c^6}\right)^{-3}$.

715. Упростите выражение:

а) $\frac{2 \cdot 3^{n+2} - 5 \cdot 3^{n+1}}{3^{n-1}}$;

б) $\frac{25 \cdot 4^n}{4^n - 4^{n-1}}$;

в) $\frac{10 \cdot 6^n}{2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}$;

г) $\frac{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+1}}{100^n}$.

716. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{98}$; б) $\sqrt{24}$; в) $-\sqrt{242}$; г) $-\sqrt{75}$; д) $0{,}1\sqrt{128}$; е) $0{,}4\sqrt{40}$; ж) $\sqrt{12x^2}$, где $x \geqslant 0$; з) $\sqrt{18y^2}$, где $y < 0$; и) $\sqrt{5a^4}$.

717. Внесите множитель под знак корня:

а) $10\sqrt{3}$; б) $0{,}1\sqrt{2}$; в) $-3\sqrt{5}$; г) $-0{,}2\sqrt{40}$; д) $x\sqrt{3}$, где $x \geqslant 0$; е) $y\sqrt{5}$, где $y < 0$.

718. Упростите выражение:

а) $\sqrt{50x} + \sqrt{32x} - \sqrt{98x}$;

б) $(\sqrt{a} + \sqrt{2})(\sqrt{a} - \sqrt{2}) - (\sqrt{a} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{a}$;

в) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

г) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)$.

719. Сократите дробь:

а) $\frac{5 + \sqrt{y}}{5\sqrt{y} + y}$;

б) $\frac{3x - 6}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$;

в) $\frac{a\sqrt{a} - 1}{a + \sqrt{a} + 1}$;

г) $\frac{b - \sqrt{b} + 1}{b\sqrt{b} + 1}$;

д) $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{xy} + y}$;

е) $\frac{c - \sqrt{cd}}{c\sqrt{c} - d\sqrt{d}}$.

720. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{3x}{7\sqrt{x}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{ab}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{c}-1}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$.

721. Докажите, что:

а) $\frac{x-y}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{y}}{y} + \frac{\sqrt{x}}{x}$; б) $\frac{a-b}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}}{b} - \frac{\sqrt{a}}{a}$.

Уравнения и системы уравнений

722. Решите уравнение:

а) $3x(x-1) - 17 = x(1+3x) + 1$;

б) $2x - (x+2)(x-2) = 5 - (x-1)^2$;

в) $\frac{3x+1}{2} = \frac{2x-3}{5}$;

г) $\frac{x-3}{6} + x = \frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2}$.

723. От фермы до станции Пётр может доехать на велосипеде или дойти пешком. Идёт он со скоростью 6 км/ч, а на велосипеде едет со скоростью 16 км/ч. Каково расстояние от фермы до станции, если на велосипеде Пётр тратит на этот путь на 40 мин меньше, чем пешком?

724. Расстояние от города A до города B поезд должен проходить по расписанию за 4 ч 30 мин. По техническим причинам он был задержан с отправлением из города A на 30 мин. Увеличив скорость на 10 км/ч, поезд прибыл в город B вовремя. Найдите расстояние между городами A и B.

725. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, а через 30 мин навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Скорость велосипедиста на 8 км/ч больше скорости пешехода. Велосипедист через 1,5 ч после выезда встретил пешехода. С какой скоростью шёл пешеход и ехал велосипедист, если известно, что расстояние между пунктами A и B равно 26 км?

726. Среднее арифметическое четырёх чисел равно 11,5. Второе число в 1,5 раза меньше первого и на 10 меньше третьего, а четвёртое равно сумме первого и второго. Найдите эти числа.

727. Сколько нужно добавить воды к 300 г 20%-го раствора соли, чтобы получить 8%-й раствор этой соли?

728. Решите квадратное уравнение:

а) $2{,}5x^2 + 4x = 0$; в) $0{,}2t^2 - t - 4{,}8 = 0$;

б) $6y^2 - 0{,}24 = 0$; г) $3\frac{1}{3}u^2 + 3u - 3 = 0$.

729. Существует ли значение переменной x, при котором значение квадратного трёхчлена $x^2 - 10x + 31$ равно:

а) -5; б) 6; в) 55?

730. При каких значениях m уравнение имеет хотя бы один корень:

а) $10x^2 - 10x + m = 0$; в) $3x^2 + mx - 5 = 0$;

б) $mx^2 + 4x - 2 = 0$; г) $2x^2 - mx + 2 = 0$?

