УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Авторы:

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 9-й класс : базовый уровень : учебник /
М34 Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А.Теляковского. — 15-е изд., перераб. — Москва: Просвещение, 2023. — 255, [1] с.: ил.

ISBN 978-5-09-102537-8.

Данный учебник является заключительной частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных организаций. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС ООО, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ №287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены новые по форме задания: задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-102537-8

Дорогие девятиклассники!

В этом году вам предстоит рассмотреть ряд новых тем из курса алгебры. Расширятся известные вам сведения об уравнениях и неравенствах. Вы получите представление об особенностях таких последовательностей, как арифметическая и геометрическая прогрессии, изучите свойства квадратичной функции. Также вы сможете попрактиковаться в решении задач практического содержания.

В учебнике подробно разъясняется новый материал, приводятся образцы решения задач. Проверить, как вы усвоили этот материал, помогут «Контрольные вопросы и задания», помещённые в конце каждого параграфа. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса алгебры 7—8 классов».

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что ваше внимание привлекут задачи-исследования и задания для работы в парах, при выполнении которых вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей, чётко формулировать и отстаивать свою позицию. При подготовке к государственной итоговой аттестации по алгебре вам помогут включённые в каждый пункт учебника задания для повторения, а также помещённые в конце учебника «Упражнения для повторения курса 7—9 классов».

После окончания 9 класса вам придётся сделать выбор, где вы будете продолжать образование. Учащимся, которые хотят обучаться в классах с повышенной математической подготовкой, советуем обратить внимание на более сложные задания, включённые в каждый пункт учебника и помеченные специальным знаком, а также на дополнительные пункты под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», помещённые в конце каждой главы. Специально для учащихся, увлечённых математикой, в конце учебника предлагаются «Задачи повышенной трудности». Решение таких задач поможет не только расширить кругозор, но и подготовиться к участию в математических олимпиадах.

Учащимся, которым любопытно знать, как зарождался и развивался тот или иной раздел математики, рекомендуем прочитать в учебнике «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении курса алгебры и предстоящей государственной итоговой аттестации.

В учебнике используются следующие условные обозначения:

- — текст, который нужно запомнить
- — материал, который важно знать
- ▶ — начало решения задачи
- ◁ — окончание решения задачи
- ● — начало обоснования утверждения или вывода формулы
- ○ — окончание обоснования утверждения или вывода формулы
- **11.** — задание обязательного уровня
- **27.** — задание повышенной трудности
- П — упражнения для повторения

Глава I ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

При изучении главы вы вспомните основные числовые множества и соотношения между ними. В центре внимания будет множество действительных чисел: перечислены свойства действий над действительными числами, рассмотрен общий способ сравнения действительных чисел. Вы познакомитесь с такими понятиями, как абсолютная и относительная погрешности приближённого значения. Особое место в главе занимают задачи практического содержания, при решении которых вы сможете ещё раз убедиться в том, как тесно математика связана с реальной жизнью.

§ 1 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Действия над действительными числами

Современные знания о числах и способах вычислений складывались на протяжении многих столетий. Стимулом к развитию понятия числа послужили потребности человека, которые возникли у него в ходе практической деятельности.

Ещё в глубокой древности люди стали вести счёт предметов, что привело к возникновению натуральных чисел. Люди знали их так много тысячелетий тому назад, что знаменитый математик Леопольд Кронекер сказал: «Бог создал натуральные числа, а всё остальное — дело рук человека».

Множество натуральных чисел принято обозначать буквой N (первой буквой латинского слова *nature* — «природа»). В множестве натуральных чисел есть наименьшее число — это 1, но наибольшего числа нет: какое бы большое натуральное число мы ни взяли, найдётся натуральное число, большее взятого. Натуральных чисел *бесконечно много*.

В множестве $\boldsymbol{N}$ выполнимыми являются действия сложения и умножения: сумма и произведение любых двух натуральных чисел также будут числами натуральными. Иными словами, выполняя действия сложения и умножения, мы остаёмся в границах множества $\boldsymbol{N}$. Говорят, что множество натуральных чисел *замкнуто* относительно сложения и умножения. В то же время действия вычитания и деления в множестве натуральных чисел выполняются не всегда: нельзя разделить одно натуральное число на другое, если первое число не кратно второму, и нельзя вычесть из меньшего натурального числа большее. Например, разность $60 - 70$ и частное $18 : 64$ натуральными числами не являются.

Потребность людей в измерении величин и то обстоятельство, что результат измерения не всегда выражается целым числом, привели к расширению множества натуральных чисел. Появились дробные числа. Сначала это были дроби, выражающие какую-либо долю единицы (половина, треть, четверть). Затем появились и другие дробные числа.

Однако не всегда толчком к развитию знаний о числах были исключительно практические потребности людей. К расширению понятия числа приводили также задачи самой математики. Именно так обстояло дело с появлением отрицательных чисел. Многие задачи, особенно решаемые с помощью уравнений, сводились к вычитанию из меньшего числа большего. Это потребовало введение новых чисел — отрицательных.

Наряду с отрицательными числами появилось и число нуль. Интересно, что долгое время нуль не считался полноправным числом. И лишь с введением системы координат нуль был признан числом.

Натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число 0 *образуют множество целых чисел.* Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$ (первой буквой немецкого слова *Zahl* — «число»). В множестве целых чисел нет ни наименьшего, ни наибольшего числа.

Множество целых чисел включает в себя множество натуральных чисел: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$. Любое натуральное число является целым числом, но не любое целое число является натуральным. Например: $20 \in \boldsymbol{N}$ и $20 \in \boldsymbol{Z}$; $-20 \in \boldsymbol{Z}$, но $-20 \notin \boldsymbol{N}$.

Множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения: сумма, разность и произведение двух целых чисел также являются целыми числами. Однако частное двух целых чисел будет целым числом только в том случае, когда делимое кратно делителю. Например, частное $36 : 9$ — целое число, а частное $36 : 8$ целым числом не является.

Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Множество рациональных чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Q}$ (первой буквой английского слова *quotient*, что в переводе означает «частное»). Это связано с тем, что любое рациональное число может быть представлено в виде отношения (частного) $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, $n \neq 0$.

Множество рациональных чисел включает в себя множество целых чисел: $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Любое целое число является рациональным числом, но не всякое рациональное число является целым. Например, $12 \in \boldsymbol{Z}$ и $12 \in \boldsymbol{Q}$; $1{,}2 \in \boldsymbol{Q}$, но $1{,}2 \notin \boldsymbol{Z}$.

В множестве рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ выполнимы все четыре арифметических действия: сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел (кроме случая деления на нуль) также являются рациональными числами.

● Докажем, например, что сумма двух рациональных чисел есть число рациональное.

Возьмём рациональные числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ (m, n, p и q — целые числа и $n \neq 0$, $q \neq 0$). Составим сумму этих чисел и преобразуем её:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}.$$

Очевидно, что числитель дроби $mq + np$ — целое число, знаменатель дроби nq — целое число, отличное от нуля. Значит, сумма $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ равна отношению двух целых чисел, т. е. является рациональным числом. ○

Рациональные числа изображают точками на координатной прямой. Но если представить, что все рациональные точки нанесены на координатную прямую, то окажется, что на прямой есть точки, не имеющие рациональной координаты. Это, например, точка K — конец отрезка, равного диагонали единичного квадрата (рис. 1). Как известно из курса алгебры 8 класса, координата построенной точки K равна $\sqrt{2}$ и является иррациональным числом.

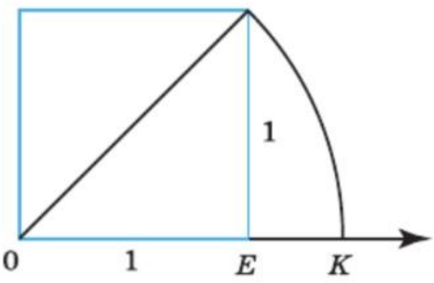


Рис. 1

Вообще, иррациональных чисел бесконечно много. Так, если n не является квадратом какого-либо натурального числа, то $\sqrt{n}$ — иррациональное число. Например, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ — иррациональные числа.

Иррациональные числа нельзя записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число.

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных чисел.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$ (первой буквой английского слова *realis* — «реальный», «настоящий», «действительный»).

Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ включает в себя множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, следовательно, любое рациональное число является действительным числом. Но не всякое действительное число является рациональным. Например, $\frac{3}{7} \in \boldsymbol{Q}$ и $\frac{3}{7} \in \boldsymbol{R}$, $\sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$, но $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$.

Таким образом, числовые множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ связаны отношением включения, которое может быть описано следующей цепочкой: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$. Эта цепочка проиллюстрирована на рисунке 2.

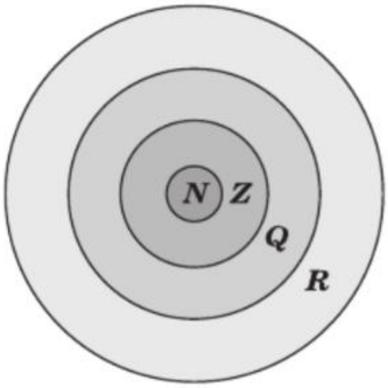


Рис. 2

Как вы знаете, действительные числа изображают точками на координатной прямой, причём между точками прямой и множеством действительных чисел существует *взаимно-однозначное соответствие*, а именно, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число и, наоборот, каждому действительному числу соответствует точка координатной прямой. При этом как бы близко на координатной прямой не были расположены две её точки, между ними существует бесконечное множество точек как с рациональными, так и с иррациональными координатами. Говорят, что множество действительных чисел обладает *свойством плотности*.

В множестве действительных чисел выполняются все четыре арифметических действия. При этом справедливы следующие свойства, которые называют *основными законами алгебры*:

$a + b = b + a$	— переместительное свойство сложения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	— сочетательное свойство сложения
$a + 0 = a$	— свойство нуля при сложении
$a + (-a) = 0$	— существование противоположного числа
$a \cdot b = b \cdot a$	— переместительное свойство умножения
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	— сочетательное свойство умножения
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	— распределительное свойство умножения относительно сложения
$a \cdot 1 = a$	— свойство единицы при умножении
$a \cdot 0 = 0$	— свойство нуля при умножении
$a \cdot \frac{1}{a} = 1 (a \neq 0)$	— существование обратного числа

Упражнения

1. Найдите десять рациональных чисел, которые заключены между числами 0,001 и 0,01. Найдите несколько иррациональных чисел, находящихся в этом промежутке.

