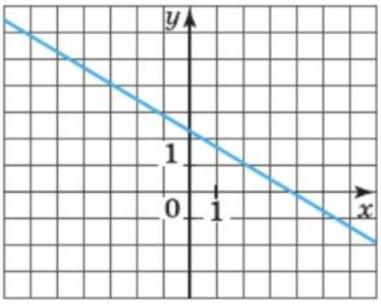
115. Задайте уравнением:

а) функцию вида $y = kx + b$, график которой изображён на рисунке 16.

1.



2.

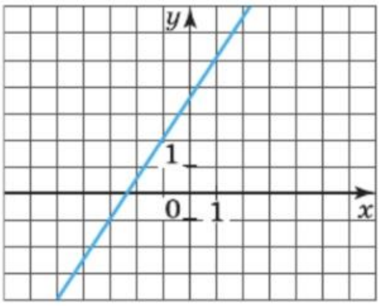
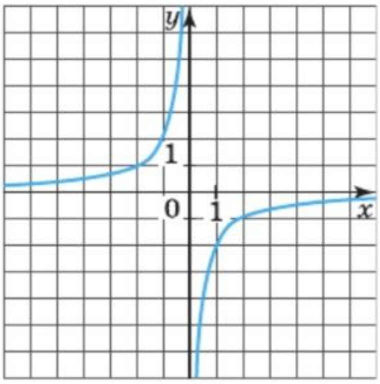


Рис. 16

б) функцию вида $y = \dfrac{k}{x}$, график которой изображён на рисунке 17.

1.



2.

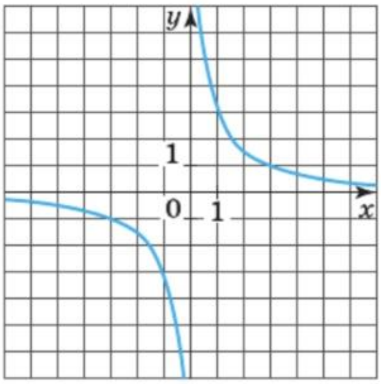
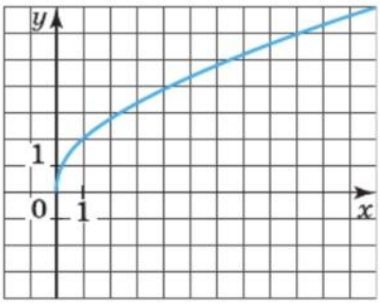


Рис. 17

в) функцию вида $y = \sqrt{kx}$, график которой изображён на рисунке 18.

1.



2.

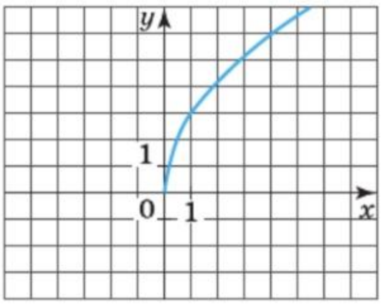


Рис. 18

П

116. Найдите первые четыре цифры длины окружности в сантиметрах, радиус которой равен 2,35 см.

117. За одну поездку израсходовали более трёх, но менее четырёх литров бензина. Укажите точность приближённого значения израсходованного бензина, если за приближённое значение принять:
а) 3 л; б) 4 л; в) среднее арифметическое 3 л и 4 л.

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте определение понятия функции. Что называют областью определения функции и множеством значений функции? Как обозначаются эти понятия?

2 Сформулируйте определения чётной функции, нечётной функции. Приведите примеры чётной функции, нечётной функции. Может ли функция не обладать ни свойством чётности, ни свойством нечётности?

3 Перечислите и проиллюстрируйте рисунком свойства функции:
а) $y = kx,\ k < 0$;
б) $y = kx + b,\ k > 0,\ b < 0$;
в) $y = \frac{k}{x},\ k < 0$;
г) $y = x^2$;
д) $y = x^3$;
е) $y = \sqrt{x}$;
ж) $y = |x|$.

§4 КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

9. Функция $y = ax^2$, её график и свойства

Одной из важных функций, к изучению которой мы переходим, является квадратичная функция.

