788. В арифметической прогрессии третий член равен 150, а тринадцатый член равен 110. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, сложили, если их сумма оказалась равной нулю?

789. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:
а) x_1, если $x_8 = -128$ и $q = -4$; б) q, если $x_1 = 162$ и $x_9 = 2$.

790. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_1 = 6$ и $b_3 = \frac{2}{3}$.

791. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_6 = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$.

792. Пятый член геометрической прогрессии (b_n) равен $1\frac{1}{2}$, а знаменатель прогрессии равен $-\frac{1}{2}$. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

793. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что все члены последовательности положительны и $b_3 = 20$, а $b_5 = 80$.

794. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите первые три члена этой прогрессии, если известно, что $b_1 + b_2 = 30$, а $b_2 + b_3 = 20$.

795. В геометрической прогрессии (b_n), знаменатель которой положителен, $b_1 \cdot b_2 = \frac{1}{27}$, а $b_3 \cdot b_4 = 3$. Найдите сумму первых четырёх членов этой прогрессии.

Неравенства

796. Оцените периметр P и площадь S прямоугольника, длины сторон которого a см и b см, если $14{,}3 \leqslant a \leqslant 14{,}4$ и $25{,}1 \leqslant b \leqslant 25{,}2$.

797. Пользуясь тем, что $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ и $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените значение выражения:
а) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; в) $\sqrt{35}$.

798. Решите неравенство:
а) $0{,}3(2m - 3) < 3(0{,}6m + 1{,}3)$;
б) $1{,}1(5x - 4) > 0{,}2(10x - 43)$;
в) $10 - 5(0{,}3a - 0{,}2) \geqslant 5 - 10(0{,}1a + 0{,}2)$;
г) $3{,}2(2b + 1) + 5{,}7 \leqslant 7{,}3 - 1{,}6(3 - 5b)$;
д) $4{,}3x - \frac{1}{2}(2{,}8x - 0{,}6) > \frac{1}{3}(3x + 0{,}6) + 2{,}9x$;
е) $\frac{2}{5}(5{,}5m - 2) - 0{,}8m < 4{,}6m - \frac{3}{4}(3{,}6m - 1{,}6)$;

ж) $(2{,}1y + 2)(0{,}2y - 3) - (0{,}7y - 1)(0{,}6y + 4) \geqslant -83$;
з) $(1 - 3{,}6a)(0{,}2a + 3) + (4 + 0{,}9a)(0{,}8a + 10) \leqslant 42{,}2$.

799. Решите неравенство:

а) $\dfrac{4{,}2 + 2x}{3} > 1{,}5x - 1{,}1$;

б) $2{,}3a + 0{,}8 < \dfrac{5{,}8a + 3{,}4}{2}$;

в) $\dfrac{0{,}5 - 5y}{6} \geqslant \dfrac{0{,}6 - 5y}{4}$;

г) $\dfrac{0{,}6m + 1{,}2}{12} \leqslant \dfrac{1{,}5m - 2{,}5}{15}$;

д) $\dfrac{1{,}3a - 0{,}7}{4} - \dfrac{0{,}9a + 0{,}3}{3} > 0$;

е) $\dfrac{1{,}6 - 0{,}3y}{2} + \dfrac{4{,}4 + 1{,}5y}{5} < -4{,}05y$.

800. При каких значениях b:

а) значение дроби $\dfrac{12 - 1{,}5b}{5}$ меньше соответствующего значения дроби $\dfrac{11 - 0{,}5b}{2}$;

б) значение дроби $\dfrac{1{,}4 + b}{4}$ больше соответствующего значения дроби $\dfrac{2{,}6 + 3b}{2}$;

в) значение дроби $\dfrac{6b - 1}{b}$ не превосходит соответствующее значение дроби $\dfrac{16 - 2b}{9 - b}$?

801. Решите двойное неравенство:

а) $-2 < \dfrac{4x - 1}{5} < 2$;

б) $0{,}2 \leqslant \dfrac{1 - 5x}{20} \leqslant 0{,}4$.

802. Решите неравенство:

а) $(5 - 2x)(\sqrt{6} - 3) < 0$;

б) $(4 - \sqrt{10})(3x + 1) > 0$;

в) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 + 7x} < 0$;

г) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{4 + 5x} > 0$.

803. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1, \\ 2x + 3 < 18 - 3x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4y + 5 > y + 17, \\ y - 1 > 2y - 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12y - 1 < 3 - 2y, \\ 5y < 2 - 11y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 8x + 1 > 5x - 1, \\ 9x + 9 < 8x + 8. \end{cases}$

804. Решите систему трёх неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + 5 > 3x - 1, \\ \dfrac{x}{3} > -1, \\ 10x < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x > x - 10, \\ 2x - 4 < 0, \\ 2x + 1 > x + 4. \end{cases}$

805. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 3(x+1) < x + 8, \\ 6x(x-1) - (2x+2)(3x-3) > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10(x-1) - 5(x+1) > 4x - 11, \\ x^2 - (x+2)(x-2) < 3x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7 - 3x - 4(3 - 1{,}5x) < 0, \\ -6(1 + 2{,}5x) - 10x - 4 > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(1{,}5x - 1) - (x+4)(x+4) \geqslant 0, \\ -(2-x) - 0{,}75x \leqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - \dfrac{4x-1}{3} < 10, \\ 4x - 1 - \dfrac{x}{3} < 10; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3y - \dfrac{2y+1}{2} > 4 - \dfrac{2-y}{3} - y, \\ \dfrac{5y-1}{3} - (y-1) > 3y. \end{cases}$

806. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} (3x+2)^2 \geqslant (3x-1)(3x+1) - 31, \\ (2x-3)(8x+5) < (4x-3)^2 - 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (5x-2)^2 + 36 > 5x(5x-3), \\ 3x(4x+2) + 40 \leqslant 4x(3x+7) - 4. \end{cases}$

807. Решите двойное неравенство:

а) $-5 < \dfrac{4m-3}{3} < 7$;

б) $3 \leqslant \dfrac{1-2x}{5} \leqslant 11$;

в) $-11 < \dfrac{2-3p}{2} \leqslant -8$;

г) $-0{,}2 \leqslant \dfrac{5x+2}{4} \leqslant 2$.

808. При каких значениях переменной x:

а) значения двучлена $0{,}5 - 0{,}2x$ принадлежат промежутку $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$;

б) значения дроби $\dfrac{20x+40}{3}$ принадлежат промежутку $[-100; 100]$?

809. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 15 < 0$;

б) $5x^2 - 11x + 2 \geqslant 0$;

в) $10 - 3x^2 \leqslant 5x - 2$;

г) $(2x+3)(2-x) > 3$;

д) $2x^2 - 0{,}5 \leqslant 0$;

е) $3x^2 + 3{,}6x > 0$;

ж) $(0,2 - x)(0,2 + x) < 0$;
з) $x(3x - 2,4) > 0$;
и) $x^2 - 0,5x - 5 < 0$;
к) $x^2 - 2x + 12,5 > 0$.

810. Решите неравенство:

а) $(2x + 1)(x + 4) - 3x(x + 2) < 0$;
б) $(3x - 2)^2 - 4x(2x - 3) > 0$;
в) $(1 - 6x)(1 + 6x) + 7x(5x - 2) > 14$;
г) $(5x + 2)(x - 1) - (2x + 1)(2x - 1) < 27$;
д) $(2x - 1)(1 + 2x) - x(x + 4) < 6$;
е) $(3x - 1)x - (6 - x)(x + 6) < 37$.

811. Докажите, что при любых x:

а) трёхчлен $x^2 - 3x + 200$ принимает положительные значения;
б) трёхчлен $-x^2 + 22x - 125$ принимает отрицательные значения;
в) трёхчлен $x^2 - 16x + 64$ принимает неотрицательные значения;
г) трёхчлен $10x - x^2 - 25$ принимает неположительные значения.

812. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leqslant 0, \\ 2x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ 2x - 9 \leqslant 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \\ 3 - x \leqslant 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x^2 + 2x \geqslant 0, \\ 5x \geqslant 0. \end{cases}$

813. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 15 \geqslant 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 + 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 8 \leqslant 0. \end{cases}$

814. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{12x - 4}$;
б) $\sqrt{3 - 0,6x}$;
в) $\sqrt{15 + 2x - x^2}$;
г) $\sqrt{2x^2 + x - 6}$;
д) $\sqrt{12 - 5x} + \sqrt{2x - 1}$;
е) $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{3x - 17}$?

815. Найдите область определения каждого из выражений:

а) $2x - 5$, $\dfrac{1}{2x - 5}$ и $\sqrt{2x - 5}$;

б) $2x^2 + 7x - 4$, $\dfrac{1}{2x^2 + 7x - 4}$ и $\sqrt{\dfrac{1}{2x^2 + 7x - 4}}$;

в) $x^2 + 1$, $\sqrt{x^2 + 1}$ и $\dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Функции

816. Функция $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-4; 5]$, задана графиком (рис. 73). Каково множество значений функции? Найдите $f(-3)$, $f(-1{,}5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3{,}5)$. Найдите координаты точек, в которых график функции пересекает оси координат.

817. Найдите по графику функции $y = f(x)$ (рис. 73) значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$.

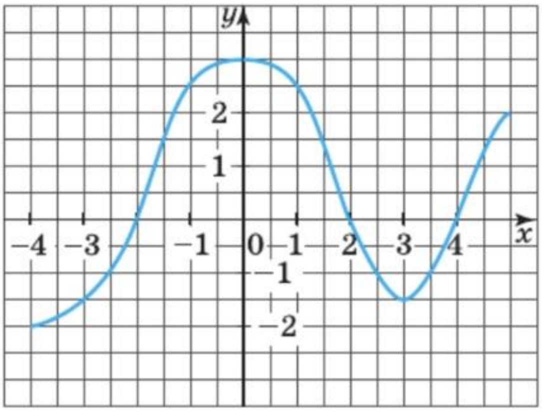

Рис. 73

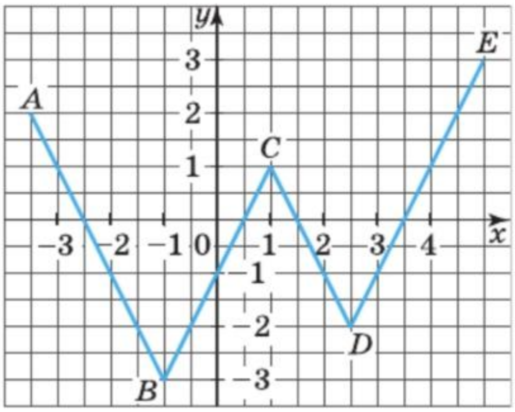

Рис. 74

818. Ломаная $ABCDE$ является графиком функции $y = f(x)$ (рис. 74). На каких промежутках эта функция принимает положительные значения и на каких — отрицательные?

819. Постройте график функции:

а) $y = -2{,}5x$; г) $y = -x + 4$;

б) $y = 2x - 3$; д) $y = \frac{1}{2}x + 3$;

в) $y = -5$; е) $y = \frac{2 - x}{4}$.

820. Функция $y = f(x)$ задана формулой $y = \frac{6 - 2x}{3}$. При каких значениях аргумента x:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) < 0$; в) $f(x) \geqslant 0$?

Постройте график этой функции.

821. Какие из линейных функций $y = -3x + 9$, $y = 5x$, $y = -7$, $y = 9x - 1$, $y = -x - 100$, $y = 1 + 5x$ являются:

а) возрастающими; б) убывающими?

822. Каково взаимное расположение графиков линейных функций:

а) $y = 7x + 16$ и $y = 7x - 25$;
б) $y = 3{,}5x - 4$ и $y = -5x - 4$;
в) $y = -2{,}8x$ и $y = -2{,}8x + 11$;
г) $y = 0{,}6x + 8$ и $y = -0{,}6x$?

В каждом случае изобразите схематически графики этих линейных функций.

823. Функция задана формулой $y = -x^2 + 3$. Какова область определения этой функции? Найдётся ли такое значение аргумента, при котором значение этой функции равно -1; 1; 5? Постройте график этой функции и укажите множество её значений.