2. Среди чисел 1,38; 2,5; 0; 1,(5); –1,68; 1,68; $2\frac{3}{4}$; 4,05; 1,4; 1,8; 1,75 найдите такие, которые заключены между иррациональными числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

3. Какое из утверждений верно: «Если $a \in \boldsymbol{N}$, то $a \in \boldsymbol{Z}$» или «Если $a \in \boldsymbol{Z}$, то $a \in \boldsymbol{N}$»?

4. Найдите два значения x, при которых:
а) $x \in \boldsymbol{Z}$ и $x \notin \boldsymbol{N}$; б) $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \notin \boldsymbol{Z}$; в) $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \notin \boldsymbol{N}$.

5. Каким из множеств $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ принадлежит:
а) 6; б) –1,98; в) 0,5(87); г) π?

6. Найдите три числа, которые принадлежат:
а) $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{N}$; в) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

7. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:
а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{7}{9}$; д) $1\frac{8}{11}$; е) $2\frac{4}{15}$.
В каждом случае выделите период, заключив его в скобки.

8. Представьте число в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Округлите результат до десятых; до сотых; до тысячных:
а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{3}{32}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{13}{64}$; д) $\frac{37}{15}$; е) $\frac{87}{65}$.

9. Проверьте, выполнив деление, что верно равенство:
а) $2,(3) = 2\frac{1}{3}$; в) $7,(18) = 7\frac{2}{11}$;
б) $0,1(6) = \frac{1}{6}$; г) $3,4(6) = 3\frac{7}{15}$.

10. Докажите, что разность, произведение и частное двух рациональных чисел (делитель отличен от нуля) — числа рациональные.

11. Запишите, используя знак $\in$, утверждение:
а) Число 13 является натуральным;
б) число 0,8 является рациональным;
в) число $\sqrt{3}$ является действительным;
г) число 585 является натуральным;
д) число 0 является целым.

12. Среди чисел

-2; 0; $\sqrt{2}$; $8{,}83$; π; $\frac{1}{48}$; $-\sqrt{11}$; 200; -100; $\frac{2}{3}$; $-5{,}12$; $-\frac{3}{7}$; $0{,}0002$

найдите:

а) натуральные числа;
б) целые отрицательные числа;
в) целые неотрицательные числа;
г) рациональные числа;
д) иррациональные числа;
е) действительные числа.

13. Какое множество является:

а) объединением множеств $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$, их пересечением;
б) объединением множеств $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$, их пересечением;
в) объединением множеств $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Q}$, их пересечением;
г) объединением множеств $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{R}$, их пересечением?

14. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам:

$$\sqrt{7};\ -\sqrt{11};\ \sqrt{12{,}3};\ \frac{12}{13};\ \frac{1}{2};\ 3\frac{1}{3};\ 0;\ 1{,}6+\sqrt{2}.$$

15. Укажите пять значений переменной a, при которых число $\sqrt{a}$ является рациональным и пять значений, при которых это число является иррациональным.

16. Приведите пример числа, которое является:

а) рациональным и нецелым;
б) действительным, но не рациональным;
в) целым, но не натуральным.

17. Прочитайте утверждения и выберите верные:

$-18 \in \boldsymbol{Z}$;	$\frac{12}{15} \in \boldsymbol{N}$;	$3{,}38 \notin \boldsymbol{Q}$;
$205 \in \boldsymbol{Q}$;	$2{,}5 \notin \boldsymbol{R}$;	$2 + \sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$;
$\sqrt{3} \notin \boldsymbol{N}$;	$\sqrt{2} \in \boldsymbol{Q}$;	$3\frac{1}{4} + 0{,}25 \in \boldsymbol{R}$;
$0{,}15 \in \boldsymbol{Z}$;	$0{,}(8) \in \boldsymbol{R}$;	$4 + \sqrt{4} \in \boldsymbol{Z}$.

18. Запишите с помощью знака $\subset$ соотношения между множествами:

а) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{N}$;
б) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Z}$;
в) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{N}$;
г) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Z}$.

П

19. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству:

а) $x < 3$;
б) $-2 < x < 4$;
в) $x \geqslant 1$;
г) $5 \leqslant x \leqslant 7{,}5$;
д) $0 < x \leqslant 2{,}5$;
е) $x \geqslant 10{,}5$.

20. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

б) $\sqrt{a-b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

в) $2\sqrt{a+4b}$, если $a = 0{,}12$, $b = 0{,}01$;

г) $\sqrt{3a-b}$, если $a = 0{,}6$, $b = 0{,}8$;

д) $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, если $a = 0{,}7$, $b = 0{,}09$;

е) $-\sqrt{a-\sqrt{b}}$, если $a = 4{,}8$, $b = 0{,}64$.

21. Найдите значение выражения:

а) $(22{,}5 : 0{,}45) \cdot (5{,}27 + 1{,}93)$;

б) $(7{,}6 - 8{,}5) : (0{,}23 + 2{,}92)$;

в) $35{,}4 \cdot (62{,}4 - 49{,}9) - 12{,}5 \cdot 15{,}4$;

г) $12{,}48 : (1{,}23 + 1{,}17) - 14{,}7 : 0{,}49$.

2. Сравнение действительных чисел

Вам уже приходилось сравнивать действительные числа, при этом для каждого вида чисел использовался свой способ сравнения. Напомним некоторые из этих способов.

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше. Например, сравним две дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{9}$. Чтобы воспользоваться правилом, приведём их к общему знаменателю, получим: $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$, $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$, значит $\frac{5}{6}>\frac{7}{9}$.

Чтобы сравнить обыкновенную дробь и десятичную, нужно перейти к какой-нибудь одной форме представления дробей. Сравним, например, числа $\frac{5}{6}$ и 0,6. Число $\frac{5}{6}$ в виде десятичной дроби представить нельзя, поэтому запишем в виде обыкновенной дроби число 0,6. Получим: $0{,}6=\frac{3}{5}$; так как $\frac{5}{6}>\frac{3}{5}$, то $\frac{5}{6}>0{,}6$.

При сравнении чисел разных знаков пользуются правилом: всякое отрицательное число меньше положительного, например: $-100 < 0{,}0017$.

Правило сравнения двух отрицательных чисел таково: из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Например, $-250 > -350$, так как $|-250| < |-350|$.

При сравнении чисел, одно из которых или оба имеют вид $\sqrt{a}$, пользуются свойством: при увеличении подкоренного выражения значение арифметического квадратного корня возрастает. Сравним, например, числа 7 и $\sqrt{48}$. Так как $7 = \sqrt{49}$ и $\sqrt{49} > \sqrt{48}$, то $7 > \sqrt{48}$.

Удобно, однако, иметь общий способ сравнения чисел, который не зависит от их конкретного вида. Такой способ основан на десятичной записи.

Известно, что всякое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Эта дробь периодическая, если число рациональное, и непериодическая, если число иррациональное.

Сравним, например, числа π и $\sqrt{10}$: $\pi = 3{,}1415...$, а $\sqrt{10} = 3{,}1622...$. Цифры в разряде единиц и десятых совпадают, а в разряде сотых в первом числе стоит 4, а во втором — 6. Следовательно, $\pi < \sqrt{10}$.

Упражнения

22. Расположите в порядке возрастания числа:

$$-1\frac{1}{3};\ -1{,}3;\ 1{,}15;\ 1\frac{1}{8};\ -1{,}4.$$

23. Расположите в порядке убывания числа:

$$-5{,}28;\ -1{,}634...;\ -1{,}34;\ -1{,}(3).$$

24. Какие целые числа расположены между числами:

а) $-4{,}122...$ и $3{,}895...$;
б) $-6{,}240...$ и $-1{,}328...$;
в) $-5{,}07$ и $-2{,}708$;
г) $-2{,}25$ и $0{,}62$?

25. Сравните числа:

а) $0{,}017$ и $0{,}099$;
б) $-4{,}9$ и $-4{,}25$;
в) $-8{,}48$ и $-8{,}84$;
г) $\frac{11}{16}$ и $0{,}6875$;
д) $-2{,}882$ и $-2\frac{13}{20}$;
е) $\frac{12}{13}$ и $\frac{13}{14}$;
ж) $-6{,}006$ и $6{,}066$;
з) $-34\frac{3}{4}$ и $-34{,}75$;
и) $0{,}653$ и $\frac{13}{20}$;
к) $\frac{3}{7}$ и $0{,}43$.

26. Сравните числа:

а) $2{,}5$ и -25;
б) $-3{,}01$ и $3{,}001$;
в) $-0{,}14$ и $-0{,}41$;
г) $-2{,}35$ и $-3{,}25$.

27. Сравните числа:

а) $2{,}3(4)$ и $2{,}(34)$;
б) $1{,}0(5)$ и $1{,}0(05)$;
в) $-1{,}34$ и $-1{,}(34)$;
г) $0{,}61$ и $0{,}61(1)$.

28. Сравните числа:

а) $0{,}5(45)$ и $0{,}(54)$;
б) $0{,}54(5)$ и $0{,}545$;
в) $0{,}(27)$ и $0{,}2(72)$;
г) $-7{,}(3)$ и $-7{,}123$;
д) $6{,}(347)$ и $6{,}1(743)$;
е) $0{,}1(0)$ и $0{,}0(9)$.

29. Сравните числа:

а) 5,48(5) и 5,4(85); б) −3,5(61) и −3,56(1).

30. Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{75}$.

31. Сравните числа c и $\sqrt{c}$ при условии, что: а) $c > 1$; б) $0 < c < 1$. Существует ли значение c, при котором верно равенство $\sqrt{c} = c$?

32. Сравните числа:

а) $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{5}$; в) $0{,}3\sqrt{10}$ и $0{,}1\sqrt{80}$;

б) $0{,}1\sqrt{4500}$ и $\sqrt{45}$; г) $-4\sqrt{0{,}2}$ и $-\sqrt{0{,}7}$.