Определение. Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Областью определения квадратичной функции является множество всех чисел: $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

Примером квадратичной функции является зависимость пути от времени при равноускоренном движении. Если тело движется с ускорением a (м/с^2) и к началу отсчёта времени t прошло путь s_0 (м), имея в этот момент скорость v_0 (м/с), то зависимость пройденного пути s (м) от времени t (с) выражается формулой

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Если, например, $a = 6$, $v_0 = 5$, $s_0 = 20$, то $s = 3t^2 + 5t + 20$.

Изучение квадратичной функции начнём с частного случая — функции $y = ax^2$.

При $a = 1$ формула $y = ax^2$ принимает вид $y = x^2$. С этой функцией вы уже встречались. Её графиком является *парабола*.

Построим график функции $y = 2x^2$. Составим таблицу значений этой функции.

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Построим точки, координаты которых указаны в таблице. Соединив их плавной линией, получим график функции $y = 2x^2$ (рис. 19, *а*).

При любом $x \neq 0$ значение функции $y = 2x^2$ больше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вверх так, чтобы расстояние от этой точки до оси x увеличилось в 2 раза, то она перейдёт в точку графика функции $y = 2x^2$. При этом каждая точка графика функции $y = 2x^2$ может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$. Иными словами, график функции $y = 2x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в 2 раза (рис. 19, *б*).

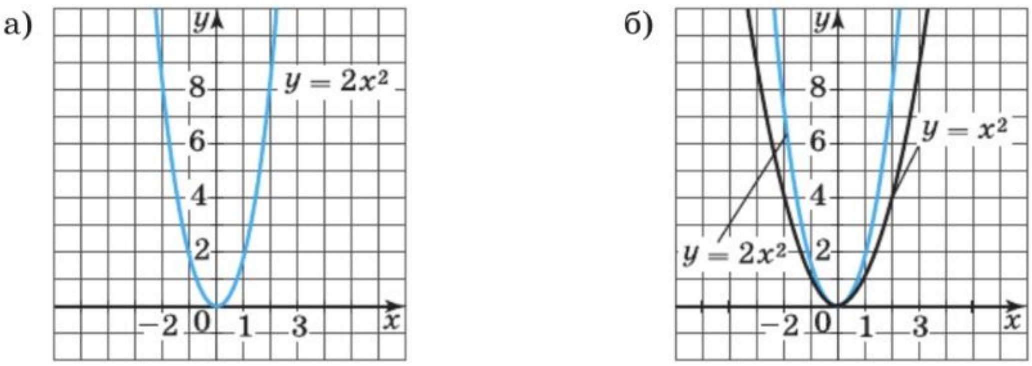


Рис. 19

Построим теперь график функции $y = \frac{1}{2}x^2$. Для этого составим таблицу её значений.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 20, *а*).

При любом $x \neq 0$ значение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ меньше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вниз так, чтобы расстояние от этой точки до оси x уменьшилось в 2 раза, то она перейдёт в точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$, причём каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$ (рис. 20, *б*). Таким образом, график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ сжатием к оси x в 2 раза.

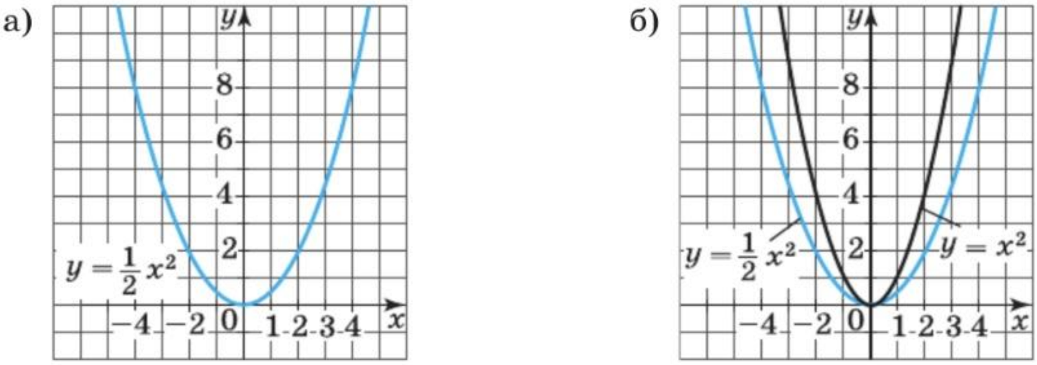


Рис. 20

Вообще график функции $y = ax^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в a раз, если $a > 1$, и сжатием к оси x в $\frac{1}{a}$ раза, если $0 < a < 1$.