731. При каких значениях k уравнение не имеет корней:

а) $kx^2 + 8x - 15 = 0$; в) $5x^2 + kx + 1 = 0$;

б) $6x^2 - 3x + k = 0$; г) $7x^2 - kx - 1 = 0$?

732. Решите уравнение:

а) $0{,}3x(x + 13) - 2x(0{,}9 - 0{,}2x) = 0$;

б) $1{,}5x(x + 4) - x(7 - 0{,}5x) = 0{,}5(10 - 2x)$;

в) $\frac{(2x+1)^2}{25} - \frac{x-1}{3} = x$; д) $\frac{(2-x)^2}{3} - 2x = \frac{(7+2x)^2}{5}$;

г) $\frac{(3x+2)^2}{11} - \frac{x+5}{4} = x^2$; е) $\frac{(6-x)^2}{8} + x = 7 - \frac{(2x-1)^2}{3}$.

733. Садовый участок, имеющий форму прямоугольника, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что длина участка на 15 м больше его ширины, а площадь его равна 700 м^2.

734. Каждый ученик класса обменялся фотографиями с каждым из других учеников этого класса. Сколько учеников в этом классе, если всего было передано 600 фотографий?

735. Цифра десятков двузначного числа на 3 меньше цифры единиц, а произведение этого двузначного числа на сумму его цифр равно 70. Найдите это число.

736. Участок земли имеет форму прямоугольного треугольника, один из катетов которого на 20 м больше другого. Найдите длину границы данного участка, если его площадь равна 0,24 га.

737. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$;

б) $\frac{70}{x^2-16} - \frac{17}{x-4} = \frac{3x}{x+4}$;

в) $\frac{3}{(2-x)^2} - \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{14}{x^2-4}$;

г) $\frac{2}{4-x^2} - \frac{1}{2x-4} - \frac{7}{2x^2+4x} = 0$;

д) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$;

е) $\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}+\frac{4}{(x+1)^2}=0$;

ж) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$;

з) $\frac{5}{2x+6}-\frac{1}{6x^2-18x}=\frac{29}{27-3x^2}$;

и) $\frac{x}{x-5}-\frac{4}{x+5}+\frac{76}{25-x^2}=0$;

к) $\frac{7x}{x^2-36}+\frac{3}{6-x}=\frac{7}{x+6}$.

738. Две бригады, работая вместе, выполняют работу за 6 ч. Одной первой бригаде на ту же работу требуется на 5 ч больше, чем второй. За какое время может выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно?

739. Две автомашины отправились одновременно из села в город, который удалён на 180 км. Одна автомашина пришла в город на 45 мин позже другой, так как её скорость была на 20 км/ч меньше. С какой скоростью шла каждая автомашина?

740. Моторная лодка прошла по течению реки 36 км и возвратилась обратно, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения равна 3 км/ч.

741. Моторная лодка прошла 18 км по течению и 14 км против течения, затратив на весь путь 3 ч 15 мин. Найдите скорость течения, если собственная скорость лодки 10 км/ч.

742. Катер прошёл 75 км по течению реки и столько же против течения. На весь путь он затратил в 2 раза больше времени, чем ему понадобилось бы, чтобы пройти 80 км в стоячей воде. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения равна 5 км/ч?

743. Токарь должен был обработать 240 деталей к определённому сроку. Усовершенствовав резец, он стал обрабатывать в час на 2 детали больше, чем предполагалось по плану, и потому выполнил задание на 4 ч раньше срока. Сколько деталей в час должен был обрабатывать токарь?

744. Сотрудник типографии должен набрать к определённому сроку рукопись объёмом 150 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем обычно, то закончит работу на 1 день раньше намеченного срока. Сколько страниц в день обычно набирает сотрудник?

745. Турист отправился на автомашине из города A в город B. Первые 75 км он ехал со скоростью, на 10 км/ч меньшей, чем рассчитывал, а остальной путь со скоростью, на 10 км/ч большей, чем рассчитывал. В город B, который удалён от города A на 180 км, турист прибыл вовремя. С какой скоростью он ехал в конце пути?

746. Расстояние от станицы до железнодорожной станции равно 60 км. Мотоциклист выехал из станицы на $1\frac{1}{4}$ ч позже велосипедиста и прибыл на станцию, когда велосипедист был от неё в 21 км. Найдите скорость велосипедиста, если она была на 18 км/ч меньше скорости мотоциклиста.