824. Постройте график функции $y = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$. При каких значениях x значение y равно нулю; больше нуля; меньше нуля? На каком промежутке эта функция возрастает и на каком промежутке убывает? Каково наибольшее значение этой функции?

825. Постройте график функции $y = x^2 - 4x - 5$. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения? Какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 4$?

826. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 2$; в) $y = x^2 - 4x$; д) $y = x^2 + x - 6$;
б) $y = -x^2 + 1{,}5$; г) $y = 1{,}5x^2 + 6x$; е) $y = 3x^2 - 6x + 5$.

В каждом случае укажите наименьшее (или наибольшее) значение функции.

827. На каком промежутке возрастает и на каком убывает квадратичная функция:

а) $y = 2x^2 + 10x - 7$; в) $y = 4x^2 + 2x$;
б) $y = -3x^2 + x + 5$; г) $y = 3x - 5x^2$?

828. Постройте график функции:

а) $y = \frac{8}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$.

В каждом случае укажите значения x, при которых $y > 0$; $y < 0$.

829. Изобразите схематически график функции:

а) $y = ax + 5$ при $a < 0$; д) $y = ax^2 - 3$ при $a > 0$;
б) $y = 10x + b$ при $b > 0$; е) $y = ax^2 + 2$ при $a < 0$;
в) $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$; ж) $y = ax^2 + bx$ при $a > 0$, $b > 0$;
г) $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$; з) $y = ax^2 + bx$ при $a < 0$, $b > 0$.

830. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2x - 11$ и $y = -5x + 3$;
б) $y = -3x - 10$ и $y = x^2 - 13x + 6$;

в) $y = -3x^2 + x - 3$ и $y = -x^2 + x - 5$;
г) $y = 4x^2 + 3x + 6$ и $y = 3x^2 - 3x - 3$.

831. Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = 2x - 4$:

а) относительно оси y;
б) относительно оси x;
в) относительно начала координат.

832. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$.

833. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x^2 + 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2 + x, \text{ если } x \leqslant -1, \\ 1, \text{ если } -1 < x \leqslant 1, \\ 2 - x, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 1, \\ -x^2 + 2x + 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

834. Пересекаются ли парабола $y = x^2 - 6x$ и прямая $y - 8x = 0$? Если да, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте ответ с помощью схематического рисунка.

835. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = x^2 - 10x - 17$; б) $g(x) = \dfrac{1}{|x| - x}$.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

836. Найдите корни многочлена

$$2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4.$$

837. Если в многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ вместо a, b, c и d подставлять числа -7, 4, -3 и 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной, например: $-7x^3 + 4x^2 - 3x + 6$, $4x^3 - 7x^2 + 6x - 3$ и т. д. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень.

838. Докажите, что многочлен $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9$ не имеет отрицательных корней.

839. При каком значении a сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $x^2 - (a - 2)x - a - 1$ принимает наименьшее значение?

840. Докажите, что при любых значениях a, b и c график функции $y = (x - a)(x - b) - c^2$ имеет хотя бы одну общую точку с осью x.

841. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 3|x| - 2$; б) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - x\right| - 4$.

842. Найдите координаты общих точек оси x и графика функции $y = x^2 - 4x + |2x - 8|$.

843. При каком значении a графики функций $y = x^2 - 7x + a$ и $y = -3x^2 + 5x - 6$ имеют единственную общую точку? Найдите её координаты.

844. Докажите, что многочлен $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ не принимает отрицательных значений.

845. При каких значениях m квадратный трёхчлен

$$mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

принимает только отрицательные значения?

846. Найдите множество значений функции $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

847. Сумма квадратов корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 1,75. Найдите x_1 и x_2.

848. Найдите все значения a, при которых один из корней уравнения $x^2 - 3{,}75x + a^3 = 0$ является квадратом другого.

849. При каком значении m корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ принадлежат интервалу $(-2;\ 4)$?

850. При каких значениях a биквадратное уравнение

$$x^4 + ax^2 + a - 1 = 0$$

имеет только два различных корня?

851. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x + y)(8 - x) = 10,\\(x + y)(y + 5) = 20.\end{cases}$$

852. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x^2 + y^2)(x - y) = 447,\\xy(x - y) = 210;\end{cases}$ б) $\begin{cases}xy(x + y) = 30,\\x^3 + y^3 = 35.\end{cases}$

853. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^3 - y^3 = 19(x - y),\\x^3 + y^3 = 7(x + y).\end{cases}$$

854. Найдите все решения системы

$$\begin{cases}x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12,\\x + xy + y = 0.\end{cases}$$

855. Решите уравнение $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 4$.

856. Решите уравнение $(x^2 + x)^4 - 1 = 0$.

857. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3,\\xy = 8.\end{cases}$$

858. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 4{,}25,\\x + y = 130.\end{cases}$$

859. Знаменатель обыкновенной дроби меньше квадрата её числителя на 1. Если числитель и знаменатель этой дроби увеличить на 2, то значение дроби станет больше $\frac{1}{4}$, а если числитель и знаменатель уменьшить на 3, то значение дроби станет меньше $\frac{1}{10}$. Найдите такие дроби.

860. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ y + yz + z = 11, \\ z + zx + x = 7. \end{cases}$$

861. Найдите значение m, при котором корни уравнения

$$x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$$

образуют арифметическую прогрессию.

862. Докажите, что при любом a выполняется неравенство

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} \leqslant 3.$$

863. За сколько часов может выполнить работу каждый из трёх рабочих, если производительность труда третьего рабочего равна полусумме производительностей труда первого и второго? Известно, что если бы один третий рабочий проработал 48 ч, то для окончания работы одному первому потребовалось бы 10 ч, а одному второму — 15 ч.

864. Существует ли такое двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр даёт в частном 2 и в остатке 6, а при делении на произведение цифр даёт в частном 4 и в остатке 6?

865. Последовательности (y_n) и (x_n) заданы формулами $y_n = n^2$ и $x_n = 2n - 1$. Если выписать в порядке возрастания все их общие члены, то получится последовательность (c_n). Напишите формулу n-го члена последовательности (c_n).

866. При каких значениях n члены последовательности, заданной формулой

$$x_n = (n + 4)(n - 5),$$

удовлетворяют условию

$$-18 \leqslant x_n \leqslant 360?$$

867. Найдите сумму первых n членов последовательности (x_n), если

$$x_n = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}.$$

868. В последовательности (x_n) каждый член с нечётным номером равен $2a$, а с чётным равен $2b$. Напишите формулу n-го члена этой последовательности.

869. Известно, что $y = f(x)$ — линейная функция и x_1, x_2, x_3, ... — арифметическая прогрессия. Докажите, что последовательность $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... является арифметической прогрессией.

870. В арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, состоящей из целых чисел, наибольший член равен сумме квадратов остальных членов. Найдите члены этой прогрессии.

871. Пусть a_1, a_2, ... — арифметическая прогрессия с положительными членами. Докажите, что сумма первых n членов последовательности (x_n), где $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, равна $\dfrac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

872. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию.

873. Три различных целых числа составляют геометрическую прогрессию. Их сумма равна -3. Найдите эти числа.

874. Три целых числа составляют арифметическую прогрессию, первый член которой 1. Если ко второму члену прибавить 3, а третий возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

875. Докажите, что при любом натуральном значении $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{2} < \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}} < 1.$$

876. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$; б) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

877. Докажите, что если $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, то $x = y = z$.

878. Решите уравнение с двумя переменными

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{y} + 7 = 0.$$

879. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + z = 8, \\ xy = -z^2. \end{cases}$$

880. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

881. Докажите, что при положительных значениях a, b и c верно неравенство $\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)}{abc} \geqslant 27$.

882. Найдите при любом натуральном n значение выражения

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\ldots+n\cdot 3n\cdot 9n}}.$$

883. Докажите, что значение выражения

$$(5+10^{n+1})(1+10+\ldots+10^n)+1$$

при любом натуральном n можно представить в виде квадрата натурального числа.

884. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое после умножения на 21 станет квадратом натурального числа.

885. Трёхзначное число x, кратное 5, можно представить в виде суммы куба и квадрата одного и того же натурального числа. Найдите число x.

886. Взяли два различных натуральных числа. Эти числа сложили, перемножили, вычли из большего данного числа меньшее и разделили большее на меньшее. Оказалось, что сумма всех четырёх результатов равна 441. Найдите эти числа.

887. Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 45.

888. Докажите, что не существует натурального числа, которое от перестановки первой цифры в конец числа увеличилось бы в 5 раз.

889. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(65+x)^2}+4\sqrt[3]{(65-x)^2}-5\sqrt[3]{65^2-x^2}=0.$$

890. Постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $xy^2 < x$;
б) $y^2 - x^2y + 2x^2 > 2y$;
в) $x^3 + xy^2 - 4x \leqslant 0$;
г) $x^2y + y^3 - y \geqslant 0$.

891. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

а) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ |x|\geqslant 1; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9, \\ |y|\geqslant 2. \end{cases}$

892. Изобразите множество решений неравенства:

а) $y \leqslant \frac{10}{|x|}$;   в) $|y| - x^2 + 2x \leqslant 1$;

б) $y + \left|\frac{8}{x}\right| \geqslant 0$;   г) $|y| + x^2 - 4x \geqslant 4$.

893. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $x^2 + y^2 - 6|x| + 2y \leqslant -1$;   б) $x^2 + y^2 - 6x + 2|y| \leqslant -1$.

894. Закрасьте на координатной плоскости фигуру, которая задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} y - 4 \leqslant x^2 - 4|x|, \\ 4x - 3y \leqslant -12. \end{cases}$$

Охарактеризуйте её аналитически.

895. Изобразите множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ |x| + |y| \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ |y| - |x| \leqslant 0. \end{cases}$

896. Окружность с центром в начале координат проходит через точку (30; 40). Она разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на внутреннюю и внешнюю области. Напишите неравенство, графиком которого является:

а) внутренняя область;   б) внешняя область.

897. Найдите корни уравнения $x^3 - 2x^2 + 3x - 18 = 0$.

898. Докажите, что не имеет решений уравнение:

а) $4x^2 + 4xy + y^2 + 1 = 0$;   в) $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$;

б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2 = 0$;   г) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$.

899. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $y - x = a$ имеет одно решение; имеет два решения; не имеет решений. При каком наименьшем по модулю значении параметра a система уравнений имеет одно решение?

900. Найдите все целые решения уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 3$;   б) $x^2 - y^2 = 4$;   в) $x^2 - \frac{3}{y^2} = 1$;   г) $\frac{4}{x^2} + y^2 = 6$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

О функциях

Ещё задолго до того, как сформировались общие понятия переменной величины и функции, они фактически использовались в математике. Значительную роль в развитии этих понятий сыграл метод координат, созданный французскими математиками Р. Декартом (1596—1650) и П. Ферма (1601—1665). Метод координат стал широко использоваться для графического исследования функций и графического решения уравнений. С этого времени начался новый этап, который ознаменовался мощным развитием не только математики, но и всего естествознания.

Термин «функция» ввёл немецкий математик Г. Лейбниц (1646—1716). У него функция связывалась с графиком.

С именами Л. Эйлера (1707—1783) и И. Бернулли (1667—1748) связано понимание функции как аналитического выражения, т. е. выражения, образованного из переменных и чисел с помощью тех или иных математических операций. В это время были исследованы важные классы функций, которые рассматриваются в одной из ведущих областей математики — математическом анализе.

У Л. Эйлера появился и более общий подход к понятию функции как зависимости одной переменной величины от другой. Эта точка зрения получила дальнейшее развитие в трудах русского математика Н. И. Лобачевского (1792—1856), немецкого математика П. Дирихле (1805—1859) и других учёных. В результате функцию стали рассматривать как соответствие между числовыми множествами: переменная y есть функция переменной x (на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$), если каждому значению x соответствует определённое значение y, причём безразлично, каким образом установлено это соответствие — формулой, графиком, таблицей либо просто словами.

Одна из оригинальных функций, названная функцией Дирихле, выглядит так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Отметим, что график этой функции «разрывен» в каждой точке. Он состоит из прямой $y = 1$, у которой исключены все точки с иррациональными абсциссами, и прямой $y = 0$, у которой исключены все точки с рациональными абсциссами.