Рассмотрим теперь функцию $y = ax^2$ при $a < 0$.

Построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$, для чего составим таблицу значений этой функции.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−8	−4,5	−2	−0,5	0	−0,5	−2	−4,5	−8

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ (рис. 21, *а* на с. 46).

Сравним графики функций $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 21, *б*). При любом $x \neq 0$ значения этих функций являются противоположными числами. Значит, соответствующие точки графиков симме-

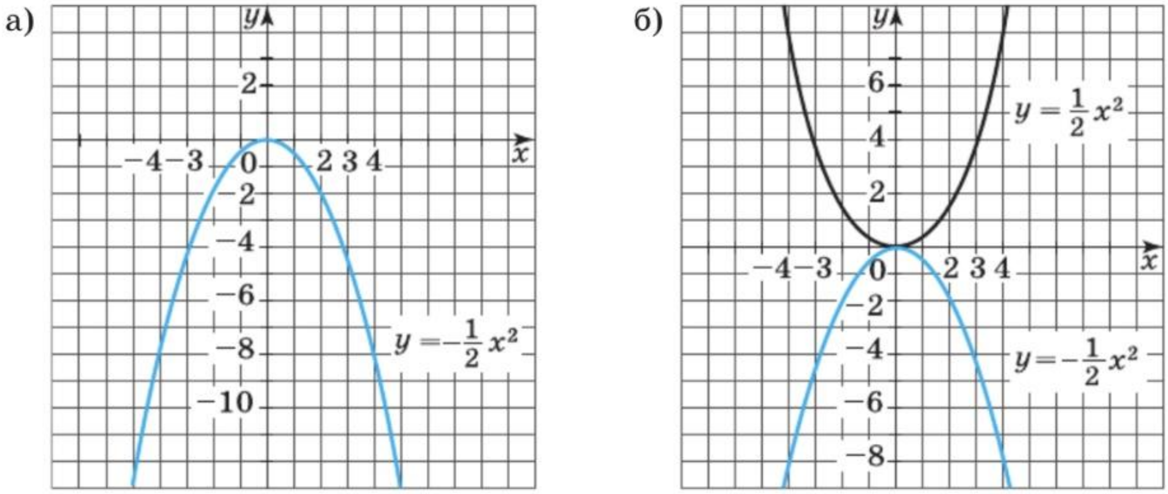


Рис. 21

тричны относительно оси x. Иными словами, график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ может быть получен из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью симметрии относительно оси x.

Вообще графики функций $y = ax^2$ и $y = -ax^2$ (при $a \neq 0$) *симметричны относительно оси* x.

График функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$, как и график функции $y = x^2$, называется *параболой*.

Сформулируем свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$ и укажем, как они отражаются на её графике.

1. **Область определения функции** — множество всех чисел, т. е. $\boldsymbol{D(y) = (-\infty; +\infty)}$.
2. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** График функции проходит через начало координат.
3. **Если $x \neq 0$, то $y > 0$.** График функции расположен в верхней полуплоскости.
4. **Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции;** график функции симметричен относительно оси y. **Функция является чётной.**
5. **Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.**
6. **Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет.**
7. **Множество значений функции — множество неотрицательных чисел, т. е. $E(y) = [0; +\infty)$.**

Докажем свойство 5.

Пусть x_1 и x_2 — два значения аргумента, причём $x_2 > x_1$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции. Составим разность $y_2 - y_1$ и преобразуем её:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Так как $a > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то произведение

$$a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

имеет тот же знак, что и множитель $x_2 + x_1$.
Если числа x_2 и x_1 принадлежат промежутку $(-\infty; 0]$, то множитель $x_2 + x_1$ отрицателен.
Если числа x_2 и x_1 принадлежат промежутку $[0; +\infty)$, то множитель $x_2 + x_1$ положителен.
В первом случае $y_2 - y_1 < 0$, т. е. $y_2 < y_1$; во втором случае $y_2 - y_1 > 0$, т. е. $y_2 > y_1$.
Значит, в промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает, а в промежутке $[0; +\infty)$ возрастает.

Теперь сформулируем свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$ и укажем, как они отражаются на её графике.