П

33. Найдите значение выражения:

а) $12\frac{2}{5} - 2\frac{2}{7} : 1\frac{19}{21}$; б) $\left(12\frac{2}{5} - 2\frac{2}{7}\right) : 1\frac{19}{21}$.

34. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $2{,}4 \cdot 10^{-2}$ и $0{,}0125 \cdot 10^{3}$; в) $15{,}4 \cdot 10^{6}$ и $0{,}044 \cdot 10^{7}$;

б) $(1{,}3 \cdot 10^{-2})^{2}$ и $5{,}2 \cdot 10^{-5}$; г) $(3{,}5 \cdot 10^{-3})^{2}$ и $(7 \cdot 10^{-4})^{2}$.

35. Найдите значение выражения:

а) $7^{5} \cdot (7^{2})^{4} : 7^{11}$; г) $10 : (5^{-2})^{13} : 25^{14}$;

б) $11^{-4} : 11^{13} : 11^{17}$; д) $\frac{15^{5}}{3^{3} \cdot 5^{4}} : \frac{12^{5}}{3^{6} \cdot 4^{6}}$;

в) $5^{9} : 5^{-12} : 5^{20}$; е) $\frac{10^{10}}{2^{8} \cdot 5^{9}} : \frac{17^{6} \cdot 8^{3}}{34^{7}}$.

36. Вычислите:

а) $\frac{27^{5} + 27^{4}}{9^{8} + 9^{7} + 9^{6}}$; б) $\frac{16^{7} + 16^{6}}{8^{10} + 8^{9} + 8^{8}}$; в) $\frac{4^{95} + 4^{94} + 4^{93}}{21 \cdot (16^{2})^{23}}$.

3. Погрешность и точность приближения

По графику функции $y = x^2$ найдены приближённые значения этой функции при $x = 1{,}5$ и $x = 2{,}1$:

если $x = 1{,}5$, то $y \approx 2{,}3$;
если $x = 2{,}1$, то $y \approx 4{,}4$.

По формуле $y = x^2$ можно найти точные значения этой функции:

если $x = 1{,}5$, то $y = 1{,}5^2 = 2{,}25$;
если $x = 2{,}1$, то $y = 2{,}1^2 = 4{,}41$.

Приближённое значение отличается от точного значения в первом случае на 0,05, а во втором на 0,01, так как:

$$2{,}3 - 2{,}25 = 0{,}05; \qquad 4{,}41 - 4{,}4 = 0{,}01.$$

Чтобы узнать, на сколько приближённое значение отличается от точного, надо из большего числа вычесть меньшее, т. е. найти модуль разности точного и приближённого значений. Этот модуль разности называют *абсолютной погрешностью*.

Определение. Абсолютной погрешностью приближённого значения называют модуль разности точного и приближённого значений.

Так, в рассмотренном примере абсолютная погрешность приближённого значения, равного 2,3, есть 0,05, а абсолютная погрешность приближённого значения, равного 4,4, есть 0,01:

$$|2{,}25 - 2{,}3| = |-0{,}05| = 0{,}05; \qquad |4{,}41 - 4{,}4| = 0{,}01.$$

Найти абсолютную погрешность не всегда возможно. Пусть, например, при измерении длины отрезка AB, изображённого на рисунке 3, получен результат:

$$AB \approx 4{,}3 \text{ см}.$$

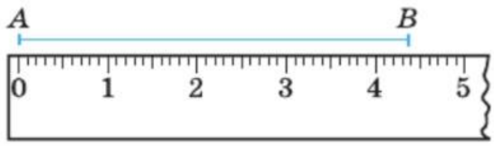


Рис. 3

Мы не можем найти абсолютную погрешность приближённого значения, так как не знаем точного значения длины отрезка AB. В подобных случаях важно указать такое число, больше которого абсолютная погрешность быть не может. В рассматриваемом примере в качестве такого числа можно взять число 0,1. В самом деле, цена деления линейки 0,1 см, и поэтому абсолютная погрешность приближённого значения, равного 4,3, не больше чем 0,1, т. е.

$$|AB - 4{,}3| \leqslant 0{,}1.$$

Говорят, что число 4,3 есть приближённое значение длины отрезка AB (в сантиметрах) с точностью до 0,1.

Вообще, если $x \approx a$ и абсолютная погрешность этого приближённого значения не превосходит некоторого числа h, то число a называют *приближённым значением* x *с точностью до* h. Пишут:

$$x \approx a \text{ с точностью до } h.$$

Используют также такую запись:

$$x = a \pm h.$$

Запись $x = a \pm h$ означает, что точное значение переменной x заключено между числами $a - h$ и $a + h$, т. е.

$$a - h \leqslant x \leqslant a + h.$$

Например, на рулоне обоев написано, что его длина равна $18 \pm 0{,}3$ м. Значит, если l — истинное значение длины рулона (в метрах), то

$$18 - 0{,}3 \leqslant l \leqslant 18 + 0{,}3, \text{ т. е. } 17{,}7 \leqslant l \leqslant 18{,}3.$$

Точность приближённого значения зависит от многих причин. В частности, если приближённое значение получено в процессе измерения, его точность зависит от прибора, с помощью которого выполнялось измерение. Например, на медицинском термометре деления нанесены через $0{,}1°$. Это даёт возможность измерять температуру с точностью до $0{,}1°$. Комнатный термометр, на котором деления нанесены через $1°$, позволяет измерять температуру с точностью до $1°$. На торговых весах, у которых цена деления шкалы 5 г, можно взвешивать с точностью до 5 г.

Для оценки качества измерения можно использовать *относительную погрешность* приближённого значения.

Определение. Относительной погрешностью приближённого значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения.

Относительную погрешность принято выражать в процентах.

В тех случаях, когда абсолютная погрешность приближённого значения неизвестна, а известна только его точность, ограничиваются оценкой относительной погрешности.

Рассмотрим такой пример. При измерении (в сантиметрах) толщины b стекла и длины l книжной полки получили такие результаты:

$$b = 0{,}4 \pm 0{,}1; \qquad l = 100{,}0 \pm 0{,}1.$$

В первом случае относительная погрешность не превосходит $\frac{0{,}1}{0{,}4} \cdot 100\%$, т. е. 25%, а во втором не превосходит $\frac{0{,}1}{100} \cdot 100\%$, т. е. 0,1%. Говорят, что в первом случае измерение выполнено с относительной точностью до 25%, а во втором — с относительной точностью до 0,1%. Качество второго измерения намного выше, чем первого.

Упражнения

37. Округлите числа 17,26; 12,034; 8,654 до десятых и найдите абсолютную погрешность каждого из приближённых значений.

38. Найдите абсолютную погрешность приближённого значения, полученного в результате округления:
а) числа 9,87 до единиц;
б) числа 124 до десятков;
в) числа 0,453 до десятых;
г) числа 0,198 до сотых.

39. При выполнении вычислений дробь $\frac{1}{7}$ заменили десятичной дробью 0,14. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

40. В каких границах заключено число y, если:
а) $y = 6{,}5 \pm 0{,}1$; б) $y = 1{,}27 \pm 0{,}2$?

41. На упаковке простокваши написано, что её надо хранить при температуре 4 ± 2 °C. В каких границах заключено значение температуры t °C, допустимое для хранения?

42. На упаковке товара указано, что его масса равна 420 г ± 3%. В каких границах заключена масса a г этого товара?

43. На коробке конфет указано, что она должна храниться при температуре 16 ± 3 °C. Удовлетворяет ли этому условию температура воздуха, равная:
а) 18 °C; б) 21 °C; в) 14,5 °C; г) 12,5 °C?

44. Определяя массу мешка картофеля с точностью до 1 кг, нашли, что она равна 32 кг. Может ли масса этого мешка, измеренная с точностью до 0,1 кг, оказаться равной:
а) 31,4; б) 32,5; в) 33,2; г) 30,7?

45. Начертите острый угол и измерьте его с помощью транспортира. Какова точность полученного результата?

46. При измерении длины стержня пользовались различными измерительными инструментами: линейкой с миллиметровыми делениями, штангенциркулем (цена деления 0,1 мм) и микрометром (цена деления 0,01 мм). При этом были получены результаты: 17,9 мм, 18 мм, 17,86 мм. Каким инструментом выполнено каждое из указанных измерений и какую точность даёт каждый инструмент?

47. Округлите число 2,525 до десятых. Найдите относительную погрешность приближения, полученного при округлении.

48. Выполняя лабораторную работу по определению плотности железа, ученик получил результат 7,6 г/см^3. Вычислите относительную погрешность экспериментального результата (табличное значение плотности железа равно 7,8 г/см^3).

49. Поверхность Земли равна 510,2 млн км^2 (с точностью до 0,1 млн км^2). Оцените относительную погрешность приближённого значения.

50. Измерили толщину человеческого волоса d и расстояние от Земли до Луны l. Получили $d \approx 0{,}15$ мм с точностью до 0,01 мм и $l \approx 384\,000$ км с точностью до 500 км. Сравните качество измерений, оценив относительные погрешности.

П

51. Сравнивая с нулём значения выражений, ученик получил следующие результаты:

1. $3\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0$ 2. $4\sqrt{7} - 9\sqrt{2} < 0$

3. $6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} > 0$ 4. $7\sqrt{11} - 6\sqrt{12} < 0$

При этом он допустил ошибку. Найдите её и исправьте.

52. Докажите неравенство:

а) $6a(a + 1) < (3a + 1)(2a + 1) + a$;

б) $(2p - 1)(2p + 1) + 3(p + 1) > (4p + 3)p$.

53. а) Разность корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равна 16. Найдите q.

б) Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + q = 0$ равна 29. Найдите q.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите основные числовые множества. Запишите последовательность соотношений между этими множествами в виде цепочки включений и проиллюстрируйте её рисунком.
2. Сформулируйте и запишите в буквенном виде законы сложения и законы умножения чисел.
3. Сформулируйте и запишите в виде буквенного равенства свойства нуля при сложении, свойства нуля и единицы при умножении.
4. Что называется абсолютной погрешностью приближённого значения? Объясните смысл записи $x = a \pm h$.
5. Что называется относительной погрешностью приближённого значения?