Дальнейшее развитие понятия функции связано с рассмотрением соответствий между множествами, элементами которых могут быть не только числа, но и объекты произвольной природы.

Об уравнениях высших степеней

Неполные квадратные уравнения и частные случаи полных квадратных уравнений умели решать ещё вавилоняне (2 тыс. лет до н. э.). Отдельные виды квадратных уравнений решали древнегреческие математики, сводя их решение к геометрическим построениям.

Примеры решения уравнений 3-й степени не были известны ни древнегреческой, ни арабской науке. В алгебраических трактатах арабских математиков IX—XV вв., кроме решения уравнений и систем уравнений 1-й и 2-й степеней, рассматриваются решения кубических уравнений частных видов. Однако способы решения этих уравнений приводили к нахождению приближённых значений корней.

Общее уравнение 3-й степени имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$. Давно было известно, что с помощью введения новой переменной это уравнение можно свести к уравнению вида $x^3 + px + q = 0$.

Впервые формулу для отыскания положительного корня уравнения $x^3 + px = q$, где $p > 0$ и $q > 0$, вывел итальянский математик Сципион Даль Ферро (1465—1526), но держал её в тайне. Только в конце жизни он сообщил своему ученику Фиори об открытии. Одновременно вопросом об общем решении уравнений 3-й степени занимался другой итальянский математик — Никколо Тарталья (ок. 1499—1557), который нашёл способы решения уравнений $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$, $x^3 = px + q$ и частных случаев уравнения $x^3 + px^2 = q$ (p и q — положительные числа). В 1535 г. между Фиори и Тартальей состоялся научный поединок, на котором Тарталья одержал блестящую победу (он за 2 ч решил все 30 предложенных ему задач, в то время как Фиори не решил ни одной задачи Тартальи).

С 1539 г. решением кубических уравнений начинает заниматься итальянский математик Джероламо Кардано (1501—1576). Он узнал об открытии Тартальи, который не публиковал своих трудов. В 1545 г. вышла книга Кардано «Великое искусство, или О правилах алгебры», где наряду с другими вопросами алгебры рассматриваются общие способы решения кубических уравнений. В эту книгу Кардано включил также метод решения уравнений 4-й степени, открытый его учеником Лодовико Феррари (1522—1565).

Вопрос о том, кому принадлежит приоритет открытия формулы корней кубических уравнений — Тарталье или Кардано, не решён до сих пор.

Следует отметить, что ни Тарталья, ни Кардано не провели полного исследования решений кубических уравнений. В решении этой задачи значительно продвинулся их соотечественник из Болоньи Рафаэль Бомбелли (ок. 1530—1572). Полное изложение вопросов, связанных с решением уравнений 3-й и 4-й степеней, дал Франсуа Виет (1540—1603), которому в этом существенно помогла усовершенствованная им алгебраическая символика.

В формуле корней квадратного уравнения используется знак корня — радикал. Через радикалы (корни 2, 3 и 4-й степеней) выражаются и корни уравнений 3-й и 4-й степеней.

После того как были найдены формулы решений уравнений 3-й и 4-й степеней, усилия многих математиков были направлены на то, чтобы отыскать формулы решений уравнений любых степеней. На решение этой проблемы ушло около 300 лет, и лишь в 20-х гг. XIX в. норвежский математик Нильс Абель (1802—1829) доказал, что в общем случае корни уравнений 5-й и более высоких степеней не могут быть выражены через радикалы. Французский математик Эварист Галуа (1811—1832) выделил класс алгебраических уравнений, которые разрешимы в радикалах.

Использование алгебраических уравнений позволило дать более тонкую классификацию действительных чисел. Числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, стали называть алгебраическими числами. Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, назвали трансцендентными. Оказалось, что в множестве иррациональных чисел содержится значительно больше трансцендентных чисел, чем алгебраических. Одним из представителей трансцендентных чисел является число π.

О прогрессиях

Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были ещё у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания, как их решать.

В древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок. 2000 г. до н. э.) приводится такая задача: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 людьми так, чтобы разность мер ячменя, полученного каждым человеком и его соседом, равнялась $\frac{1}{8}$ меры».

В этой задаче речь идёт об арифметической прогрессии. Условие задачи, пользуясь современными обозначениями, можно записать так: $S_{10} = 10$, $d = \frac{1}{8}$; найти $a_1, a_2, ..., a_{10}$.

В одном древнегреческом папирусе приводится задача: «Имеется 7 домов, в каждом по 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев, каждый из которых, если посеять зерно, даёт 7 мер зерна. Нужно подсчитать сумму числа домов, кошек, мышей, колосьев и мер зерна».

Решение этой задачи приводит к сумме: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$, т. е. сумме пяти членов геометрической прогрессии.

О прогрессиях и их суммах знали древнегреческие учёные. Так, им были известны формулы суммы первых n чисел последовательности натуральных, чётных и нечётных чисел.

Архимед (III в. до н. э.) для нахождения площадей и объёмов фигур применял «атомистический метод», для чего ему потребовалось находить суммы членов некоторых последовательностей. Он вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

показал, как найти сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Отдельные факты об арифметической и геометрической прогрессиях знали китайские и индийские учёные. Об этом говорит, например, известная индийская легенда об изобретателе шахмат (см. с. 168).

Термин «прогрессия» (от латинского *progressio*, что означает «движение вперёд») был введён римским автором Боэцием (VI в.) и понимался в более широком смысле как бесконечная числовая последовательность. Названия «арифметическая» и «геометрическая» были перенесены на прогрессии из теории непрерывных пропорций, изучением которых занимались древние греки. Равенство вида $a_{k-1} - a_k = a_k - a_{k+1}$ они называли непрерывной арифметической пропорцией, а равенство $\frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{b_k}{b_{k+1}}$ — непрерывной геометрической пропорцией. Из этих равенств следует, что

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \text{ и } b_k = \sqrt{b_{k-1} - b_{k+1}},$$

т. е. этими соотношениями выражаются характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим учёным Диофантом (III в.). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида «Начала» (III в. до н. э.). Правило отыскания суммы членов произвольной арифметической прогрессии встречается в «Книге абака» Леонардо Фибоначчи (1202). Общее правило для суммирования любой бесконечной убывающей геометрической прогрессии даёт Никола Шюке в книге «Наука о числах» (1484).

О степенях

Понятие степени с натуральным показателем сформировалось ещё у древних народов. Квадрат и куб числа использовались для вычислений площадей и объёмов. Степени некоторых чисел использовались при решении отдельных задач учёными Древнего Египта и Вавилона.

В III в. вышла книга греческого учёного Диофанта «Арифметика», в которой было положено начало введению буквенной символики. Диофант вводит символы для первых шести степеней неизвестного и обратных им величин. В этой книге квадрат обозначается знаком Δ с индексом r (Δ^r); куб — знаком k с индексом r (k^r); квадрат, умноженный на себя, — квадрато-квадрат — обозначается $\Delta^r\Delta$; квадрат, умноженный на куб, — квадрато-куб — Δk^r; куб, умноженный сам на себя, — кубо-куб — $k^r k$.

В конце XVI в. Франсуа Виет ввёл буквы для обозначения в уравнениях не только неизвестных, но и коэффициентов. Он применял сокращения: N (*Numerus* — число) — для первой степени, Q (*Quadratus* — квадрат) — для второй, C (*Cubus* — куб) — для третьей, QQ — для четвёртой и т. д.

Современная запись степеней (a^3, a^4, a^5 и т. д.) была введена Декартом, причём вторую степень a, т. е. a^2, он записывал как произведение aa.

К идее обобщения понятия степени на степень с ненатуральным показателем математики пришли постепенно. Отрицательные и дробные показатели степеней появились в отдельных трудах европейских математиков XIV—XV вв. (Н. Орем, Н. Шюке). Современные определения и обозначения степени с нулевым, отрицательным и дробным показателями берут начало от работ английских математиков Джона Валлиса (1616—1703) и Исаака Ньютона (1643—1727).

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–8 КЛАССОВ

Выражения и их преобразования

1. Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, называют целыми выражениями. При этом произведение одинаковых множителей может быть записано в виде степени. К целым выражениям относят и выражения, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на число, отличное от нуля. Например, выражения $a^2 + \sqrt{3}ab - \sqrt{2}b^2$, $(x - y)(2x + y^2)$, $m - \frac{n}{3}$, $a^2 : 7$ целые.

Выражения, составленные из чисел и переменных, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на выражение с переменными, называют дробными выражениями. Например, выражения $x + \frac{1}{x - 1}$, $\frac{a + 2}{b}$, $5m : n$ дробные.

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Дробное выражение при некоторых значениях переменных может не иметь смысла. Например, выражение $a + \frac{1}{a - 2}$ не имеет смысла при $a = 2$, выражение $\frac{3}{x - y}$ не имеет смысла при $x = y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменных.

2. Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Два выражения, принимающие равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют тождественно равными, а замену одного выражения другим, тождественно равным ему, — тождественным преобразованием выражения.

3. Одночленом называют произведение чисел, переменных и их степеней. Числа, переменные и их степени также считают одночленами. Например, $8a^3b$, $-1{,}5xy^2z^8$, 12, c, m^{10} — одночлены.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех входящих в него переменных. Например, степень одночлена $9a^7b$ равна 8.

4. Многочленом называется сумма одночленов. Например, $y^4 - 8y^3 + 2y - 3$, $4a^4b + 11a^2b^2 - ab + 3b - 1$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $18a^6 - 7a^4b^3 + 1$ равна степени одночлена $-7a^4b^3$, т. е. равна 7.

Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

5. При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $(5x^2 - 3xy) + (4xy - 2x^2 + 1) = 5x^2 - 3xy + 4xy - 2x^2 + 1 = 3x^2 + xy + 1$.

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $(8a^2 - 3ab) - (7a^2 - 4ab + 5) = 8a^2 - 3ab - 7a^2 + 4ab - 5 = a^2 + ab - 5$.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например, $2x^2(3x^3 - xy + 5y^2) = 6x^5 - 2x^3y + 10x^2y^2$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например, $(2a - 3)(3a^2 + a - 4) = 6a^3 + 2a^2 - 8a - 9a^2 - 3a + 12 = 6a^3 - 7a^2 - 11a + 12$.

Любое целое выражение можно представить в виде многочлена.

6. Формулы сокращённого умножения.

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

в) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

г) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

д) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

е) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

ж) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

7. Разложением многочлена на множители называют представление многочлена в виде произведения многочленов.

Для разложения многочленов на множители применяют вынесение множителя за скобки, группировку, используют формулы сокращённого умножения. Например, многочлен $8a^3 - 6ab$ можно разложить на множители с помощью вынесения $2a$ за скобки: $8a^3 - 6ab = 2a(4a^2 - 3b)$; многочлен $2ab + 10b - 3a - 15$ можно разложить на множители, используя группировку:

$$2ab + 10b - 3a - 15 = (2ab + 10b) - (3a + 15) =$$
$$= 2b(a + 5) - 3(a + 5) = (a + 5)(2b - 3);$$

многочлен $9a^2 - 25b^4$ можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов:

$$9a^2 - 25b^4 = (3a)^2 - (5b^2)^2 = (3a - 5b^2)(3a + 5b^2).$$

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, корнями которого являются числа x_1 и x_2, можно разложить на множители, используя формулу

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

8. Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b — многочлены.

При любых значениях a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, верно равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Это равенство сохраняет силу и в том случае, когда под буквами a, b и c понимают многочлены, причём b и c — ненулевые многочлены. Свойство дроби, выраженное тождеством $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, называют основным свойством дроби. Основное свойство дроби используется при сокращении дробей. Например:

$$\frac{x^2+2xy}{4y^2+2xy}=\frac{x(x+2y)}{2y(x+2y)}=\frac{x}{2y}.$$

Если изменить знак числителя (или знак знаменателя) дроби и знак перед дробью, то получим выражение, тождественно равное данному:

$$-\frac{-a}{b}=\frac{a}{b},\ -\frac{a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

9. Действия над рациональными дробями выполняются аналогично действиям над обыкновенными дробями.