1. **Область определения функции** — множество всех чисел, т. е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** График функции проходит через начало координат.
3. **Если $x \neq 0$, то $y < 0$.** График функции расположен в нижней полуплоскости.
4. **Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции;** график функции симметричен относительно оси y. **Функция является чётной.**
5. **Функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.**
6. **Наибольшее значение, равное нулю, функция принимает при $x = 0$, наименьшего значения функция не имеет.**
7. **Множество значений функции — множество неположительных чисел, т. е. $E(y) = (-\infty; 0]$.**

Доказательство свойства 5 проводится аналогично тому, как это было сделано для функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

Из перечисленных свойств следует, что при $a > 0$ ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Ось y является осью симметрии параболы. Точку пересечения параболы с её осью симметрии называют *вершиной параболы*. Вершиной параболы $y = ax^2$ является начало координат.

Построение графика, симметричного данному относительно оси x, растяжение графика от оси x или сжатие к оси x — различные виды *преобразования графиков функции*. Преобразования графиков, рассмотренные нами для функции $y = ax^2$, применимы к любой функции.

График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси x.

График функции $y = af(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения от оси x в a раз, если $a > 1$, и с помощью сжатия к оси x в $\frac{1}{a}$ раза, если $0 < a < 1$.

Упражнения

118. Постройте график функции $y = \frac{1}{4}x^2$. Найдите:

а) значение y при $x = -2{,}5;\ -1{,}5;\ 3{,}5$;
б) значения x, при которых $y = 5;\ 3;\ 2$;
в) промежуток возрастания и промежуток убывания функции.

119. Постройте график функции $y = -2x^2$ и найдите:

а) значение y при $x = -1{,}5;\ 0{,}6;\ 1{,}5$;
б) значения x, при которых $y = -1;\ -3;\ -4{,}5$;
в) промежуток возрастания и промежуток убывания функции.

120. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = x^2,\ y = 1{,}8x^2 \text{ и } y = \frac{1}{3}x^2.$$

Сравните значения этих функций при $x = 0{,}5$, $x = 1$ и $x = 2$.

121. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = 0{,}4x^2 \text{ и } y = -0{,}4x^2.$$

Какова область значений каждой из этих функций?

122. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции:

а) $y = -1{,}5x^2$; б) $y = 0{,}8x^2$.

Перечислите свойства этой функции.

123. Изобразите схематически график и перечислите свойства функции:

а) $y = 0{,}2x^2$; б) $y = -10x^2$.

124. Пересекаются ли парабола $y = 2x^2$ и прямая:

а) $y = 50$; в) $y = -8$;
б) $y = 100$; г) $y = 14x - 20$?

Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

125. Принадлежит ли графику функции $y = -100x^2$ точка:

а) $M(1{,}5;\ -225)$; б) $K(-3;\ -900)$; в) $P(2;\ 400)$?

126. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = -x^2$ и $y = 2x - 3$. Выполните графическую иллюстрацию.

127. Изобразите схематически графики функций $y = 0{,}01x^2$ и $y = 10x$. Графики этих функций имеют общую точку $O(0;\ 0)$. Имеют ли графики этих функций другие общие точки? При положительном ответе найдите координаты этих точек.

128. При каких значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку?

129. Площадь круга S (см^2) вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r (см) — радиус круга. Постройте график функции $S = \pi r^2$ и найдите по графику:

а) площадь круга, если его радиус равен 1,3 см; 0,8 см; 2,1 см;
б) радиус круга, площадь которого равна 1,8 см^2; 2,5 см^2; 6,5 см^2.

130. Площадь поверхности куба y (см^2) зависит от ребра куба x (см). Задайте эту зависимость формулой. Постройте её график и найдите по графику:

а) площадь поверхности куба, если его ребро равно 0,9 см; 1,5 см; 1,8 см;
б) длину ребра, если площадь поверхности куба равна 7 см^2; 10 см^2; 14 см^2.

П

131. Сколько корней имеет квадратный трёхчлен:

а) $3x^2 - 8x + 2$; б) $-\frac{1}{2}y^2 + 6y - 18$; в) $m^2 - 3m + 3$?

132. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2a - 1}{10a^2 - a - 2}$; б) $\dfrac{6a^2 - 5a + 1}{1 - 4a^2}$.

133. Решите уравнение $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$ и отметьте его корни на координатной прямой.

10. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

Рассмотрим другие частные случаи квадратичной функции.

Пример 1. Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

▶ С этой целью в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

(1)

График функции $y = \frac{1}{2}x^2$ изображён на рисунке 22, *а*.