§ 2 ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ

4. Размеры объектов и длительность процессов в окружающем мире

В природе существуют как очень большие объекты, так и очень малые. Их можно измерить и получить представление о различиях их величин с точки зрения математики. Среди малых объектов можно привести пример атомов, состоящих из электронов и ядер с размерами 1 Å (ангстрем или 10^{-10} м). Малыми размерами обладают вирусы, большинство из которых имеют длину от 20 до 300 нм (нанометр, т. е. одна миллиардная часть метра — 10^{-9} м). В то же время окружающая нас Вселенная огромна, и в ней находится очень много огромных объектов. Например, Юпитер — самая большая планета Солнечной системы, газовый гигант. Его экваториальный радиус равен 71,4 тыс. км, т. е. $7{,}14 \cdot 10^7$ м.

Различия касаются не только размеров окружающего мира, но и длительности процессов в нём. Супербыстрое или самое краткое событие, зафиксированное учёными в истории науки — это прохождение рентгеновского фотона через молекулу водорода. Оно равно 247 зептосекунд (1 зептосекунда равна 10^{-21} с), т. е. $2{,}47 \cdot 10^{-23}$ с. Среди животных, птиц и рыб очень разнится скорость их движения. Так, птица сапсан — король вертикального полёта, пикируя на добычу, развивает скорость до 360 км/ч или $3{,}6 \cdot 10^5$ м/ч. Не случайно его именем назван скоростной поезд. А морской конёк плавает со скоростью всего лишь 1,5 м/ч.

Упражнения

54. Приведите примеры очень больших и очень малых величин и укажите их размеры. (Для поиска информации воспользуйтесь данными из Интернета или из справочников.)

55. Приведите примеры процессов, различающихся по скорости их протекания: очень быстрых и очень медленных. (Для поиска информации воспользуйтесь данными из Интернета или из справочников.)

56. а) Расстояния между звёздами измеряют в световых годах. Световой год равен примерно 9460 млрд км. От звезды X до звезды Y расстояние a световых лет. Запишите это расстояние в тысячах километров.

б) Российские учёные из государственного научного центра вирусологии и биотехнологии «Вектор» сделали снимки нового вируса SARS-CoV-2 под микроскопом. Размер частиц составляет 100—120 нм. Запишите размер частиц этого вируса в метрах.

57. Одна секунда — мгновение для человека и целая эпоха с точки зрения атомов и электронов. Невооружённый человеческий взгляд может заметить явления, длящиеся буквально единицы миллисекунд (1 миллисекунда равна 10^{-3} с). Одна наносекунда ещё меньше и составляет 10^{-9} с. Посчитайте дистанцию, которую пройдёт частица со скоростью света за одну наносекунду, и результат запишите в миллиметрах.

58. Современные фотоаппараты делают огромное количество кадров за короткий промежуток времени. Рекорд составляет 6 миллионов кадров за секунду. Можно увидеть события, которые человеческий глаз никогда не сможет уловить. За какое время происходит один кадр в таком фотоаппарате? Результат запишите в наносекундах.

П

59. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}$;

б) $\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

60. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=240; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=65, \\ 2x-y=15. \end{cases}$

61. Сколько решений имеет уравнение:

а) $\dfrac{25}{x}=2x-5$; б) $x^3=|x|$?

5. Практико-ориентированные задачи

Часто, даже не подозревая об этом, вы сталкиваетесь в быту с необходимостью применить те или иные математические знания. Например, прикидывая, хватит ли вам наличных денег на покупку продуктов, или поместится ли телевизор с диагональю, длина которой указана в дюймах, в нишу шкафа. Рассчитывая время, которое вам понадобится, чтобы добраться до места встречи с другом, вы обязательно будете учитывать и скорость передвижения, и расстояние до места встречи. При приготовлении нового блюда вам потребуется, например, такое математическое понятие, как часть от числа, а также знания о переводе одних единиц измерения в другие. Если вы захотите положить свои деньги на вклад в банк, то обязательно появится мысль о том, в каком банке это выгоднее всего сделать, исходя из предлагаемой им процентной ставки. Изучая историю развития человечества, становится понятно, что развитие математики как науки началось во многом благодаря тому, что люди каждый день попадали в ситуации, когда надо было что-то складывать и вычитать, умножать и делить, находить значения различных величин, то есть каждый человек был вынужден искать решения *практико-ориентированных задач*, связанных с его жизнью и бытом. Оказалось, что процессы, происходящие в реальной жизни, проще всего описывать с помощью математических моделей, а умение решать практико–ориентированные задачи незаменимо в практической деятельности и повседневной жизни человека.

Рассмотрим некоторые практико-ориентированные задачи.

Задача 1. Надежда Михайловна решила сделать ремонт в гостиной, в которой имеются окно (120×130 см) и дверь (800×2000 мм). Она выбрала в магазине обои в рулонах (размер одного рулона $10,5 \times 1,06$ м) по цене 2300 р. за один рулон, а также ламинат по цене 1100 р. за упаковку. Хватит ли Надежде Михайловне 25 тыс. р. на покупку этих материалов, если гостиная имеет размеры $4,5 \times 6 \times 2,7$ (ш × д × в), а ламинат продаётся упаковками по 2,74 м^2 в каждой?

▶ Каждая стена имеет форму прямоугольника, поэтому можно найти общую площадь стен:

$$4,5 \cdot 2,7 \cdot 2 + 6 \cdot 2,7 \cdot 2 = 2,7 \cdot 2 \cdot (4,5 + 6) = 5,4 \cdot 10,5 = 56,7 \text{ м}^2.$$

Учитывая, что дверь и окно не подлежат оклейке обоями, вычтем из найденной площади стен площадь окна и двери.
Имеем $S_{\text{окна}} = 120 \text{ см} \cdot 130 \text{ см} = 1,2 \text{ м} \cdot 1,3 \text{ м} = 1,56 \text{ м}^2$;
$S_{\text{двери}} = 800 \text{ мм} \cdot 2000 \text{ мм} = 0,8 \text{ м} \cdot 2 \text{ м} = 1,6 \text{ м}^2$,
Тогда $S_{\text{оклейки}} = 56,7 \text{ м}^2 - 1,56 \text{ м}^2 - 1,6 \text{ м}^2 = 53,54 \text{ м}^2$.
Найдём, какую площадь можно оклеить одним рулоном обоев:

$$10,5 \cdot 1,06 = 11,13 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Тогда Надежде Михайловне понадобится $53,54 : 11,13 \approx 5$ рулонов, цена которых составит $2300 \cdot 5 = 11\,500$ р.
Найдём площадь пола:

$$S_{\text{пола}} = 4,5 \text{ м} \cdot 6 \text{ м} = 27 \text{ м}^2.$$

Отсюда получим, что для гостиной понадобится $27 : 2,74 \approx 10$ упаковок ламината, цена которых составит $1100 \cdot 10 = 11\,000$ р.
Таким образом, для покупки всех материалов необходимо $11\,500 + 11\,000 = 22\,500$ р., а значит, Надежде Михайловне хватит имеющейся у неё суммы. ◁

Задача 2. Мобильный оператор предлагает три тарифа сотовой связи.

Тариф	Условия тарифа	Абонентская плата	Плата сверх тарифа
«1500»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно 2000 мин в месяц, безлимитный Интернет	1500 р. в месяц	3,5 р. за минуту
«2000»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно 3000 мин в месяц, Интернет — бесплатно 10 Гб в месяц	2000 р. в месяц	1,5 р. за минуту, 40 р. за 1 Гб
«3000»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно, Интернет — бесплатно 30 Гб	3000 р. в месяц	30 р. за Гб

Антон тратит 2500 мин в месяц на исходящие звонки и 35 Гб Интернета. Какой тариф будет для него самым выгодным?

▶ Рассчитаем расходы Антона по каждому тарифу.
По первому тарифу они составят

$$1500 + 3{,}5 \cdot 500 = 3250 \text{ р.},$$

по второму тарифу —

$$2000 + 40(35 - 10) = 2000 + 40 \cdot 25 = 3000 \text{ р.},$$

а по третьему —

$$3000 + 30(35 - 30) = 3000 + 30 \cdot 5 = 3150 \text{ р.}$$

Тогда самым выгодным для Антона тарифом будет тариф «2000». ◁

Задача 3. Вера Николаевна вырастила большой урожай огурцов и решила замариновать их. В рецепте было указано, что для приготовления маринада ей понадобится 2%-й раствор уксуса. Но в наличии у неё оказался только 9%-й раствор, а магазины уже не работали. Сколько Вере Николаевне нужно добавить воды в 500 г 9%-го раствора уксуса, чтобы получить необходимую концентрацию для маринада?

▶ Пусть x г воды надо добавить в 9%-й раствор уксуса для получения 2%-го раствора.

Составим таблицу.

Раствор	Масса раствора, г	Масса уксуса, г
9%-й	500	$500 \cdot 0{,}09 = 45$
2%-й	$500 + x$	$(500 + x) \cdot 0{,}02 = 10 + 0{,}02x$

Масса уксуса при добавлении воды не меняется, поэтому получим

$$10 + 0{,}02x = 45 \text{ (г)}.$$

Решив уравнение, узнаем, что $x = 1750$ г, значит, необходимо 500 г 9%-го раствора уксуса разбавить 1750 г воды для получения 2%-го раствора. ◁

Упражнения

62. В каких единицах в нашей стране обычно измеряют следующие величины:

1) высоту холодильника;
2) площадь поверхности тела человека;
3) ширину реки;
4) массу таблетки;
5) скорость движения черепахи;
6) заработный фонд крупной компании;
7) площадь страны;
8) массу атомного ледокола;
9) объём лёгких человека;
10) площадь футбольного поля;
11) диаметр колеса самоката;
12) массу собаки;
13) урожайность пшеницы за определённый год;
14) площадь дачного участка;
15) скорость пассажирского самолёта;
16) толщину волоса;
17) объём воды, поступившей через систему водоснабжения;
18) массу сахарного песка для приготовления пирога?

(Для ответа на вопросы задачи вы можете воспользоваться данными из Интернета или справочников.)

63. Родители дали Алине 500 р. на покупку тетрадей к новому учебному году. Сколько тетрадей она сможет купить, если стоимость одной тетради составляет 26 р. 50 к.?