а) Если $c \neq 0$, то

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \text{ и } \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же. Например:

$$\frac{3x-8y}{5xy}+\frac{2x-7y}{5xy}=\frac{3x-8y+2x-7y}{5xy}=\frac{5x-15y}{5xy}=\frac{5(x-3y)}{5xy}=\frac{x-3y}{xy}.$$

Чтобы выполнить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же. Например:

$$\frac{x^2}{3x-6}-\frac{4}{3x-6}=\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\frac{x+2}{3}.$$

б) Чтобы выполнить сложение или вычитание дробей с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю и затем применить правило сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Например:

$$\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{ab-a^2}-\frac{b}{a}=\frac{a^2}{b(a-b)}+\frac{b^2}{a(b-a)}-\frac{b}{a}=$$

$$=\frac{a^3-b^3-ab^2+b^3}{ab(a-b)}=\frac{a(a^2-b^2)}{ab(a-b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)}=\frac{a+b}{b}.$$

в) Если $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и перемножить их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби. Например:

$$\frac{c^2-4}{c^2}\cdot\frac{c}{3c-6}=\frac{(c^2-4)c}{c^2(3c-6)}=\frac{(c-2)(c+2)}{3c(c-2)}=\frac{c+2}{3c}.$$

г) Если $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй. Например:

$$\frac{x^3 - 8}{12x} : \frac{x - 2}{6} = \frac{x^3 - 8}{12x} \cdot \frac{6}{x - 2} = \frac{6(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{12x(x - 2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}.$$

Любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

10. Степень с целым показателем.

Если n — натуральное число, большее 1, и a — любое число, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Если $n = 1$ и a — любое число, то

$$a^1 = a.$$

Если $n = 0$ и a — число, отличное от нуля, то

$$a^0 = 1.$$

Если n — целое отрицательное число и a — отличное от нуля число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

11. Свойства степени с целым показателем.

а) $a^m a^n = a^{m+n}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

б) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

в) $(a^m)^n = a^{mn}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели степеней перемножают.

г) $(ab)^n = a^n b^n$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, n — целое число.

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, n — целое число.

При возведении в степень дроби возводят в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записывают в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

12. Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Арифметический квадратный корень из a обозначают $\sqrt{a}$. Выражение, стоящее под знаком корня, называют подкоренным выражением. Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл для всех $a \geqslant 0$ и не имеет смысла при $a < 0$.

Свойства арифметического квадратного корня.

а) Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

б) Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя.

в) При любом значении a верно равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

13. Основные задачи на проценты:

а) нахождение процентов от данного числа.

Чтобы найти $a\%$ от числа b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$.

Например, 5% от числа 40 составляют $40 \cdot \frac{5}{100} = 2$.

б) нахождение числа по его процентам.

Чтобы найти число, $a\%$ которого равны числу b, надо b разделить на $\frac{a}{100}$.

Например, если 5% от числа x равны 40, то $x = 40 : \frac{5}{100} = \frac{40 \cdot 100}{5} = 800$.

в) нахождение процентного отношения чисел.

Чтобы найти, сколько процентов число a составляет от числа b, надо отношение $\frac{a}{b}$ умножить на 100%.

Например, число 35 от числа 40 составляет $\frac{35}{40} \cdot 100\% = 87{,}5\%$.

Уравнения

14. Корнем уравнения с одной переменной называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 2 — корень уравнения $x^3 - x = 4x^2 - 10$, так как верно равенство $2^3 - 2 = 4 \cdot 2^2 - 10$.

Решить уравнение с одной переменной — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

15. Уравнения, в которых левая и правая части являются рациональными выражениями, называются рациональными. Если и левая и правая части рационального уравнения являются целыми выражениями, то уравнение называют целым. Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют дробным.

16. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни, называются равносильными. Например, уравнения $x^2 = 36$ и $(x - 6)(x + 6) = 0$ равносильные. Каждое из них имеет два корня: -6 и 6. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Уравнения обладают следующими свойствами:

если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

17. Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа. Число a называется коэффициентом при переменной, число b — свободным членом.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $\frac{b}{a}$. Например, уравнение $5x = 3$ имеет корень 0,6.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней. Например, уравнение $0 \cdot x = 9$ не имеет корней.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения $ax = b$ является любое число.

18. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Число a называют первым коэффициентом, b — вторым коэффициентом и c — свободным членом.

Квадратное уравнение, в котором первый коэффициент равен 1, называют приведённым квадратным уравнением.

19. Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$. Такие уравнения обычно решают разложением их левой части на множители. Например,

$$3x^2 - 15x = 0,\ 3x(x-5) = 0,\ x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 5.$$

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ имеет два корня: $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, если $-\frac{c}{a} > 0$, и не имеет корней, если $-\frac{c}{a} < 0$. Решают такие уравнения, сводя их к уравнениям вида $x^2 = m$. Например, $0{,}5x^2 - 18 = 0$, $0{,}5x^2 = 18$, $x^2 = 36$, $x_1 = -6$, $x_2 = 6$.

20. Дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют выражение $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня; если $D = 0$, то один корень; если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $D \geqslant 0$ находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Для квадратного уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ формулу корней можно записать так:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

21. Теорема Виета: сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Иначе говоря, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

Из теоремы Виета следует, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема, обратная теореме Виета: если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

22. При решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить получившееся целое уравнение;
4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Решим, например, уравнение

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{2-x}.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на $x(x-2)$, получим

$$2x^2 = 2 + x(x+1).$$

Это уравнение приводится к квадратному уравнению

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

имеющему корни 2 и -1.

При $x = 2$ общий знаменатель исходного уравнения обращается в нуль, этот корень необходимо исключить. При $x = -1$ общий знаменатель $x(x-2)$ в нуль не обращается.

Следовательно, число -1 является корнем исходного уравнения.

23. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство. Например, пара чисел $x = -5$, $y = 3$ является решением уравнения $x^2 - 4y = 13$. Это решение можно записать так: $(-5; 3)$.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — числа.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения, не имеющие решений, также считают равносильными.

24. Каждое решение $(x; y)$ уравнения с двумя переменными можно изобразить в координатной плоскости точкой с координатами x и y. Все такие точки образуют график уравнения.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

25. Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство. Например, пара чисел $x = 3$, $y = 8$ — решение системы

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 19. \end{cases}$$

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Системы уравнений, не имеющие решений, также считают равносильными.

Для решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными используются как графический способ, так и аналитические способы — подстановки и сложения.

При графическом способе строят прямые — графики линейных уравнений и анализируют их расположение:

- если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений; координаты любой точки прямой являются решением системы;

- если прямые параллельны, то система не имеет решений;
- если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение; координаты точки пересечения прямых являются решением системы.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:

- выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;
- подставляют в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

- умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали в уравнениях противоположными числами;
- складывают почленно левые и правые части уравнений системы;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

Для решения систем двух уравнений с двумя переменными, в которых одно или оба уравнения не являются линейными, также используются как графический, так и аналитический способы решения.

При графическом способе решения строят графики уравнений и находят пары чисел — координаты их общих точек; эти пары чисел — решения системы. Сколько общих точек имеют графики, столько решений имеет система. Если графики не пересекаются, то делается вывод о том, что система решений не имеет. Решения, найденные графически, являются, как правило, приближёнными.

Если система содержит линейное уравнение, то её всегда можно решить способом подстановки. Если система состоит из двух уравнений с двумя переменными второй степени, то применить к ней способ подстановки или способ сложения удаётся лишь в отдельных частных случаях.

Неравенства

26. Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; пишут: $a > b$. Число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число; пишут: $a < b$.

Если a больше b или a равно b, то пишут: $a \geqslant b$. Если a меньше b или a равно b, то пишут: $a \leqslant b$.

Неравенства, составленные с помощью знака $>$ или $<$, называют строгими. Неравенства, составленные с помощью знака $\geqslant$ или $\leqslant$, называют нестрогими.

27. Свойства числовых неравенств.
а) Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.
б) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
в) Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.
Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.
г) Если $a < b$ и c — положительное число, то

$$ac < bc;$$

если $a < b$ и c — отрицательное число, то

$$ac > bc.$$

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

28. Сложение и умножение числовых неравенств.
а) Если $a < b$ и $c < d$, то

$$a + c < b + d.$$

Если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.
б) Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то

$$ac < bd.$$

Если перемножить почленно верные неравенства одного знака, левые и правые части которых положительные числа, то получится верное неравенство.
Если a и b — положительные числа, $a < b$ и n — натуральное число, то

$$a^n < b^n.$$

29. Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Например, число 1,8 — решение неравенства $5x < 10$. Этому неравенству удовлетворяет и любое другое число, меньшее 2.

Решить неравенство с одной переменной — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

30. Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Неравенства с одной переменной обладают следующими свойствами:

- если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство;

- если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;
- если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

31. Числовой промежуток $[a; b]$, называемый числовым отрезком, — это множество всех чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x \leqslant b$.

Числовой промежуток $(a; b)$, называемый интервалом, — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < b$.

Числовой промежуток $[a; b)$, называемый полуинтервалом, — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x < b$.

Числовой промежуток $(a; b]$, называемый полуинтервалом, — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x \leqslant b$.

Числовые промежутки $[a; +\infty)$ и $(a; +\infty)$ — это множества всех чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x \geqslant a$ и $x > a$.

Числовые промежутки $(-\infty; b]$ и $(-\infty; b)$ — это множества всех чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x \leqslant b$ и $x < b$.

Числовые промежутки $[a; +\infty)$ и $(-\infty; b]$ называют числовыми лучами, а числовые промежутки $(a; +\infty)$ и $(-\infty; b)$ — открытыми числовыми лучами.

Числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$ — это множество всех действительных чисел.

32. Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$, где a и b — некоторые числа, а x — переменная, называются линейными неравенствами с одной переменной.

33. Если ставится задача найти общие решения нескольких неравенств, то говорят, что надо решить систему неравенств.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему неравенств — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Функции

34. Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y. Независимую переменную x иначе называют аргументом, а о зависимой переменной y говорят, что она является функцией этого аргумента. Все значения независимой переменной образуют *область определения функции*, а значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество значений* *функции*. Область определения и множество значений функции $y = f(x)$ обозначают соответственно $D(f)$ и $E(f)$.

Значения аргумента, при которых функция принимает значение, равное нулю, называются нулями функции.

Промежутки знакопостоянства — это промежутки, на которых функция сохраняет знак.

Промежутки монотонности — это промежутки возрастания и убывания функции.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

35. Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа. Её областью определения является множество всех действительных чисел.

Графиком функции, заданной формулой вида $y = kx + b$, в которой хотя бы один из коэффициентов k или b отличен от нуля, является прямая. Число k называют угловым коэффициентом этой прямой.

Если $k \neq 0$, то график функции $y = kx + b$ пересекает ось x; если $k = 0$ и $b \neq 0$, то прямая $y = kx + b$ параллельна оси x; если $k = 0$ и $b = 0$, то прямая $y = kx + b$ лежит на оси x.

36. Если угловые коэффициенты двух линейных функций различны, то их графики пересекаются; если угловые коэффициенты двух линейных функций одинаковы, то их графики параллельны.

37. Линейную функцию, задаваемую формулой $y = kx$ при $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

График прямой пропорциональности есть прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях.

38. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — не равное нулю число. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ принимает отрицательные значения, если $x < 0$, и положительные значения, если $x > 0$.

При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ принимает положительные значения, если $x < 0$, и отрицательные значения, если $x > 0$.

График обратной пропорциональности — гипербола. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях.

39. Областью определения функции $y = x^2$ является множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, а при $x \neq 0$ принимает положительные значения. График функции $y = x^2$ — парабола. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

40. Областью определения функции $y = x^3$ является множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, принимает отрицательные значения, если $x < 0$, и положительные значения, если $x > 0$. График функции $y = x^3$ проходит через начало координат и расположен в первой и третьей координатных четвертях. Он симметричен относительно начала координат.

41. Область определения функции $y = \sqrt{x}$ — множество всех неотрицательных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, при $x > 0$ функция принимает положительные значения. График функции $y = \sqrt{x}$ расположен в первой координатной четверти, он представляет собой ветвь параболы.

42. Область определения функции $y = |x|$ — множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$; при $x \neq 0$ функция принимает положительные значения. График состоит из двух лучей, исходящих из начала координат, и располагается в первой и во второй координатных четвертях. График функции $y = |x|$ симметричен относительно оси y.