Чтобы получить таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ при тех же значениях аргумента, следует к найденным значениям функции $y = \frac{1}{2}x^2$ прибавить 3.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	11	7,5	5	3,5	3	3,5	5	7,5	11

(2)

Построим точки, координаты которых указаны в таблице (2), и соединим их плавной линией. Получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ (рис. 22, *б*).

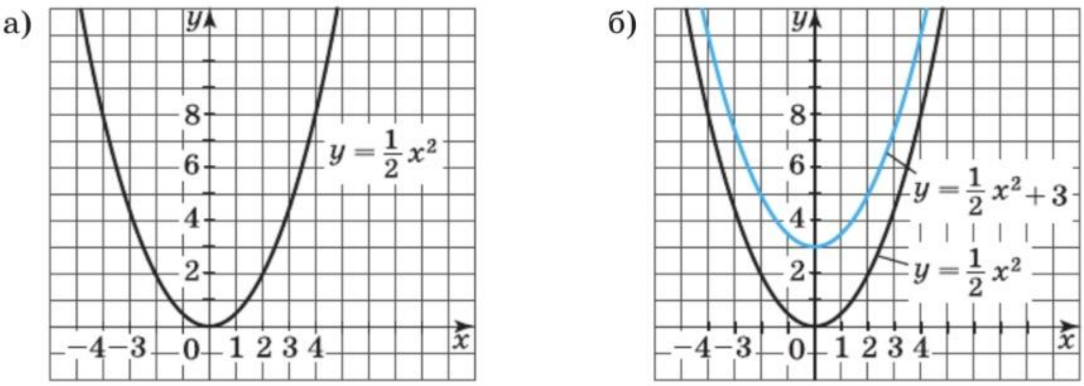


Рис. 22

Легко понять, что каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ соответствует единственная точка $(x_0;\ y_0 + 3)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ и наоборот. Значит, если переместить каждую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вверх, то получим соответствующую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$. Иначе говоря, каждую точку второго графика можно получить из некоторой точки первого графика с помощью параллельного переноса на 3 единицы вверх вдоль оси y.

График функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ — парабола, полученная в результате сдвига вверх на 3 единицы графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. ◁

Вообще график функции $y = ax^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

Пример 2. Арка моста имеет форму параболы (рис. 23, *а*). Мост удерживают три опоры, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Найдём длины этих опор, если известно, что $AB = 80$ м, $OC = 8$ м, $AK = KO = OL = LB$.

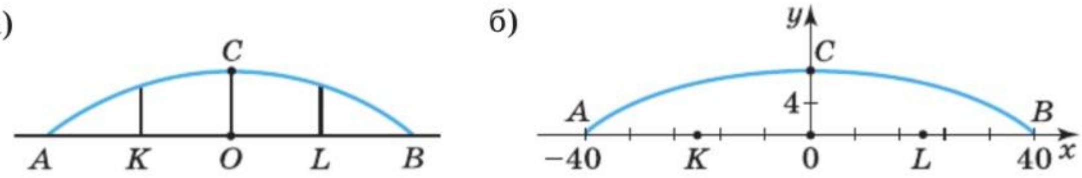


Рис. 23

▶ Составим уравнение параболы, выбрав систему координат так, как показано на рисунке 23, *б*. Очевидно, что это уравнение имеет вид $y = ax^2 + n$. Найдём координаты точек A, B и C. Имеем

$$A(-40;\ 0),\ B(40;\ 0),\ C(0;\ 8).$$

Вершиной параболы является точка $C(0;\ 8)$. Значит, $n = 8$. Для того, чтобы найти коэффициент a, подставим в уравнение $y = ax^2 + 8$ координаты точки $B(40;\ 0)$: $0 = a \cdot 1600 + 8$.

Отсюда $a = -\frac{8}{1600} = -0{,}005$. Мы получили уравнение параболы

$$y = -0{,}005x^2 + 8.$$

Теперь нетрудно найти длины опор:
если $x = -20$, то $y = 6$;
если $x = 0$, то $y = 8$;
если $x = 20$, то $y = 6$.
Значит, опоры моста имеют длины 6, 8 и 6 м. ◁

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ и выясним, что представляет собой её график.

▶ Для этого в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$.