64. Даниле родители дали 500 р. на покупку тетрадей к новому учебному году. Узнав, что в ближайшем магазине одна тетрадь стоит 26 р. 50 к., Данила решил поехать в гипермаркет, где цена одной тетради была на 20% меньше. На сколько больше тетрадей он сможет приобрести в гипермаркете, чем в магазине?

65. Елена Владимировна, накопив деньги к 25 февраля, решила приобрести холодильник за 45 000 р. и стиральную машину за 22 000 р. В магазине до конца февраля действует скидка 10% на любую покупку, с 1 марта по 15 марта действует скидка на стиральные машины 30%, а с 16 марта по 31 марта действует скидка 15% на холодильники. Когда Елене Владимировне выгоднее всего приобрести холодильник и стиральную машину в этом магазине?

66. В новом районе предполагается построить школу. Сколько учебных кабинетов для обучающихся начальной школы надо запланировать в проекте, если в одном кабинете помещается не более 24 учащихся, а в школу после постройки должны поступить 385 детей младшего школьного возраста?

67. 6 августа Артём устроился на работу. Зарплата Артёму будет поступать на его счёт два раза в месяц: 19-го числа каждого месяца Артёму будут перечислять аванс за работу в текущем месяце в размере 36 000 р., а 5-го числа следующего месяца — оставшуюся часть денег в размере 48 000 р. В месяц Артём собирается тратить 30 000 р. на продукты и товары для дома, 11 600 р. на оплату коммунальных услуг, 2000 р. на оплату сотовой связи, 700 р. на оплату Интернета, 6400 р. на бензин, а также 10 000 р. на непредвиденные расходы. За какое наименьшее число месяцев Артём сможет накопить 500 000 р. на первоначальный взнос по ипотеке, если будет придерживаться плана расходов?

68. С помощью рулетки измерьте длину своего шага (в сантиметрах). Подсчитайте количество шагов, которые вы совершаете, преодолевая расстояние от дома до школы, и запишите время, потраченное на этот путь. Зная длину шага и количество сделанных шагов, найдите расстояние от своего дома до школы (в метрах), а также вычислите среднюю скорость, с которой вы ходите в школу. (Чтобы узнать длину своего шага, измерьте расстояние от пятки до пятки.)

69. Для привлечения клиентов София на месяц снизила цены в своём магазине на 10%. На сколько процентов Софии необходимо будет их повысить через месяц, чтобы вернуться к уровню цен, который был до снижения?

70. Алексею Петровичу необходимо покрасить в два слоя стены на застеклённом балконе шириной 800 мм, длиной 2700 мм и высотой 3200 мм. Остекление балкона и балконный блок занимают $\frac{1}{4}$ площади его стен. Сколько литровых банок краски ему нужно купить, если расход краски составляет 250 мл на 1 м^2 при покраске в один слой?

71. Роман захотел заказать новые джинсы в интернет-магазине, но забыл, что должно быть написано на этикетке, чтобы они подошли ему по росту. Тогда Роман измерил длину старых брюк по внутреннему шву, и она оказалась равной 76 см. Длина джинсов по внутреннему шву указывается на этикетке в дюймах (1 дюйм = 2,54 см) и является чётным числом. Какое число должно быть написано на этикетке подходящих Роману джинсов?

72. Мария Александровна всегда заказывала на день рождения пирог с мясом стоимостью 1500 р. в кулинарии. Но ей подарили книгу рецептов, и она решила испечь пирог с мясом самостоятельно. Используя список ингредиентов и данные таблицы, подсчитайте, на сколько рублей выгоднее оказалось испечь пирог самостоятельно. Какие ещё блюда сможет приготовить Мария Александровна из оставшихся продуктов?

Список ингредиентов для пирога с мясом

Тесто:

- молоко — 125 мл;
- сливочное масло — 80 г;
- растительное масло — 30 мл;
- сахарный песок — 20 г;
- соль — 5 г;
- сухие дрожжи — 15 г;
- пшеничная мука высшего сорта — 350 г.

Начинка:

- свинина — 700 г;
- репчатый лук — 1 шт. (130 г);
- чёрный молотый перец — 10 г;
- соль — 10 г;
- сливочное масло — 25 г;
- молоко — 150 мл;
- растительное масло (для смазки сковороды) — 15 мл.

Стоимость продуктов

Продукт	Количество	Стоимость, р.
Молоко	1 л	80
Сливочное масло	250 г	156
Растительное масло	1 л	120
Сахарный песок	1 кг	53
Соль	500 г	45
Сухие дрожжи	12 г	17
Пшеничная мука	1 кг	47
Свинина	1 кг	450
Репчатый лук	1 кг	30
Чёрный молотый перец	25 г	40

П

73. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a-3}{a^2-3a+9}-\dfrac{6a-18}{a^3+27}\right):\dfrac{5a-15}{4a^3+108}$; б) $\dfrac{ab^2-a^2b}{a+b}\cdot\dfrac{a+\dfrac{ab}{a-b}}{a-\dfrac{ab}{a+b}}$.

74. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3y-2x=10,\\7x+5y=27;\end{cases}$ б) $\begin{cases}0{,}4x-0{,}2y=0{,}4,\\x+11y=12{,}5.\end{cases}$

75. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{x}=1$; б) $\sqrt{x-4}=15$.

Контрольные вопросы и задания

1 Что такое нанометр и зептосекунда?

2 Составьте сами практико-ориентированную задачу.

Для тех, кто хочет знать больше

6. Точность представления действительных чисел в виде десятичных дробей. Число π

Рассмотрим вопросы точности представления действительных чисел в виде десятичных дробей. Любое рациональное число мы можем записать либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби. При этом всегда можно указать цифру, стоящую на любой позиции после запятой. Но для иррационального числа в общем случае без использования вычислительных средств и соответствующих математических методов это сделать невозможно. Так, например, наиболее широко используемый в наши дни 12-разрядный калькулятор даёт для числа $\sqrt{2}$ только первые 10 точных десятичных знаков (значащих цифр) после запятой.

Интересно проследить, каких успехов достигли математики и вычислительная техника в вопросе представления действительных чисел десятичными дробями на примере вычисления количества значащих цифр после запятой числа π, равного отношению длины окружности к длине её диаметра. Название числа π произошло от первой буквы греческого слова περιφερεια («окружность»). Первым это обозначение использовал английский математик Уильям Джонс, но общепринятым оно стало после того, как его (начиная с 1737 года) стал систематически употреблять Леонард Эйлер.

Укажем основные этапы в истории вычисления числа π. Эти этапы характеризуются тем, что в каждом из них найденное количество значащих цифр возрастало на порядок, т. е. от одной цифры до десятков триллионов.

Персидский математик Джамшид ал-Каши в XV веке вычислил число π с точностью до 16 знаков.

В XVII веке голландский математик Лудольф ван Цейлен вычислил 35 знаков числа π, а в 1706 году профессор астрономии лондонского Грешем-колледжа Джон Мэчин вычислил 100 его знаков.

Следует отметить, что только в 1761 году немецкий математик Иоган Генрих Ламберт доказал, что число π является иррациональным, то есть не может быть выражено никакой простой дробью. Соответственно число π является бесконечным, у него нет конца, его можно лишь вычислить с нужной степенью точности. Есть ли у этого числа какая-то внутренняя структура, неизвестная закономерность? Узнать это хотели многие.

В 1844 г. немецкий математик Иоганн Мартин Дазе нашёл 200 знаков π в течение нескольких месяцев.

В 1873 г. британский учёный Уильям Шенкс продолжил исследование Дазе, опубликовав полученное им значение π с точностью до 707 знаков, хотя, начиная с 528-го, все остальные оказались неверными. Шенкс потратил на свой труд около 20 лет. Своеобразным рекордом стало и то, что ошибка Шенкса была обнаружена только через 91 год при сравнении его значений с приближением π до 530 знаков, вычисленным Д. Ф. Фергюсоном с помощью механического калькулятора.

С появлением компьютеров изучение числа π пошло значительно быстрее.

В 1949 году Джон фон Нейман, венгеро-американский математик, на компьютере ЭНИАК вычислил 2037 знаков числа, на что ушло 70 часов.

В 1957 г. британский учёный-компьютерщик Джордж Эрик Фелтон пытался вычислить 10 000 знаков π, но из-за ошибки компьютера правильными оказались только первые 7480 знаков. Рубеж в 10 000 знаков был достигнут годом позже Франсуа Женюи с помощью компьютера IBM 704.

В 1961 г. было вычислено 100 000 знаков π с помощью компьютера IBM 7090 менее чем за 9 часов.

Рубеж в миллион знаков был преодолён в 1973 году.

В 1999 году было вычислено 206 158 430 000, в 2002 году — более 1,24 триллиона, в 2011 году — 10 триллионов, а в 2013 году — уже 12,1 триллиона цифр после запятой.

В январе 2020 года было вычислено 50 триллионов цифр и последний рекорд установлен в августе 2021 года — 62,8 триллиона цифр после запятой с помощью высокопроизводительного компьютера за 108 дней и 9 часов.

На рисунке 4 представлена диаграмма, наглядно демонстрирующая по годам значимые шаги описанных вычислений.