43. Для того, чтобы найти координаты точек пересечения графиков функций, заданных формулами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, нужно приравнять правые части этих формул и решить уравнение $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$. Далее следует подставить полученное значение x в правую часть любой из данных функций и найти соответствующее значение y. Полученные значения x и y будут являться координатами точки пересечения графиков.

Действительные числа

44. Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Всякое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Положительные бесконечные десятичные дроби, противоположные им числа и число нуль образуют множество действительных чисел.

Число, которое можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, называют иррациональным числом.

Каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой, и каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число.

45. Стандартным видом числа α называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число. Число n называют порядком числа α. Например, $73000 = 7{,}3 \cdot 10^4$ ($n = 4$); $0{,}0026 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ ($n = -3$).

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ДО 1000

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Список дополнительной литературы

1. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. — М.: Просвещение, 2017.
3. Баврин И. И. Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М.: Просвещение, 1994.
4. Волошинов А. В. Мудрость Эллады / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2009.
5. Всероссийская олимпиада школьников по математике. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11390
6. Галкин Е. В. Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
7. Глейзер Г. И. История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
8. Государственная (итоговая) аттестация выпускников 9 классов в новой форме. 9 класс. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/12489
9. Дорофеева А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
10. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 1 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
11. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 2 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
12. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 3 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
13. Кордемский Б. А. Великие жизни в математике: кн. для учащихся 8—11 кл. / Б. А. Кордемский. — М.: Просвещение, 1995.
14. Кордемский Б. А. Удивительный мир чисел: мат. головоломки и задачи для любознательных: кн. для учащихся / Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. — М.: Просвещение, 1996.
15. Московский центр непрерывного математического образования. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/12768 Рекомендуем рубрики: «Олимпиады для школьников», «Журнал „Квант“».
16. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ; Астрель, 2005.
17. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Глава I

2. 1,(5); 1,68. **5.** а) Всем множествам; б) $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$; в) $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{R}$. **7.** а) 0,(3); б) 0,(6); в) 0,8(3); г) 0,(7); д) 1,(72); е) 2,2(6). **11.** а) $13 \in N$; б) $0{,}8 \in \boldsymbol{Q}$; в) $\sqrt{3} \in \boldsymbol{R}$; г) $585 \in \boldsymbol{N}$; д) $0 \in \boldsymbol{Z}$. **12.** а) 200; б) –100; –2; в) 0; 200. **13.** а) $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N}$; б) $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{N}$; г) $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Z}$. **15.** а) $\sqrt{a}$ рациональное, если $a = 1$; 4; 9; 16; 25; б) $\sqrt{a}$ иррациональное, если $a = 2$; 3; 5; 6; 7. **17.** $-18 \in \boldsymbol{Z}$; $205 \in \boldsymbol{Q}$; $\sqrt{3} \notin \boldsymbol{N}$; $0{,}(8) \in \boldsymbol{R}$; $2 + \sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$. **18.** а) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$; б) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$. **20.** а) 0,2; б) 0,6; в) 0,8; г) 1; д) 1; е) –2. **21.** а) 360; б) $-\frac{2}{7}$; в) 250; г) –24,8. **24.** а) –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; б) –6; –5; –4; –3; –2; в) –5; –4; –3; г) –2; –1; 0. **31.** а) $c > \sqrt{c}$; б) $c < \sqrt{c}$. Существует, $c = 0$; $c = 1$. **33.** а) 11,2; б) 5,31. **35.** а) 49; б) 11^{-34}; в) 5; г) 0,4; д) 540; е) 85. **36.** а) $\frac{28}{91}$; б) $\frac{17}{73}$; в) 4. **38.** а) 0,13; б) 4; в) 0,047; г) 0,002. **42.** $407{,}4 \leqslant a \leqslant 432{,}6$. **43.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **44.** Нет. **47.** ≈ 1%. **48.** $2\frac{12}{19}$%. **49.** 0,02%. **53.** $q = -48$. **57.** 300 мм. **59.** а) 1; б) –1. **60.** а) $x_1 = -15$, $y_1 = -16$; $x_2 = 16$, $y_2 = 15$; б) $x_1 = 4$, $y_1 = -7$; $x_2 = 8$, $y_2 = 1$. **63.** 18 тетрадей. **64.** На 5 тетрадей. **65.** С 16 по 31 марта. **66.** 17 учебных кабинетов. **67.** 29 месяцев. **69.** На $11\frac{1}{9}$%. **70.** 5 банок. **71.** 30. **72.** Экономия 995 р. **71.** 30. **73.** а) $\frac{4a - 12}{5}$; б) $-ab$. **74.** а) $x = 1$, $y = 4$; б) $x = 1{,}5$, $y = 1$. **75.** а) 0,04; б) 229. **77.** $1\frac{1}{3}$. **81.** а) 22; б) 8; в) 8; г) 15. **86.** а) 1; б) $2\frac{6}{14}$; в) 2; г) 3; д) 3. **87.** а) 1; б) $-\frac{5}{7}$; в) 0. **88.** а) 10; б) 2; в) –29; г) 3. **90.** а), в), е) — Рациональное число; б), г), д) — иррациональное число. **93.** 102 м; 0 м. **94.** 12,089 кг. **95.** 0,8 Дж. **97.** 1) Жилой дом и детский сад; 3) в 3-м подъезде на 3-м этаже; 5) за 6 лет.

Глава II

99. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right]$; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **100.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $[1; 2) \cup (2; +\infty)$. **101.** а) $-\frac{1}{7}$, 1; б) 0,5; в) нет нулей функции; г) $\frac{1}{5}$. **102.** а) 3; б) 1,5. **105.** а), в) — Нечётная; б), г) — чётная. **109.** а) (2; 3,8); б) (–12,6; 6,8). **110.** а) –5; 3; б) –1; 1,5; в) $\frac{1}{3}$; 7; г) нет решений. **115.** а) 1. $y = -0{,}6x + 2{,}4$; 2. $y = 1{,}5x + 3{,}5$; б) 1. $y = -\frac{1}{x}$; 2. $y = \frac{3}{x}$; в) 1. $y = \sqrt{4x}$; 2. $y = \sqrt{9x}$. **125.** а), б), в) — Да. **126.** (–3; –9); (1; –1). **127.** (1000; 10 000). **128.** ±4. **131.** а) 2 корня; б) 1 корень; в) нет корней. **132.** а) $\frac{1}{5a+2}$; б) $\frac{1-3a}{2a+1}$. **133.** $3 \pm \sqrt{5}$. **142.** а) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; б) нулей нет; в) нулей нет. **143.** При $a < 0$. **147.** а) Корней нет; б) 0; 2,8. **148.** а) $(-\infty; 2{,}9)$; б) $[0{,}25; +\infty)$; в) $[-1{,}8; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}2)$. **149.** а) 1,5 с; б)2,5 с; в) 31,25 м; г) 4 с. **150.** а) (2; 3); б) (–1,25; 1,125). **159.** $b = -1$. **160.** При $n = 5$; (–1; 13). **161.** а) $a = -\frac{1}{4}$; $b = 0$; $c = 5$; б) $a = 2$; $b = 12$; $c = 18$. **164.** $\frac{3a-1}{a+2}$. **165.** а) $1 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; б) –2; $2\frac{1}{3}$. **166.** 100 га. **167.** 8 машин. **168.** а) $x = 3$, $y = -2$; б) $x = -2$, $y = -3$. **170.** а) $x = 2$, $y = 1$; б) $x = -3$, $y = -1$. **173.** 1 и 2. **174.** (4; 13), (14; 3). **175.** (–7; 9), (–1; 15), (1; 1), (7; 7). **177.** а) 0; 4; б) 1; 3; в) корней нет. **191.** а) При $a = -0{,}28$; б) при $a = 3$; в) при $a = -2$; г) при $a = 0{,}001$. **200.** а) При $c > 13$; б) при $c > 8$. **201.** При $b = -12$, $c = 24$. **202.** При $a = 2$. **203.** При $a > 0$ и $c \leqslant 0$; при $a < 0$ и $c \geqslant 0$. **204.** При $a = -6$ и $b = 26$.

Глава III

211. а) –2; б) –0,2; 0,2; в) –3,5; 2; г) –0,5; 0,5. **212.** а) 0; 5,5; б) $1\frac{1}{3}$; в) –7; г) $-6\frac{1}{3}$; 5. **215.** 6 см. **216.** 17 и 12 или –12 и –17. **217.** а) $-\sqrt{6}$; 0; $\sqrt{6}$; б) 0; в) 0; 1,5; 2; г) –0,2; 0; 0,5; д) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2; е) –4; 0; 1; 4;

ж) -1; 1; з) -1; 0; 1; 3. **219.** а) $-3-\sqrt{15}$; -1; $-3+\sqrt{15}$. Указание. Представьте $7x^2$ в виде x^2+6x^2; б) $-2{,}5-\sqrt{1{,}25}$; $-2{,}5+\sqrt{1{,}25}$; 1. **220.** (1; 0), (2; 0), (3; 0) и (0; -6). Указание. Представьте $-6x^2$ в виде $-x^2-5x^2$. **221.** а) -2; 2; б) -1; 1; 3; в) -3; 2; г) $-1{,}5$; 1; $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. **222.** а) -2; -1; 1; 2; б) 2; в) -4; 3. **223.** а) -3; 3; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; -2; 2; в) корней нет; г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; -1; 1; д) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; е) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **224.** а) -3; 3; -4; 4; б) корней нет; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; -2; 2; е) корней нет. **225.** а) (-2; 0), (2; 0), (-1; 0), (1; 0); (0; 4); б) ($-\sqrt{2}$; 0), ($\sqrt{2}$; 0); (0; -10); в) ($-\sqrt{10}$; 0), ($\sqrt{10}$; 0); (0; 100); г) (0; 0). **227.** а) Корней нет; б) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; -2; 2. **228.** а) -1; 1; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; б) 1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **229.** а) 1; б) -2; 1; 2. **231.** а) ($-\infty$; 8,6); б) ($-2{,}5$; $+\infty$). **232.** За 66 ч и 55 ч. **233.** а) 0; -3; б) 0; в) 0. **234.** а) $-\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}4}$; б) 4. **235.** а) 10; б) 0. **236.** а) -1; 7; б) 2; $8\frac{2}{3}$; в) 4. **237.** а) 1,5; б) $-0{,}5$. **238.** а) 8,2; 13; б) $-6{,}6$; 3. **239.** а) 3,2; 8; б) $-1\frac{3}{4}$; 2. **240.** а) (-1; -9), (-3; -3), (3; 3). **241.** а) $-1{,}4$; $-0{,}5$; 0,5; б) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2. **242.** а) -1; 3; б) -4; 3; в) -2; 4. **243.** а) 1; 2,8; 6; б) 2; 5; $7+4\sqrt{2}$; $7-4\sqrt{2}$. **245.** а) $-\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Введите новую переменную $y=x-\frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{3}$; 3; $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. **246.** а) $\frac{x+4}{5}$; б) $\frac{3x+12}{x+16}$. **248.** 24 дня и 12 дней. **249.** 6 и 12. **250.** $\frac{12}{18}$. **251.** $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{6}$. **252.** 50 км/ч. **253.** $1\frac{1}{2}$ ч. **254.** 20 км/ч. **255.** 2 или 2,5 ч. **256.** 10 и 15 ц/га. **257.** 15 км/ч. **258.** 16 км/ч. **259.** 4 км/ч. **260.** 10 и 15 дней. **261.** 30 и 20 ч. **262.** а) $\frac{a+y}{a-y}$; б) $\frac{1}{3x-2}$. **264.** а) (-8; 6); б) ($-\infty$; 1,5) $\cup$ (2; $+\infty$); в) ($-\infty$; -3) $\cup$ (5; $+\infty$); г) (1; 1,2); д) $x \neq 1{,}5$; е) решений нет; ж) (0; 0,9); з) ($-\infty$; 0) $\cup$ (3,5; $+\infty$).