747. Из села в город, к которому ведёт дорога длиной 120 км, выехала легковая автомашина. Через 30 мин из города в село выехал грузовик и встретился с легковой автомашиной в 45 км от города. Найдите скорость грузовика, если она меньше скорости легковой автомашины на 5 км/ч.

748. Решите уравнение:

а) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;
б) $9x^4 + 77x^2 - 36 = 0$;
в) $2x^4 - 9x^2 - 5 = 0$;
г) $6x^4 - 5x^2 - 1 = 0$.

749. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2(5x - 1)^2 + 35x - 11 = 0$;
б) $(x^2 + x - 3)^2 + 12x^2 + 12x - 9 = 0$.

750. Решите уравнение:

а) $x^4 - 16x^2 = 0$;
б) $x = x^3$;
в) $1{,}2x^3 + x = 0$;
г) $0{,}4x^4 = x^3$;
д) $x^3 + 6x^2 - 16x = 0$;
е) $x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$;
ж) $x^3 + x^2 = 9x + 9$;
з) $2x^3 + 8x = x^2 + 4$.

751. Приведите уравнение к виду $x^n = a$ и решите его:

а) $\frac{1}{8}x^3 = 1$;
б) $1000x^3 + 1 = 0$;
в) $\frac{1}{27}x^3 = 0{,}001$;
г) $\frac{1}{9}x^4 - 16 = 0$;
д) $1 + x^5 = 0$;
е) $x^8 - 16 = 0$.

752. Изобразив схематически графики, выясните, имеет ли уравнение корни:

а) $\frac{1}{2}x - 2 = x^3$;
б) $-3x - 1 = \sqrt{x}$;
в) $\frac{1}{x} = -x^2 + 1$;
г) $3 + x^2 = \frac{12}{x}$.

753. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 7x - 6$; в) $\frac{4}{x} = x^2 - 2x$;

б) $\frac{6}{x} = 0,5x - 2$; г) $\sqrt{x} = x^3$.

754. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - y = 17, \\ y + 6x = 23; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x = y + 50, \\ -3,4x + 2,6y = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x - 10y = 11, \\ 5y + 7x = 19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 2y = 3, \\ 13x + 6y = -1. \end{cases}$

755. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} - \frac{x - 2y}{2} = \frac{3}{2}, \\ \frac{2x + y}{2} - \frac{x + 2y}{3} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x - y + 1}{2} + \frac{x + y - 1}{5} = 7, \\ \frac{x - y + 1}{3} - \frac{x + y - 1}{4} = -3. \end{cases}$

756. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y = 13, \\ 2x + by = 5 \end{cases}$$

с переменными x и y, если одним из решений первого уравнения является пара чисел (8; 1), а второго — пара чисел (5; –1).

757. Каково расстояние от точки пересечения прямых $5x - 2y = -25$ и $-4x + 3y = 27$:
а) до оси абсцисс; б) до оси ординат; в) до начала координат?

758. Подберите значения k и b так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = 2,5x - 3: \end{cases}$$

а) не имела решений;
б) имела бесконечно много решений;
в) имела единственным решением пару чисел, в которой $x = 4$.

759. Принадлежит ли точка пересечения прямых $-2x + y = 11$ и $3x + 2y = 1$ прямой:

а) $10x - 3y = -45$; б) $-7x + 9y = 65$?

760. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точки:

а) (0; 30) и (6; 0); б) (2; 3) и (–2; 10).

761. Найдите такие значения коэффициентов a и b, при которых точки $M(2; -3)$ и $N(1; 4)$ принадлежат параболе $y = ax^2 + bx$.

762. При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ пересекает оси координат в точках $(0; -3)$ и $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$? В какой ещё точке эта парабола пересекает ось x?

763. Мастер и ученик изготовили в первый день 100 деталей. Во второй день мастер изготовил деталей на 20% больше, а ученик — на 10% больше, чем в первый день. Всего во второй день мастер и ученик изготовили 116 деталей. Сколько деталей изготовил мастер и сколько изготовил ученик в первый день?

764. Легковой автомобиль проехал за 2 ч на 10 км больше, чем грузовой за 3 ч. Если уменьшить скорость легкового автомобиля на 25%, а грузового на 20%, то грузовой автомобиль проедет за 5 ч на 20 км больше, чем легковой за 3 ч. Найдите скорость каждого автомобиля.