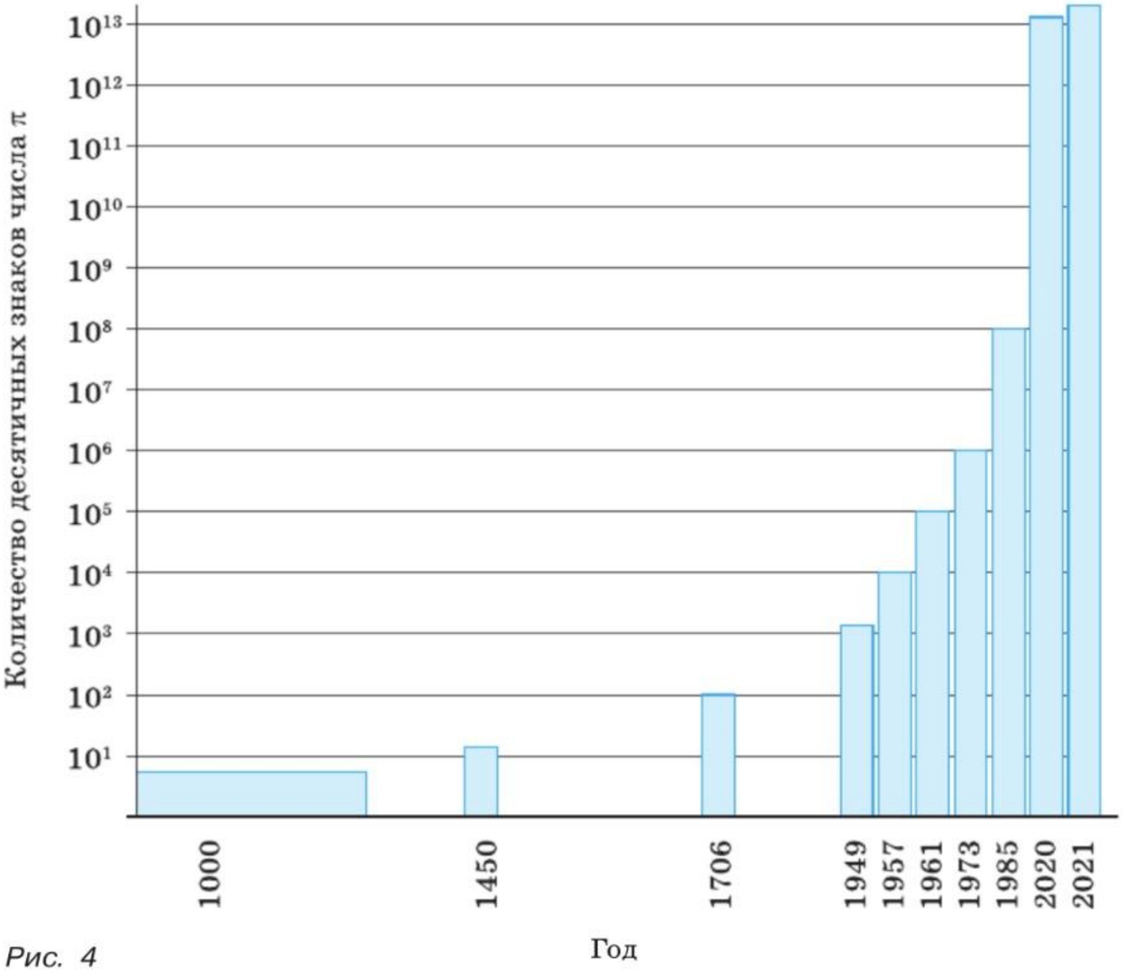


Рис. 4

Практическая ценность изучения числа π

Как вы уже успели убедиться на уроках геометрии и физики, для решения большинства задач достаточно знать первые 3 знака числа π (3,14). Но для более сложных случаев и там, где нужна бóльшая точность, необходимо знать больше, чем 3 цифры.

Ясно, что каждая известная нам десятичная цифра делает любое вычисление, связанное с числом π, более точным. Но сколько из них нам действительно нужно для достаточной точности? Легко посчитать, что когда число π округляется до 3, то относительная погрешность составляет примерно 4,51%. При использовании приближения 3,1 относительная погрешность составляет около 1,3%. Приближение 3,14 даёт ошибку примерно 0,5% от истинного значения, а значение 3,14159 отличается от истинного в пределах 0,000084%. Взяв 10 десятичных знаков 3,1415926536, можно вычислить окружность Земли с точностью менее миллиметра. А в программе, контролирующей и стабилизирующей космический корабль во время полётов, используется только 16 цифр числа π.

Какая же тогда польза от остальных 62,79 триллиона цифр? С практической точки зрения польза состоит в разработке и тестировании суперкомпьютеров и новых высокоточных алгоритмов умножения. Оптимизация вычисления числа π приводит к появлению компьютерного оборудования и программного обеспечения, которые приносят пользу во многих других сферах нашей жизни. Это наглядно показывает то, что последнее вычисление числа π было выполнено в 3,5 раза быстрее, чем предыдущее, несмотря на дополнительные 12 триллионов десятичных знаков. Этот результат по увеличению производительности суперкомпьютеров был достигнут всего за 18 месяцев. Также польза заключается в исследовании самой природы числа π. Несмотря на столетия исследований, до сих пор остаются без ответа фундаментальные вопросы о том, как ведут себя его цифры. Предполагается, что π — это «нормальное» число, то есть все возможные последовательности цифр должны встречаться одинаково часто.

Упражнения

76. Используя диаграмму на рисунке 4 и информацию из текста параграфа, заполните таблицу относительного прироста количества найденных значащих цифр после запятой в числе π для каждого столбца диаграммы в сравнении с предыдущим столбцом (результат в таблицу запишите с точностью до одной десятой).

Год	1450	1706	1949	1957	1961	1973	1985	2020	2021
Прирост									

77. Если радиус круга увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 1 см, то его площадь увеличится на π см^2. Найдите радиус круга.

78. Возьмите дома круглый предмет. Измерьте длину его окружности и диаметра. Разделите длину окружности на длину диаметра и узнайте, с какой точностью вам удалось экспериментально найти число π.

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

79. На координатной прямой отмечена точка с координатой a (рис. 5). Перечертите рисунок в тетрадь, а затем отметьте на прямой точки, координаты которых равны:

$$2a; \ -a; \ a + 1; \ a - 2.$$

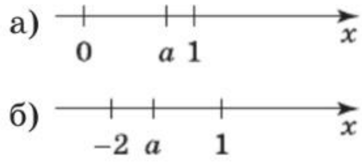


Рис. 5

80. Известно, что x и y — натуральные числа. Значения каких из выражений: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ также являются натуральными числами? Если условие не выполняется, то приведите пример.

81. Сколько целых чисел расположено между числами:

а) $-5\sqrt{6}$ и $\sqrt{83}$; в) $-5\sqrt{6}$ и $-\frac{1}{2}\sqrt{68}$;

б) $3\sqrt{3}$ и $4\sqrt{11}$; г) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$ и $\frac{6}{7}\sqrt{147}$?

82. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$; в) $(3-\sqrt{5})^2+(3+\sqrt{5})^2$;

б) $(\sqrt{24}-\sqrt{54})\cdot\sqrt{12}$; г) $(\sqrt{13}+\sqrt{8})^2$.

83. Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

а) $\sqrt{(7-4\sqrt{3})^2}-\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2}$; б) $\sqrt{(37+12\sqrt{7})^2}+\sqrt{(37-12\sqrt{7})^2}$.

84. Установите соответствие между точками, отмеченными на координатной прямой (рис. 6, *а*), и числами $\sqrt{11}$; $\frac{123}{23}$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$; $(0{,}8)^{-1}$.

85. Число a отмечено точкой на координатной прямой (рис. 6, *б*). Расположите в порядке убывания числа $a - 2$; $\frac{1}{a}$; a^2.

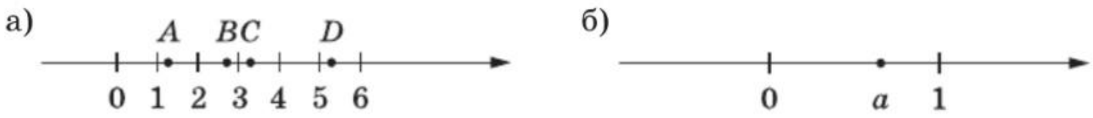


Рис. 6

86. Расположите в порядке убывания числа:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{0}$; в) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-6}$; $\frac{4}{9}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{0}$.

б) $(2{,}5)^{-3}$; $2{,}5$; $(2{,}5)^{-5}$; $(2{,}5)^{0}$;

87. Найдите $\frac{a}{b}$, если:

а) $\frac{2a+5b}{5a+2b}=1$; б) $\frac{a+2b}{b+2a}=-3$; в) $\frac{99a+8b}{4b-100a}=2$.

88. Найдите значение выражения:

а) $61a - 11b + 50$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$;

б) $\frac{a + 9b + 16}{a + 3b + 8}$, если $\frac{a}{b} = 3$;

в) $30a - 10b - 13$, если $\frac{3a - 7b + 4}{7a - 3b + 4} = 9$;

г) $\frac{a + 11b + 51}{a + b + 17}$, если $\frac{a}{b} = 4$.

89. Выясните, какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:

а) $x = 7 - 2\sqrt{15}$; б) $x = 2\sqrt{13} - 7$.

90. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение выражения:

а) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$;

б) $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$;

в) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;

д) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$;

е) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$.

91. Найдите три первых десятичных приближения (с недостатком и избытком) каждого из чисел:

а) $\frac{13}{7}$; б) $-\frac{13}{7}$; в) $\frac{5}{16}$; г) $-\frac{5}{16}$; д) $\sqrt{3}$; е) $-\sqrt{3}$.

(Задания д) и е) рекомендуется выполнять с помощью калькулятора.)

92. Используя равенства $\sqrt{2} = 1{,}414...$, $\sqrt{3} = 1{,}732...$, $\sqrt{5} = 2{,}236...$ и $\sqrt{7} = 2{,}645...$, вычислите приближённое значение данного выражения с точностью до одной десятой; до одной сотой:

а) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$;

б) $\frac{4}{11} - \sqrt{8}$;

в) $\frac{11}{9} \cdot (-\sqrt{5})$;

г) $\sqrt{2} - \frac{5}{8}$;

д) $\frac{3}{16} : \sqrt{3}$.

К параграфу 2

93. Высота полёта стрелы меняется с течением времени по закону $h(t) = -5t^2 + 45t + 2$, где h — высота в метрах, t — время, прошедшее от начала полёта, в секундах. На какой высоте над землёй будет находиться стрела через 5 секунд от начала полёта; через 10 секунд от начала полёта?

94. Масса (в кг) стального вала, имеющего цилиндрическую форму, вычисляется по формуле $m = \rho\pi R^2 l$, где ρ — плотность металла, из которого изготовлен вал, l и R — его длина и радиус соответственно (рис. 7). Найдите массу вала, изготовленного из стали плотностью 7700 кг/м^3, имеющего длину 80 см и радиус 2,5 см. При вычислениях считать, что $\pi = 3{,}14$.