265. а) $(-\infty; -2{,}5] \cup [1; +\infty)$; б) $[-2; 3]$; в) $(-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$. **266.** а) $(-\infty; -7) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $x \neq \frac{2}{3}$; в) $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right]$; г) $(-\infty; -4{,}5] \cup [2; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$. **267.** а) При $x < -1{,}5$ и $x > -1$; б) при $x \neq -\frac{1}{6}$. **268.** а) $(-4; 4)$; б) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [0; +\infty)$; д) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; е) $(-\infty; 0) \cup$ $\cup (7; +\infty)$. **269.** а) $[-10; 10]$; б) $(-\infty; -2\sqrt{6}) \cup (2\sqrt{6} +\infty)$; в) $[-4; 0]$; г) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0{,}4; +\infty)$; е) $(-\infty; -0{,}5) \cup$ $\cup (0; +\infty)$. **270.** а) При $b < -6$ и $b > 6$; б) при $b < -\sqrt{15}$ и $b > \sqrt{15}$. **271.** а) При $-12 < t < 12$; б) при $-3 < t < 3$. **272.** а) $\left(-7; -\frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right] \cup \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) x — любое число; г) $\left(-\infty; \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$. **273.** а) $(-\infty; -1) \cup (4{,}5; +\infty)$; б) $x \neq \frac{1}{4}$. **274.** а) $[0; 4]$; б) все числа, кроме 3. **278.** Не превосходит 5 см. **279.** Больше 4 см. **280.** а) $(-2; 3)$; б) $(4; 6)$; в) $(-12; -2) \cup (8; 10)$; г) $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$; д) $[1; 8]$; е) решений нет. **281.** а) 2, 3, 4, 5; б) 2, 3, 4. **283.** а) -5; 5; б) $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$. **284.** 7 кг. **285.** а) $(-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$; б) $(-10; 14)$; в) $(-\infty; -8{,}5] \cup [3{,}5; +\infty)$; г) $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{8}\right]$. **286.** а) $(-25; 30)$; б) $(-\infty; -6) \cup$ $\cup (6; +\infty)$; в) $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$; г) $(-\infty; -6{,}3] \cup [-0{,}1; +\infty)$. **287.** а) $(2; 5) \cup (12; +\infty)$; б) $(-\infty; -7) \cup (-1; 4)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty)$. **288.** а) $(-48; 37) \cup$ $\cup (42; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}7) \cup (2{,}8; 9{,}2)$. **289.** а) $(-\infty; -9) \cup (2; 15)$; б) $(-6; 0) \cup (5; +\infty)$; в) $(1; 4) \cup (8; 16)$. **290.** б) $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{7}\right]$; в) $(-12; 3)$; г) $\left[-6; \frac{1}{3}\right]$. **291.** а) $(-\infty; 18) \cup (19; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}9) \cup (3{,}2; +\infty)$;

в) $[-3; 8{,}5]$; г) $[0{,}3; 8]$. **292.** а) $[-8; 5]$; б) $[-12; 1] \cup [9; +\infty)$. **293.** а) $(-\infty; -2{,}5] \cup [17; +\infty)$; б) $[-9; 0] \cup [4; +\infty)$. **294.** а) $(-6; 5)$; б) $(-\infty; -3{,}8) \cup (1{,}4; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (1{,}6; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}3) \cup (4; +\infty)$. **295.** а) $(-7; 21)$; б) $(-\infty; -4{,}7) \cup (7{,}2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$; г) $(0; 3)$. **296.** а) $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$; б) $[-6; 5)$; в) $(0; 2]$; г) $(-\infty; 1) \cup$ $\cup [1{,}5; +\infty)$. **297.** а) $(-16; -4)$; б) $(-\infty; 2) \cup (2{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0{,}5; +\infty)$; г) $(-4; -1{,}2)$. **298.** а) $(-4; 0)$; б) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; в) $(1; 2]$; г) $(-\infty; -2) \cup [1{,}5; +\infty)$. **299.** а) $y = -4x$; б) $y = 1{,}6x + 4$. **300.** 2 л и 3 л. **302.** а) 2; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$; б) -3; -2; 1; 2. **303.** а) -3; 2; б) -1; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$. **304.** $(-3; 0)$, $(-2; 0)$, $(1; 0)$ и $(0; -6)$. **305.** $a = 5$; $(-4; 0)$, $(2; 0)$, $(3; 0)$. **306.** а) -1; 1; б) -1; 1. **307.** а) -10; -4; 2. Указание. Используйте подстановку $y = (x + 4)^2$; б) 2; 4; $3 - \sqrt{77}$; $3 + \sqrt{77}$. **308.** а) 4; б) -2. **310.** $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 2; 5. **315.** а) 0; -1; 1; б) 0; -2; 2; в) 0; -8; 8; г) 0; $-2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$. **316.** а) 0; -5; 5; б) 0; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. **317.** а) 1; 2; б) -1; $-\frac{1}{2}$; 1; в) -2; 0,8; 5; г) -1; $\frac{1}{6}$; 6. **318.** а) -1. Указание. Представьте $2x^2$ в виде $x^2 + x^2$; б) -1; $\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$; $\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$. **321.** а) $-3 - \sqrt{6}$; $-3 + \sqrt{6}$; $-3 - \sqrt{17}$; $-3 + \sqrt{17}$; б) -2; 4; $1 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; в) корней нет; г) -4; 0; д) $-1 - \sqrt{2}$; $-1 + \sqrt{2}$; е) -4; 5; ж) $-4{,}5$; 1; $\frac{-7 - \sqrt{65}}{4}$; $\frac{-7 + \sqrt{65}}{4}$. **322.** а) 1; б) -1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **323.** а) $-\frac{1}{2}$; б) -1; 2. **327.** а) -3; 3; б) -1; 1. **328.** $-5{,}6$; 4. **329.** а) -7; 15; б) $-2\frac{1}{3}$; 5. **330.** а) 3; 10; б) $2\frac{2}{3}$; 4. **331.** 4. **332.** а) -1; $\frac{11 - \sqrt{57}}{8}$; $\frac{11 + \sqrt{57}}{8}$; б) -1; $\frac{4 - \sqrt{7}}{3}$; $\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$. **333.** а) 1; б) 2; $2\frac{1}{2}$. **334.** а) -1; 1; б) 0. **335.** а) 1,4; 3; б) 3; 9. **336.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$; 3. **337.** 2; $\frac{1}{2}$. **338.** а) $-2{,}5 - \sqrt{5{,}25}$; $-2{,}5 + \sqrt{5{,}25}$; $2{,}5 - \sqrt{5{,}25}$; $2{,}5 + \sqrt{5{,}25}$; б) $-2 - \sqrt{5}$; $-2 + \sqrt{5}$; $2 - \sqrt{5}$; $2 + \sqrt{5}$; -1; 1. **339.** б) $[-9; 1]$; в) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; -1{,}75] \cup [1{,}5; +\infty)$; д) x — любое число; е) $x \ne \frac{1}{3}$. **341.** а) $(-4; 4)$; б) $x \ne -2$. **342.** При

$-4 < a < -2$ и $-2 < a < 6$. **343.** При $b < 2 - \sqrt{10}$ и $b > 2 + \sqrt{10}$. **344.** а) При $c > 36$; б) при $-20 < c < 20$. **345.** а) При $0 < k < 42{,}25$; б) при $k = 42{,}25$ и $k < 0$; в) при $k > 42{,}25$. **346.** $[-3; 1]$. **347.** а) $(7; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$; в) $(-\infty; -3)$; г) $(4; 5)$. **348.** а) $(-1; 2)$; б) $(1; 4)$. **349.** а) $(-\infty; -1{,}2) \cup (4; 6)$; б) $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -1{,}6) \cup (-0{,}6; 1{,}2)$; г) $(-\infty; -1{,}8) \cup (1{,}7; 1{,}9)$. **350.** а) -4; $1\frac{2}{3}$; 2; б) $(-\infty; -4) \cup \left(1\frac{2}{3}; 2\right)$; в) $\left(-4; 1\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. **351.** а) $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$; б) $(7{,}3; 9{,}8)$; в) $(-0{,}8; 4) \cup$ $\cup\ (20; +\infty)$; г) $(-\infty; -0{,}3] \cup [5; 17]$. **352.** а) $(-17; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -11) \cup \left(\frac{2}{3}; 11\right)$; в) $(-\infty; -5) \cup (0; 5)$; г) $(-0{,}1; 0) \cup (0{,}1; +\infty)$; д) $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$; е) $(-6; 0) \cup (6; 15)$. **353.** а) $(-2; 6)$; б) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup (1; 24)$; г) $(-\infty; -7) \cup (21; +\infty)$. **354.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{11}\right) \cup (4; +\infty)$. **355.** а) Нет; б) нет. **356.** а) $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$; б) $(-16; 11)$; в) $[-1; 3)$; г) $(-\infty; 4) \cup$ $\cup\ [6; +\infty)$; д) $(-1; 2]$; е) $(-\infty; -1{,}5) \cup [0{,}2; +\infty)$. **357.** а) $(-4; 18)$; б) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; г) $[-12{,}4; -8)$.

Глава IV

359. а) $(3; 0)$; $(0; -1{,}5)$; б) $(0; -10)$; $(-2; 0)$; в) $(0; -4)$; $(0{,}5; 0)$; г) $(0; 2)$; $(-1; 0)$. **361.** а) Во второй; б) в первой. **362.** а) $y = 0{,}5x + 1$; б) $y = -0{,}5x - 1$; в) $y = -1$. **366.** $k = -8$. **367.** а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 = 25$; в) $x^2 + y^2 = 64$. **368.** а) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25$; б) $(x-2)^2 +$ $+ (y+5)^2 = 169$; в) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 2$. **370.** 2. Гипербола. **371.** При $m > 0$. **372.** а) При $r = 7$; б) при $r = 5$. **373.** а) $(x-3)^2 + (y-8)^2 =$ $= 64$; б) $(x-3)^2 + (y-8)^2 = 9$. **376.** а) При $a = 7{,}5$; б) при $a = 0$, $a = 1$. **378.** а) $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 16$; б) $(x+5)^2 + (y-8)^2 = 16$; $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 16$; $(x+5)^2 + (y+8)^2 = 16$. **379.** а) $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x-3)^2 + y^2 = 4$; $(x-3)^2 + y^2 = 25$; в) $x^2 + (y-4)^2 = 4$;