765. На опытном поле под рожь отвели участок 20 га, а под пшеницу — 30 га. В прошлом году с обоих участков собрали 2300 ц зерна. В этом году урожайность ржи повысилась на 20%, а пшеницы — на 30% и поэтому собрали зерна на 610 ц больше, чем в прошлом году. Какой была урожайность каждой культуры в этом году?

766. Расстояние между пунктами A и B равно 160 км. Из A в B выехал велосипедист, и в то же время из B в A выехал мотоциклист. Их встреча произошла через 2 ч, а через 30 мин после встречи велосипедисту осталось проехать в 11 раз больше, чем мотоциклисту. Каковы скорости мотоциклиста и велосипедиста?

767. Имеются два сплава серебра с медью. Первый содержит 67% меди, а второй — 87% меди. В каком соотношении нужно взять эти два сплава, чтобы получить сплав, содержащий 79% меди?

768. Смешали два раствора соли. Концентрация первого составляла 40%, а концентрация второго — 48%. В результате получился раствор соли концентрацией 42%. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

769. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + x^2 = 5x, \\ 2y + 5 = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 2x^2 + y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = -2, \\ y + 8 = \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

770. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 + y + 8 = xy, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x + y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 13; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3y = -12, \\ 2y - 7x = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 1, \\ 3y + x = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^2 - 6x + y = 0, \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1. \end{cases}$

771. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y - xy = 14, \\ x + 2y + xy = -7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ xy = 8. \end{cases}$

772. Не выполняя построения, выясните, пересекаются ли:

а) парабола $y = x^2 - 6x + 8$ и прямая $x + y = 4$;

б) прямая $x + y = 4$ и гипербола $y = \frac{3}{x}$;

в) окружности $x^2 + y^2 = 4$ и $(x - 3)^2 + y^2 = 1$;

г) окружность $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ и прямая $x + 2y = 3$.

Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте решение с помощью графиков.

773. При каком значении c имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x - 3y = 7, \\ 2x + 5y = c? \end{cases}$$

774. Не выполняя построения, выясните, пересекаются ли парабола $y = x^2 - x + 4$ и гипербола $y = \frac{4}{x}$. Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте решение с помощью графиков.

775. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ xy = a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

776. Если от числителя и знаменателя обыкновенной дроби отнять по единице, то дробь увеличится на $\frac{1}{6}$. Если же к числителю и знаменателю прибавить по единице, то дробь уменьшится на $\frac{1}{10}$. Найдите эту дробь.

777. Если от числителя и знаменателя обыкновенной дроби отнять по единице, то дробь уменьшится на $\frac{1}{10}$. Если же к числителю и знаменателю прибавить по единице, то дробь увеличится на $\frac{1}{15}$. Найдите эту дробь.

778. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 см, а его площадь равна 180 $см^2$. Найдите катеты этого треугольника.

779. Площадь прямоугольного треугольника равна 44 $см^2$. Если один из его катетов уменьшить на 1 см, а другой увеличить на 2 см, то площадь будет равна 50 $см^2$. Найдите катеты данного треугольника.

780. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы один из них был переведён на другой участок, а второй закончил работу, проработав ещё 9 дней. За сколько дней каждый рабочий мог выполнить всю работу?

781. Двое рабочих, работая вместе, выполнили работу за 2 дня. Сколько времени нужно каждому из них на выполнение всей работы, если известно, что если бы первый проработал 2 дня, а второй — один, то всего было бы сделано $\frac{5}{6}$ всей работы?

Арифметическая и геометрическая прогрессии

782. Один из членов арифметической прогрессии (a_n) равен 3. Найдите его номер, если $a_1 = 48{,}5$ и $d = -1{,}3$. Является ли членом этой прогрессии число $-3{,}5$; число 15?

783. В арифметической прогрессии четырнадцатый член равен 140, а сумма первых четырнадцати членов равна 1050. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

784. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Известно, что $a_6 = -6$ и $a_{16} = 17{,}5$. Найдите сумму первых шестнадцати членов этой прогрессии.

785. В арифметической прогрессии первый член равен 28, а сумма первых двадцати пяти членов равна 925. Найдите разность и тридцатый член этой прогрессии.

786. В арифметической прогрессии (a_n) сумма шестого и десятого членов равна 5,9, а разность двенадцатого и четвёртого членов равна 2. Найдите двадцать пятый член этой прогрессии.

787. В арифметической прогрессии (a_n) сумма пятого и десятого членов равна -9, а сумма четвёртого и шестого членов равна -4. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.