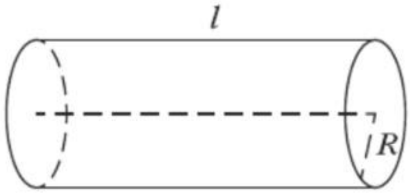


Рис. 7

95. Энергия заряженного конденсатора W (в Дж) вычисляется по формуле $W = \frac{CU^2}{2}$, где C — ёмкость конденсатора (в Ф), а U — разность потенциалов на обкладках конденсатора (в В). Найдите энергию конденсатора (в Дж) ёмкостью 10^{-3} Ф, если разность потенциалов на обкладках конденсатора равна 40 В.

96. Измерьте длину, ширину и высоту своей комнаты. Вычислите площади стен и пола. Рассчитайте, какую сумму нужно потратить на покупку обоев и ламината для вашей комнаты. Данные по стоимости и размерам обоев и ламината возьмите из задачи 1 пункта 5 на с. 20.

97. Евгения Владимировна хочет купить двухкомнатную квартиру в новом шестиэтажном доме. В доме 4 подъезда и 120 квартир. В каждом подъезде и на каждом этаже одинаковое количество квартир. В агентстве ей дали план придомовой территории (рис. 8). Сторона каждой клетки на плане 5 м.

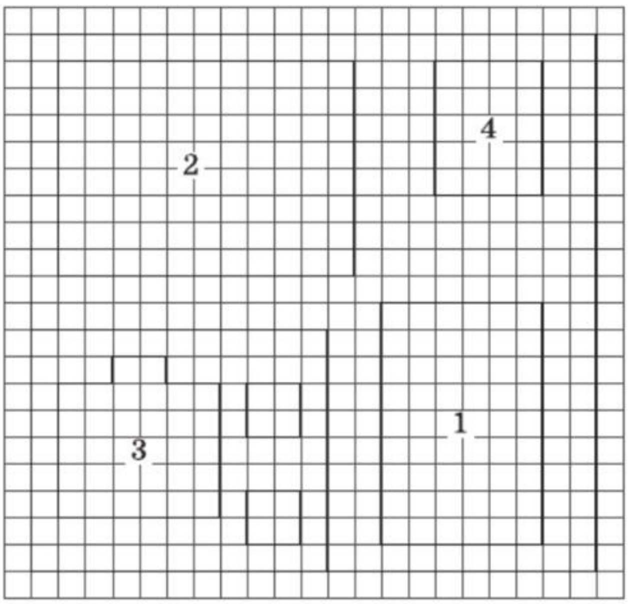


Рис. 8

У Евгении Владимировны двое маленьких детей, поэтому, прочитав описание, она сразу обратила внимание на обнесённый забором детский сад рядом с домом, а также на спортивную площадку, расположенную справа от детского сада и обозначенную на плане цифрой 1. Цифрой 4 на плане обозначен участок прямоугольной формы шириной 20 м под парковку для автомобилей.

1) Какой объект на плане обозначен цифрой 2 и какой — цифрой 3?
2) Какова площадь территории детского сада?
3) Евгении Владимировне предложили к просмотру квартиру 73. В каком подъезде и на каком этаже расположена эта квартира?
4) Минимальный размер машино-места для легкового автомобиля на парковке с учётом допустимых зазоров безопасности для легкового автомобиля составляет 5,3 на 2,5 м. Также обязателен проезд между рядами 6 м. Какое наибольшее количество автомобилей можно разместить на парковке, которая будет построена на участке, указанном в плане?
5) За какое наименьшее количество лет Евгения Владимировна сможет отдать ипотечный кредит на квартиру в размере 2 000 000 р., если погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов, ставка по кредиту составляет 10% годовых, а ежегодные выплаты не должны превышать 500 000 р.?

Глава II ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Во многих науках изучают зависимости между величинами. Для описания этих реальных зависимостей на математическом языке служит понятие функции. В курсе алгебры 7 класса вы познакомились с этим важным математическим понятием, узнали некоторые свойства функций, рассмотрели её частные виды. В этой главе сведения о функциях будут расширены. Основное внимание будет уделено квадратичной функции, будут рассмотрены её график и свойства. С этой функцией вы уже знакомились на уроках физики, например формула $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$ задаёт квадратичную функцию. Вы узнаете также о свойстве параболоида — тела, которое получается при вращении параболы вокруг её оси. Вас, вероятно, заинтересует легенда о том, как использовал свойство параболоида древнегреческий учёный Архимед (III век до н. э.) при защите Сиракуз. При изучении свойств квадратичной функции рекомендуем использовать компьютер.

§3 ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

7. Свойства чётности и нечётности функций

Напомним, что *функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.* Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то коротко это записывается так: $y = f(x)$ (заметим, что символом $f(x)$ обозначают также значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x). Все значения независимой переменной образуют *область определения функции*, а значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество значений функции*. Область определения и множество значений функции $y = f(x)$ обозначают соответственно $D(f)$ и $E(f)$.

Вы узнали также такие свойства функции, как наличие у неё нулей, сохранение знака на промежутке (промежутки знакопостоянства), возрастание или убывание (промежутки монотонности), существование наибольшего и наименьшего значений.

О некоторых свойствах функции можно узнать по её графику. Рассмотрим, например, график функции $y = f(x)$, изображённый на рисунке 9.

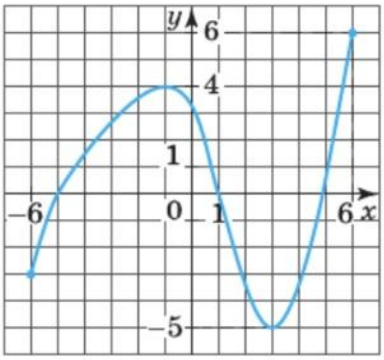


Рис. 9

Спроецировав график на ось x, получим отрезок $[-6; 6]$. Следовательно, $D(f) = [-6; 6]$.

График пересекает ось x в точках, абсциссы которых равны -5; 1; 5. Числа -5; 1; 5 — нули функции.

Нули разбивают область определения функции на четыре промежутка: $[-6; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; 5)$ и $(5; 6]$. По графику легко определить знак функции на каждом из этих промежутков. Мы видим, что на промежутках $(-5; 1)$ и $(5; 6]$ значения функции положительны, а на промежутках $[-6; -5)$ и $(1; 5)$ её значения отрицательны.

Далее находим, что на промежутках $[-6; -1]$ и $[3; 6]$ функция возрастает, а на промежутке $[-1; 3]$ функция убывает. Наибольшее значение функция $y = f(x)$ принимает в точке $x = 6$, а наименьшее — в точке $x = 3$. Спроецировав график на ось y, получим отрезок $[-5; 6]$. Значит, $E(f) = [-5; 6]$.

Познакомимся теперь с новыми свойствами функции — *чётностью и нечётностью*.

Рассмотрим рисунок 10, на котором изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Из рисунка видно, что график симметричен относительно оси y. Эта особенность графика является отражением свойства функции, которое называется *чётностью*.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется чётной, если выполняются следующие условия:
— область определения функции симметрична относительно оси ординат;
— противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции.

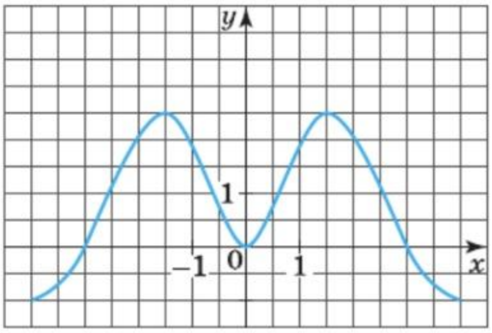


Рис. 10

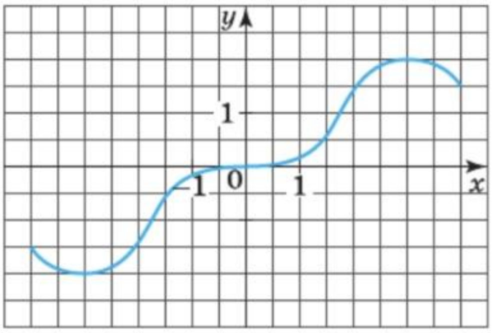


Рис. 11

Таким образом, функция $y = f(x)$ является чётной, если для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

На рисунке 11 изображён график функции $y = \varphi(x)$, симметричный относительно начала координат.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется нечётной, если выполняются следующие условия:
- — область определения функции симметрична относительно начала координат;
- — противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Таким образом, функция $y = \varphi(x)$ — нечётная, если для любого $x \in D(\varphi)$ справедливо равенство $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Простейшим примером чётной функции является функция, заданная формулой $y = x^2$, а нечётной — заданная формулой $y = x^3$.

Очевидно, что функция может не обладать ни свойством чётности, ни свойством нечётности. Например, линейная функция $y = kx + b$, где $k \neq 0$ и $b \neq 0$ этими свойствами не обладает.

Упражнения

98. Перечислите свойства функции, график которой изображён на:
а) рисунке 12; б) рисунке 13.

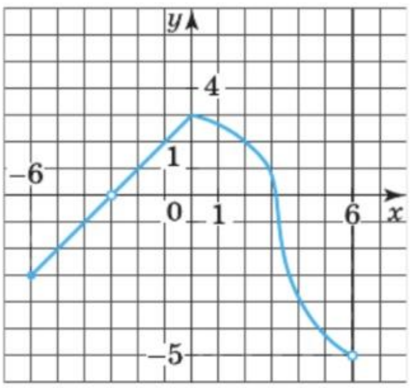


Рис. 12

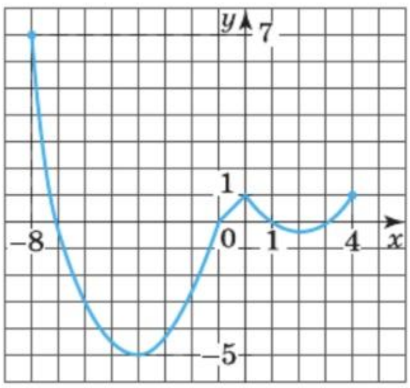


Рис. 13

99. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + 3x - 25$; в) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$;

б) $y = \sqrt{5 - 3x}$; г) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$.

100. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{5}{|x - 1|}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 2}$.