$x^2+(y-4)^2=25$; г) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. **381.** а) $[-0{,}24; 0]$; б) $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$; г) $(-2; 12)$; д) y — любое число. **382.** а) $(5; 2)$; б) $(-0{,}75; -4{,}25)$. **383.** а) $(9; -7{,}5)$; б) $(30; -25)$. **385.** а) $(0; -4)$, $(4; 0)$; б) $(1; 2)$, $\left(-1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4}\right)$. **386.** а) $(-14; -13)$, $(12; 13)$; б) $(-2; -13)$, $(4; -7)$. **387.** а) $x_1=-5$, $y_1=4$; $x_2=-2\frac{1}{3}$; $y_2=7\frac{1}{5}$; б) $p_1=6$, $t_1=2$; $p_2=-5$, $t_2=-1\frac{2}{3}$. **388.** а) $(-2; -3)$, $(2; 3)$; б) $(2; 1)$, $(2; 5)$, $(3; 1)$, $(3; 5)$. **390.** а) $(-3; -2)$, $(3; 1)$; б) $(3; -5)$, $(5; -8)$. **391.** а) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$; $(\sqrt{6}; -\sqrt{6})$; б) $(-5; -4)$, $(5; 4)$. **392.** а) $(-4; -1)$, $(-4; 1)$, $(4; -1)$, $(4; 1)$; б) $(-6; -5)$, $(-6; 5)$, $(6; -5)$, $(6; 5)$; в) $(-7; -9)$, $(8; 6)$. **394.** а) $(0; 6)$; б) $(-4; 0)$. **395.** $(5{,}4; 10{,}8)$. **403.** а) Одну; б) ни одной. **405.** а), б), в) — Две. **406.** а) При $c=0$; 1; 2; б) при $c=-3$; 3; в) при $c=5$; 6; 7. **408.** При $b=3$. **411.** 16 км/ч и 18 км/ч. **412.** а), г), д) — Одно решение; б), в) — нет решений, е) — бесконечно много решений. **415.** При $k=0$ система имеет единственное решение; нет; нет. **416.** а) $k=-12$, $m=1$; б) $k=-12$, $m=-24$; в) $k=m=1$. **417.** а) $k=-1$; б) $k=-5$. **420.** 5 и 7. **422.** 6 и 8 см. **423.** 60 и 40 м. **424.** 210 см^2. **425.** 4,8 и 3,6 км/ч. **426.** 0,16 и 0,12 м/с. **427.** 6 и 5 см. **428.** 8 и 6 см. **429.** 5 и 12 см. **430.** 60 и 84 ч. **431.** 8 и 12 ч. **432.** 500 000 р.; 8% годовых. **433.** 10 и 6 ч. **434.** 5 дм^2. **435.** 1 и 1,2 кг. **436.** 4 и 5 км/ч. **437.** 4 и 5 км/ч. **438.** 60 и 40 км/ч. **439.** 1,2 и 1,4 г/см^3. **440.** 40 см^3 олова и 60 см^3 меди. **441.** 200 г; 20%. **446.** а) $(0; 6)$; б) $(-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$; в) $[-2; 2]$; г) $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$. **447.** а), б), г), д), е) — Да; в) — нет. **454.** а) Точка $(3; 2)$; б) множество точек, принадлежащих параболе $y=(x-2)^2+1$, и точек, расположенных ниже неё. **455.** а) $(x-2)^2+y^2 \leqslant 9$; б) $x^2+(y-4)^2 > 4$. **457.** а) Множеством решений является объединение первой и третьей четвертей координатной плоскости, включая оси координат; б) множеством решений является объединение второй и четвёртой четвертей координатной плоскости, кроме осей координат. **459.** $\frac{x-1}{x+1}$. **460.** $(1; 3)$, $(0; -2)$. **464.** а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$ **466.** а) $k=3$, $b<-1$; б) $k \neq 3$, b — любое число; в) $k = 3$, $b = -1$. **467.** а) $\begin{cases} y \leqslant 1{,}5x + 3, \\ y \leqslant -1{,}5x + 3, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 25, \\ x^2 + y^2 \leqslant 100. \end{cases}$

468. $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -2. \end{cases}$ **469.** а) -7; -6; б) -4; 12. **470.** $[5; 15]$. **472.** а) $(-4; -2)$, $(4; 2)$, $(1{,}5\sqrt{6}; -0{,}5\sqrt{6})$, $(-1{,}5\sqrt{6}; 0{,}5\sqrt{6})$; б) $(-3; -1)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$. **473.** а) $(-2; -2)$, $(2; 2)$, $\left(\frac{1 + 2\sqrt{39}}{5}; \frac{2 - \sqrt{39}}{5}\right)$, $\left(\frac{1 - 2\sqrt{39}}{5}; \frac{2 + \sqrt{39}}{5}\right)$; б) $(-5; -1)$, $(5; 1)$. **474.** а) $(-2; -3)$, $(2; 3)$; б) $(0; 0)$, $(-1; 0{,}4)$. **475.** а) $(0; 0)$, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{15}\right)$, $(1{,}5; 0{,}75)$; б) $(-9; 3)$, $\left(-\frac{1 + \sqrt{61}}{5}; -\frac{1 + \sqrt{61}}{10}\right)$, $\left(\frac{-1 + \sqrt{61}}{5}; \frac{-1 + \sqrt{61}}{10}\right)$. **476.** а) $(-4; -3)$, $(4; 3)$; б) $(-2; 5)$, $(2; -5)$, $(-5; -2)$, $(5; 2)$. **477.** а) $(-2; -1)$, $(2; 1)$; б) $(-1{,}75; 2{,}25)$, $(1{,}75; -2{,}25)$. **478.** а) $(-3; -4)$, $(-4; -3)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$; б) $(5; 1)$, $(1; 5)$. **479.** а) $(1; 2)$, $(2; 1)$; б) $(-2; -3)$, $(-3; -2)$, $(2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$, $(2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7})$. **480.** а) $(4; -1)$, $(-4; 1)$, $(0{,}5; -8)$, $(-0{,}5; 8)$; б) $(2; -1)$, $(-2; 1)$, $\left(\frac{2}{3}; -3\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; 3\right)$. **483.** а) $x^2 - y^2 = 25$; б) $y^4 + x^2y^2 - 9x^2 - 13y^2 + 36 = 0$; в) $x^3y + xy^3 - xy - 6x^2 - 6y^2 + 6 = 0$. **486.** а) При $a = -2$ и при $a = 6$; б) при $a = 7$; в) при $a = -2$; г) при $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и при $a = 1 + 2\sqrt{3}$. **487.** а) $(-3; -2)$, $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(3; 2)$; б) $(-3; -1)$, $(-3; 1)$, $(3; -1)$, $(3; 1)$. **491.** а) При $m = -\sqrt{10}$ и при $m = \sqrt{10}$; б) при $-\sqrt{10} < m < \sqrt{10}$. **492.** а) $(5; -2)$, $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$; б) $(0; -1)$, $(3; 5)$; в) $(6; -1)$, $(3; 5)$; г) $(6; 2)$, $(11; 7)$; д) $(4; 1)$; е) $(-1{,}25; 0{,}75)$, $(-5; -3)$. **493.** а) $(4; 0)$, $(0; -4)$; б) $(2; 3)$, $(-2; -1)$; в) $(0; -5)$, $(5{,}5; 6)$; г) $(5; -4)$, $(-0{,}5; 1{,}5)$. **494.** а) $(-6; 2)$, $(6; -2)$, $(-2; 6)$, $(2; -6)$; б) $(-10; -8)$, $(-10; 8)$, $(10; -8)$, $(10; 8)$. **495.** а) $(0; -5)$, $(1; -4)$; б) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$. **496.** а) $(-3; -4)$; б) решений нет. **497.** а) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $(1; 1)$; б) $(7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; в) $(3; 4)$, $(3; -4)$, $(0; 5)$; г) $(\sqrt{51}; -1)$,

$(-\sqrt{51}; -1)$. **498.** а) $(1{,}5; -2)$, $(10; 15)$; б) $(70; -28)$, $(4; 5)$; в) $(6; 8)$, $(8; 6)$; г) $(0{,}8; -1{,}2)$, $(6; 4)$. **501.** а) $(-4; -3)$, $(-4; 2)$, $(3; -3)$, $(3; 2)$; б) $(3 - 3\sqrt{2}; 3 + 3\sqrt{2})$, $(3 + 3\sqrt{2}; 3 - 3\sqrt{2})$, $(2; 4)$, $(4; 2)$; в) $(2; 3)$, $(3; 2)$; г) $(-3; -2)$, $(-1; -4)$, $(4; 5)$, $(6; 3)$. **502.** $a = -2$, $b = 2$ или $a = -\frac{2}{3}$, $b = 6$. **503.** 18 и 12. **504.** 60 и 20 или 25 и 37,5. **505.** 10 и 0 или 26 и 24. **506.** 36. **507.** $\frac{2}{3}$ или $\frac{6}{19}$. **508.** $\frac{5}{4}$. **509.** 9 и 12 см. **510.** 6 ч. **511.** 12 и 8 ч. **512.** 40 и 50 км/ч. **513.** 40 и 50 км/ч. **514.** 6 и 4 км/ч. **518.** а) Круг с центром в точке $(2; 4)$ и радиусом $\sqrt{20}$; б) множество точек координатной плоскости, расположенных выше параболы $y = -(x - 3)^2 + 5$. **520.** а) Объединение двух прямых углов, образованных прямыми $x = 1$ и $y = 1$ и содержащих точки $(2; 2)$ и $(0; 0)$. **524.** а) Объединение двух областей A и B, где A — верхняя полуплоскость ($y \geqslant 0$), из которой исключён полукруг ($x^2 + y^2 \leqslant 1$), B — полукруг, расположенный ниже оси x.

Глава V

531. а) 65; б) 230; в) 5150. **532.** $a_1 = -20$, $a_2 = -18$, $a_3 = -14$, $a_4 = -8$. **536.** $x = 3$, $y = 6$. **537.** а) $\pm\sqrt{1{,}5}$; б) $\pm\sqrt{4{,}5}$. **538.** а) $[-7; 6]$; б) $(-11; -4) \cup \cup (1; +\infty)$. **544.** а) 4; б) 3. **547.** 28 м. **548.** 60 км/ч. **549.** 7,5 и 15 см. **550.** а) 12; б) 100. **551.** а) 3; б) $-3{,}5$. **552.** а) 1,5; б) 0,8. **555.** а) $c_1 = 21$, $d = 1{,}5$; б) $c_1 = 38$, $d = -2$. **556.** $x_1 = -100$, $d = 6{,}2$. **557.** а) Да; б) нет. **558.** а) Нет; б) да. **559.** а) Для первых тридцати членов; б) для всех членов, начиная с тридцать первого. **560.** a_{14} — первый положительный член, $a_{14} = 0{,}5$. **565.** $(2; -4)$, $(-0{,}5; 3{,}5)$. **566.** а) 0; -8; 4; б) 10. **568.** а) 5; б) 10 000; в) $\frac{1}{32}$; г) 3. **571.** а) 63; б) 86,4. **572.** б) $S_{50} = 2700$, $S_{100} = 10\,400$, $S_n = (n + 4)n$. **573.** 670. **574.** а) $n(n + 1)$; б) n^2. **575.** а) 11 325; б) 7070; в) 11 400; г) 1197. **576.** 1192. **577.** 275. **578.** 55. **579.** 199,5. **580.** 125 м. **582.** 15 рядов; 465 шаров. **583.** 10. **584.** 12. **585.** $a_1 = 0{,}8$, $d = 1{,}2$. **586.** а) Нет; б) да. **587.** а) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -1\right)$, $\left(1; \frac{2}{3}\right)$,

$\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$; б) (2; 5), (2; –5), (–2; 5), (–2; –5). **591.** а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{10}{27}$; в) –32; г) $-\frac{1}{25}$; д) $\frac{4}{27}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **595.** $\frac{3}{1024}$ см^2. **596.** а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{56}{125}$. **597.** а) 3 или –3; б) 0,4 или –0,4. **598.** а) 1000; б) $\frac{1}{3}$ или $-\frac{1}{3}$. **599.** а) $\frac{1}{25}$ или $-\frac{1}{25}$; б) –162; в) –0,001 или 0,001. **601.** $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. **602.** 96. **610.** 3, 7, 11 или 12, 7, 2. **611.** 2, 5, 8. **613.** (5,5; –0,5). **614.** а) $(-\infty; -2] \cup [8{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (2{,}5; +\infty)$; в) $(-2{,}5; 4]$. **616.** б) $147\frac{7}{9}$; в) –63. **617.** а) –39 364; б) 171. **620.** а) 205,9; б) $25\frac{34}{81}$. **621.** а) $134\frac{4}{9}$; б) –274,5. **622.** –364. **623.** 2186. **624.** 5. **626.** а) $3\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{5}$. **627.** а) $(-\infty; 0] \cup [1{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **640.** а) $a_1 = -34$, $a_2 = -26{,}5$, $a_5 = -4$; б) $a_1 = -10{,}5$, $a_3 = -6{,}5$, $a_5 = -2{,}5$, $a_6 = -0{,}5$. **644.** а) $20 - 2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3} - 7$. **645.** а) 15; б) 15. **646.** а) Да; б) да. **647.** а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{6}$. **650.** а) –0,1; б) 0. **651.** а) $10\frac{5}{12}$; б) $55\sqrt{3}$. **652.** а) 5000; б) –780. **654.** а) $a_1 = 6{,}8$, $S_n = 55{,}2$; б) $n = 20$, $a_n = 60$; в) $a_1 = 0{,}5$, $n = 100$ или $a_1 = 0$, $n = 101$; г) $d = -1$, $n = 30$. **655.** $x_1 = -3{,}5$, $d = 0{,}5$. **659.** а) 11; б) 3. **660.** –75. **661.** а) $x^{\frac{n - n^2}{2}}$; б) $x^{\frac{n^2 + n}{2}}$. **662.** а) 46,2; б) –45,5. **663.** 1600. **664.** а) 840; б) –51,6. **666.** Да; $x_5 = 1$. **667.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **672.** а) $\frac{1}{18}$; б) $12\sqrt{6}$. **677.** а) $x_1 = 27$, $x_n = \frac{1}{3}$; б) $q = 2$, $n = 4$; в) $n = 6$, $x_n = -\frac{1}{64}$; г) $x_1 = 2\sqrt{3}$, $n = 5$. **678.** $q = 5$, $x_1 = 3$. **679.** 176.

Упражнения для повторения курса 7—9 классов

681. а) –10; б) $\frac{5}{6}$; в) –34; г) $-1\frac{2}{3}$. **682.** а) 7800 р.; б) снизилась на 22%. **683.** 16%. **684.** а) 30%; б) 20%. **685.** 12,5%. **686.** а) 88 200 р.; б) 109 200 р. **687.** а) $10\sqrt{2}$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; в) 3; г) 14. **688.** $73 - 36\sqrt{6}$.

691. а) -2; б) 1. **692.** а) $48\frac{10}{27}$; б) $-262\frac{5}{8}$. **694.** а) 46; б) 18. **695.** -32. **696.** $42\frac{5}{8}$. **700.** а) 2; б) 15,1; в) -2; г) $-1{,}5$. **705.** ж) $\frac{a}{a+6}$; з) $\frac{2x-3}{2x+2}$; и) $\frac{m-1}{m+2}$. **706.** а) 4; б) $\frac{1}{3}$. **707.** а) $-\frac{1}{x}$; б) $\frac{10}{9-y^2}$; в) $\frac{1}{a-2}$; г) $\frac{5}{4b^2-6b+9}$. **708.** а) $\frac{4b^3-16b^2}{a}$; б) $\frac{3x}{2xy-4y^2}$; в) $\frac{p-5}{2p}$; г) $\frac{2n-3m}{m^2-2mn+4n^2}$. **709.** а) $\frac{x-7}{6}$; б) $-\frac{y^3+4y^2}{2}$; в) $\frac{b}{4a}$; г) $5(c-1)$. **710.** а) $\frac{10-2m}{m-3}$; б) $\frac{a^2-3a+9}{a^2-5a+6}$; в) $\frac{2}{x+2}$; г) 2. **711.** а) $\frac{1}{1+3m}$; б) $\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}$; в) $\frac{1}{a}$; г) $\frac{a^2-3a-12}{a^2+3a+2}$; д) 1; е) $\frac{3}{9x^2+3x+1}$. **712.** а) 30; б) 4,25. **714.** а) $2x^2y^3$; б) $\frac{4x^{16}}{9y^{18}}$; в) $\frac{8a}{b^2}$; г) $\frac{a^2c^3}{100b^{10}}$. **715.** а) 9; б) $33\frac{1}{3}$; в) 15; г) 2,5. **718.** а) $2\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{2a}-2$; в) $4\sqrt{xy}$; г) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$. **719.** в) $\sqrt{a}-1$; г) $\frac{1}{\sqrt{b}+1}$; д) $\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{y}}$; е) $\frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{cd}+d}$. **722.** а) $-4{,}5$; б) x — любое число; в) -1; г) корней нет. **723.** 6,4 км. **724.** 360 км. **725.** 4 и 12 км/ч. **726.** 9, 6, 16 и 15. **727.** 450 г. **730.** а) $m \leqslant 2{,}5$; б) $m \geqslant -2$; в) при любом m; г) $m \leqslant -4$ или $m \geqslant 4$. **731.** а) $k < -\frac{16}{15}$; б) $k > \frac{3}{8}$; в) $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$; г) таких значений k нет. **732.** а) 0; -3; б) $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; 7; г) $1\frac{5}{8}$; 3; д) $-18\frac{1}{7}$; -1; е) $-\frac{26}{35}$; 2. **733.** 110 м. **734.** 25. **735.** 14. **736.** 240 м. **737.** а) -1; в) -1; 3; г) -14; 1; д) 1; 2; е) -5; ж) $-1\frac{1}{3}$; з) -1; $\frac{1}{5}$. **738.** 15 и 10 ч. **739.** 60 и 80 км/ч. **740.** 15 км/ч. **741.** 2 км/ч. **742.** 20 км/ч. **743.** 10 деталей. **744.** 25 страниц. **745.** 70 км/ч. **746.** 12 км/ч. **748.** а) $\pm\frac{1}{2}$; ± 2; б) $\pm\frac{2}{3}$; в) $\pm\sqrt{5}$; г) ± 1. **749.** а) $-0{,}6$; 0,3; б) 0; -1. **750.** а) 0; ± 4; б) 0; ± 1; в) 0; г) 0; 2,5; д) -8; 0; 2; е) -3; 0; 2; ж) -1; ± 3; з) $\frac{1}{2}$. **751.** а) 2; б) $-0{,}1$; в) 0,3; г) $\pm 2\sqrt{3}$; д) -1; е) $\pm\sqrt{2}$. **754.** а) $(4; -1)$; б) $(2{,}45; 0{,}37)$; в) $(15; 25)$; г) $(0{,}32; -0{,}86)$. **755.** а) $(1; 2)$; б) $(13; 8)$. **757.** а) 5; б) 3; в) $\sqrt{34}$.

760. а) $5x + y = 30$; б) $7x + 4y = 26$. **763.** 60 и 40 деталей. **764.** 80 и 50 км/ч. **765.** 48 и 65 ц/га. **766.** 60 и 20 км/ч. **767.** В отношении 2 : 3. **768.** В отношении 3 : 1. **770.** а) $(-2; -4)$, $(4; 8)$; б) $(5; 3)$; в) $(1; 4)$, $(4; 1)$; г) $(3; -1)$, $(-3; 1)$; д) $(0; 4)$, $\left(2\frac{3}{4}; 13\frac{5}{8}\right)$; е) $(1; 2)$, $\left(\frac{1}{8}; -1\frac{1}{2}\right)$. **771.** а) $(1; 5)$, $(5; 1)$; б) $(3; -2)$, $\left(-2\frac{1}{3}; 14\right)$; в) $(-3; -5)$, $(-5; -3)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$; г) $(-4; -2)$, $(4; 2)$. **773.** При $c = -8$. **774.** Пересекаются в точке $(1; 4)$. **775.** При $a = \frac{1}{3}$. **776.** $\frac{6}{4}$. **777.** $\frac{3}{5}$. **778.** 9 и 40 см. **779.** 11 и 8 см. **780.** 15 и 30 дней. **781.** 3 и 6 дней. **783.** $a_1 = 10$, $d = 10$. **784.** -2. **786.** 7,2. **787.** -25. **788.** 80. **789.** а) $\frac{1}{128}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ или $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **790.** $\frac{2}{27}$. **791.** 31,5. **792.** 16,5. **793.** 635. **794.** 18; 12; 8. **795.** $4\frac{4}{9}$. **798.** а) $m > -4$; б) $x > -1{,}2$; в) $a \leqslant 16$; г) $b \geqslant 4$; д) $x < 0{,}1$; е) $m > -4$; ж) $y \leqslant 10$; з) $a \leqslant -0{,}5$. **799.** а) $x < 3$; б) $a > -1{,}5$; в) $y \geqslant 0{,}16$; г) $m \geqslant 5\frac{1}{3}$; д) $a > 11$; е) $y < -0{,}4$. **800.** а) При $b > -62$; б) при $b < -0{,}76$. **802.** а) $(-\infty; 2{,}5)$; б) $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right)$; г) $(-\infty; -0{,}8)$. **803.** а) $(1; 3)$; б) решений нет; в) $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$; г) решений нет. **804.** а) $(-3; 0)$; б) решений нет. **805.** а) $(-5{,}5; 1)$; б) $(4; +\infty)$; д) $(-29; 3)$; е) решений нет. **806.** а) -3; -2; -1; 0; б) 2; 3; 4; 5; 6; 7. **807.** а) $(-3; 6)$; б) $[-27; -7]$; в) $[6; 8)$; г) $[-0{,}56; 1{,}2]$. **808.** а) При $0 \leqslant x \leqslant 5$; б) при $-17 \leqslant x \leqslant 13$. **809.** а) $(-5; 3)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3] \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; г) $(-1; 1{,}5)$; д) $[-0{,}5; 0{,}5]$; е) $(-\infty; -1{,}2) \cup (0; +\infty)$; ж) $(-\infty; -0{,}2) \cup (0{,}2; +\infty)$; з) $(-\infty; 0) \cup (0{,}8; +\infty)$. **810.** а) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-13; -1)$; г) $(-4; 7)$. **812.** а) $[-1; 2{,}5]$; б) $(-\infty; 2] \cup [3; 4{,}5]$; в) 3; г) $[0; +\infty)$. **813.** а) 1; 2; 3; 5; 6; б) 2; 3; 4. **814.** а) При $x \geqslant \frac{1}{3}$; б) при $x \leqslant 5$; в) при $-3 \leqslant x \leqslant 5$; г) при $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 1{,}5$; д) при $0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$; е) при $x \geqslant 5\frac{2}{3}$. **815.** а) x — любое число; $x \neq 2{,}5$; $x \geqslant 2{,}5$; б) x — любое число; $x \neq -4$ и $x \neq 0{,}5$; $x < -4$ и $x > 0{,}5$; в) x — любое число; x — любое число; x — любое число. **827.** а) Убывает в промежутке $(-\infty; -2{,}5]$ и возрастает в промежутке $[-2{,}5; +\infty)$; б) возрастает в промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$ и убывает в промежутке $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$; в) убывает в промежутке $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ и возрастает в промежутке $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; г) возрастает в промежутке $(-\infty; 0{,}3]$ и убывает в промежутке $[0{,}3; +\infty)$. **830.** а) $(2; -7)$; б) $(2; -16)$, $(8; -34)$; в) $(-1; -7)$, $(1; -5)$; г) $(-3; 33)$. **831.** а) $y = -2x - 4$; б) $y = -2x + 4$; в) $y = 2x + 4$.

Задачи повышенной трудности

836. -2; -1; $-0{,}5$; 1; 2. **839.** При $a = 1$. **842.** $(2; 0)$, $(4; 0)$. **843.** При $a = 3$; $(1{,}5; -5{,}25)$. **845.** При $m < -\frac{1}{3}$. **846.** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **847.** $\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{4}$ или $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. **848.** $a = 1{,}5$ или $a = -2{,}5$. **849.** При $m \in (-1; 3)$. **850.** При $a < 1$. **851.** $(13; -15)$, $(6; -1)$. **852.** а) $(-7; -10)$, $(10; 7)$; б) $(2; 3)$, $(3; 2)$. **853.** $(0; 0)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(-3; -2)$, $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$, $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$, $(-\sqrt{19}; \sqrt{19})$, $(\sqrt{19}; -\sqrt{19})$. **854.** $(1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$, $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$. **855.** $-\sqrt{\sqrt{10} - 3} - 4$; $\sqrt{\sqrt{10} - 3} - 4$. *Указание.* Выполните подстановку $y = x + 4$. **856.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **857.** $(1; 8)$, $(8; 1)$. **858.** $(128; 2)$, $(2; 128)$. **859.** $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{15}$ или $\frac{5}{24}$. **860.** $(1; 2; 3)$, $(-3; -4; -5)$. **861.** $m = 23$. **863.** 50 ч, 75 ч и 60 ч. **864.** Существует; 22. **865.** $c_n = (2n - 1)^2$. **866.** $2 \leqslant n \leqslant 20$. **867.** $\frac{n}{2n+1}$. **873.** -1, -1, -1; -1, 2, -4; -4, 2, -1; -3, 3, -3. **874.** 1, 4, 7. **876.** а) 2; б) 1. **878.** $x = -\sqrt{3}$, $y = 4$. **879.** $x_1 = 8$, $y_1 = -8$, $z_1 = 8$; $x_2 = -8$, $y_2 = 8$, $z_2 = 8$. **880.** $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $z_1 = 2$; $x_2 = 7$, $y_2 = 3$, $z_2 = 4$; $x_3 = 7$, $y_3 = 4$, $z_3 = 3$; $x_4 = 5$, $y_4 = 2$, $z_4 = 7$. **882.** $\frac{2}{3}$. **884.** 1029. **885.** 150 и 810. **886.** 54 и 6; 98 и 2. **889.** 0; 63. **897.** 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