101. Найдите нули функции $y = f(x)$, если:

а) $y = 7x^2 - 6x - 1$; в) $y = \dfrac{2x + 3}{9 - 4x^2}$;

б) $y = \sqrt{7 - 14x}$; г) $y = \dfrac{5x - 1}{x^2 + 16}$.

102. Найдите нули функции $y = f(x)$, если:

а) $y = \dfrac{|x| - 3}{|x + 3|}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{3 - 2x}}{x + 5}$.

103. Докажите, что функция, заданная формулой $y = f(x)$, является чётной, если:

а) $f(x) = 6 - 5x^2 + x^4$; б) $f(x) = 5|x|$.

104. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечётной, если:

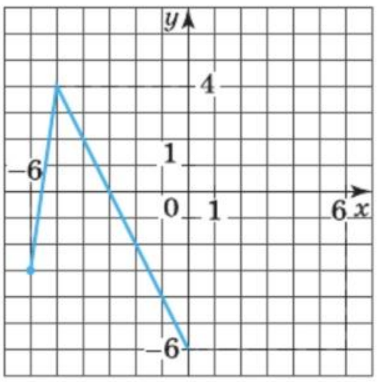
а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; б) $f(x) = 2x^3 - x$.

105. Определите, является ли функция $y = f(x)$ чётной или нечётной, если:

а) $f(x) = \dfrac{5}{x}$; в) $f(x) = x^3 - x$;

б) $f(x) = 5 - 3x^2$; г) $f(x) = 1 - |x|$.

106. Известно, что функция $y = f(x)$, заданная на отрезке, симметричном относительно начала координат, является чётной. На рисунке 14, *а*, *б* изображена только часть её графика. Достройте график этой функции, перечертив рисунок в тетрадь.

а) 

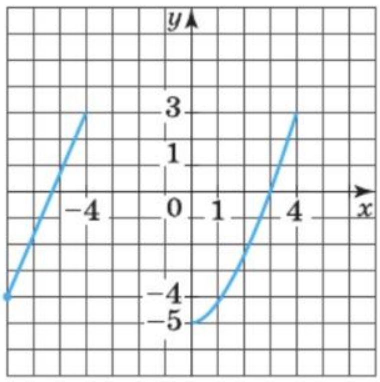
б) 

Рис. 14

107. Известно, что функция $y = f(x)$, заданная на отрезке, симметричном относительно начала координат, является нечётной. На рисунке 15, *а*, *б* изображена только часть её графика. Достройте график этой функции, перечертив рисунок в тетрадь.

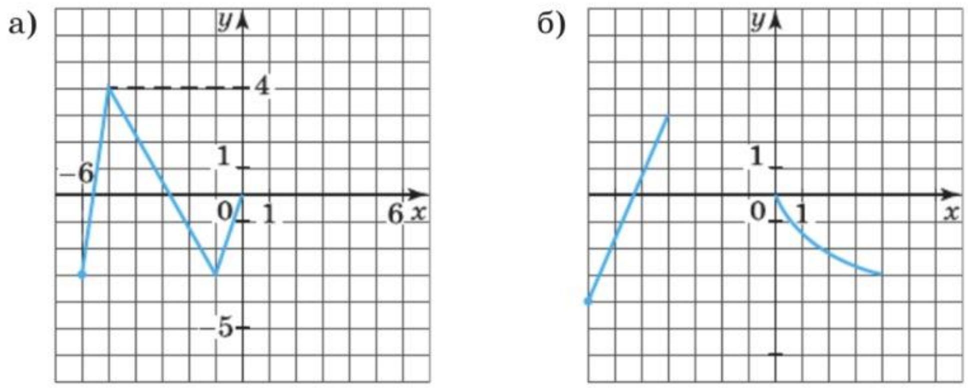


Рис. 15

108. Задайте формулой:

а) чётную функцию;

б) нечётную функцию;

в) функцию, которая не является ни чётной, ни нечётной.

Ответ обоснуйте.

109. Найдите координаты точек пересечения графиков функций, не выполняя построений:

а) $y = 0{,}4x + 3$ и $y = 5 - 0{,}6x$;

б) $y = \frac{1}{3}x + 11$ и $y = -\frac{2}{9}x + 4$.

110. Решите уравнение:

а) $x^2 + 2x - 15 = 0$;

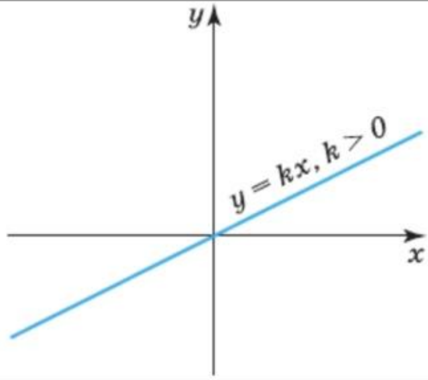
б) $2x^2 - x - 3 = 0$;

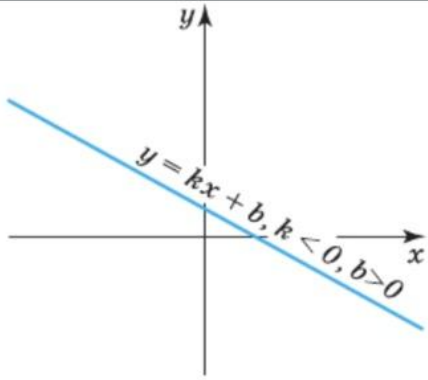
в) $3x^2 - 22x + 7 = 0$;

г) $3x^2 + 6x + 10 = 0$.

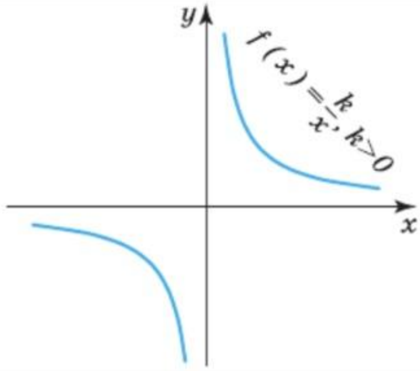
8. Графики и свойства некоторых видов функций

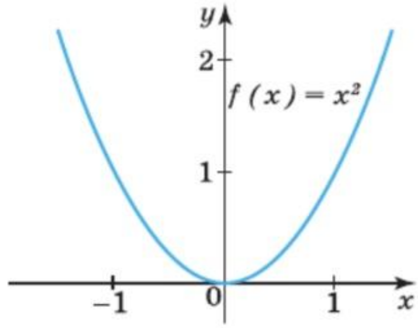
Рассмотрим некоторые из ранее изученных функций и укажем свойства, которыми они обладают.

Функция $f(x) = kx,\ k > 0$		
1	Область определения	Множество всех чисел, т. е. $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	Множество всех чисел, т. е. $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$
5	Промежутки монотонности	Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Нечётная

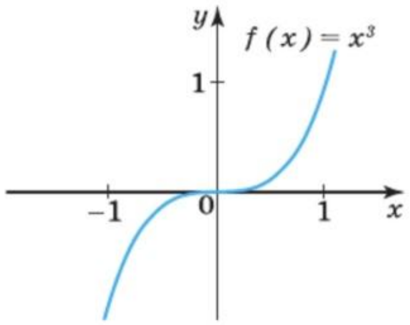
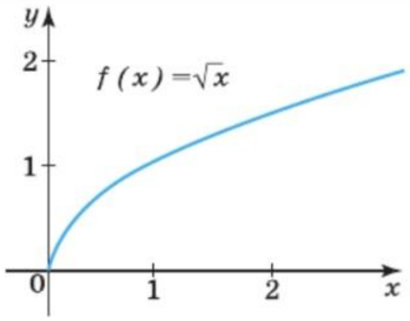
Функция $f(x) = kx + b,\ k < 0,\ b > 0$		
1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = (-\infty;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = -\frac{b}{k}$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$; $f(x) < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Не является ни чётной, ни нечётной

Продолжение

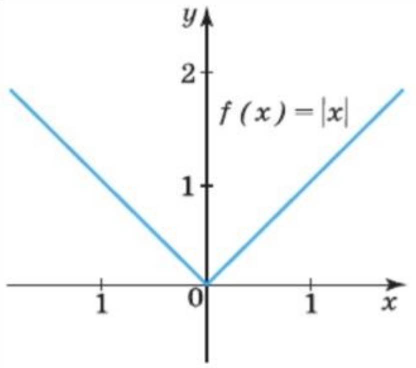
Функция $f(x) = \frac{k}{x},\ k > 0$		
1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, или иначе: $x \neq 0$
2	Множество значений	$E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, или иначе: $y \neq 0$
3	Нули функции	Не имеет
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Нечётная

Функция $f(x) = x^2$		
1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = [0;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x \neq 0$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty;\ 0]$, возрастает на $[0;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	При $x = 0$ принимает наименьшее значение, равное нулю
7	Чётность/нечётность	Чётная

Продолжение

Функция $f(x) = x^3$		
1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = (-\infty;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$
5	Промежутки монотонности	Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Нечётная
Функция $f(x) = \sqrt{x}$		
1	Область определения	$D(f) = [0;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = [0;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$
5	Промежутки монотонности	Возрастает на $[0;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	При $x = 0$ принимает наименьшее значение, равное нулю
7	Чётность/нечётность	Не является ни чётной, ни нечётной

Окончание

Функция $f(x) = \lvert x\rvert$		
1	Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = [0; +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; или иначе: $x \neq 0$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	При $x = 0$ принимает наименьшее значение, равное 0
7	Чётность/нечётность	Чётная

Упражнения

111. Изобразите схематически графики функций $y = kx$, где $k < 0$, и $y = kx$, где $k > 0$. Запишите свойства функции в каждом случае.

112. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $y = -3x + 1$; г) $y = \dfrac{1}{2x}$;

б) $y = 5 + 2x$; д) $y = -x^2$;

в) $y = -\dfrac{3}{x}$; е) $y = -x^3$.

113. Используя график функции $y = x^3$, решите уравнение:

а) $x^3 = x + 1$; б) $x^3 = 2x$; в) $x^3 = 2x + 1$.

114. Постройте по точкам график функции и опишите её свойства:

а) $y = x^2 + 1$; б) $y = -x^2 + 4$.