Для построения графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ воспользуемся таблицей (1). Составим теперь таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$. При этом в качестве значений аргумента выберем те, которые на 5 больше соответствующих значений аргумента в таблице (1). Тогда соответствующие им значения функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$ будут те же, которые записаны во второй строке таблицы (1).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

(3)

Построим график функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$, отметив точки, координаты которых указаны в таблице (3) (рис. 24). Нетрудно заметить, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ соответствует единственная точка $(x_0 + 5; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$ и наоборот.

Значит, если переместить каждую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 5 единиц вправо, то получим соответствующую точку графика функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$.

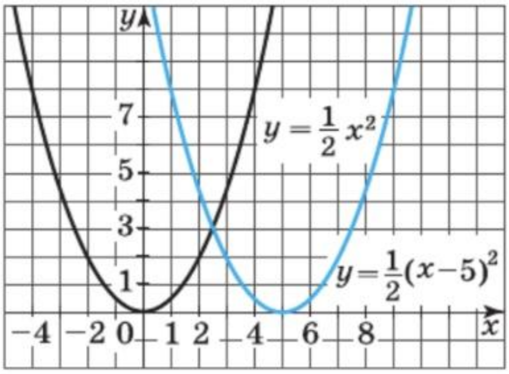


Рис. 24

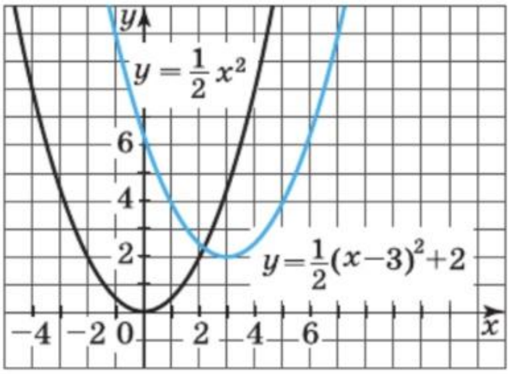


Рис. 25

Иначе говоря, каждую точку второго графика можно получить из соответствующей точки первого графика с помощью параллельного переноса на 5 единиц вправо вдоль оси x.

График функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$ — парабола, полученная в результате сдвига вправо на 5 единиц графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. ◁

Вообще график функции $y = a(x - m)^2$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

Полученные выводы позволяют понять, что представляет собой график функции $y = a(x - m)^2 + n$. Рассмотрим, например, функцию $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$. Её график можно получить из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх (рис. 25).

Вообще график функции $y = a(x - m)^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$, и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

Заметим, что производить параллельные переносы можно в любом порядке: сначала выполнить параллельный перенос вдоль оси x, а затем — вдоль оси y или наоборот.

Полученные нами выводы о преобразовании графиков применимы к любым функциям.

График функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

График функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

График функции $y = f(x - m) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

При вращении параболы вокруг её оси получается фигура, которую называют *параболоидом*. Если внутреннюю поверхность параболоида сделать зеркальной и направить на неё пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы, то отражённые лучи соберутся в одной точке, которую называют *фокусом* (рис. 26).

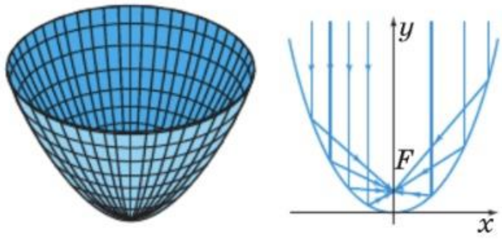


Рис. 26

В то же время если источник света поместить в фокусе, то отражённые от зеркальной поверхности параболоида лучи окажутся параллельными и не рассеиваются.

Первое свойство позволяет получить в фокусе параболоида высокую температуру. Согласно легенде это свойство использовал древнегреческий учёный Архимед (287—212 до н. э.). При защите Сиракуз в войне против римлян он построил систему параболических зеркал, которая позволила сфокусировать отражённые солнечные лучи на кораблях римлян. В результате температура в фокусах параболических зеркал оказалась настолько высокой, что на кораблях вспыхнул пожар и они сгорели. Но это не более, чем легенда. Вряд ли удалось получить столь высокую температуру указанным способом.

Второе свойство используется, например, при изготовлении прожекторов и автомобильных фар.

Упражнения

134. Изобразите схематически график каждой функции (отметьте вершину параболы и направление её ветвей):

а) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$;

б) $y = -\frac{1}{3}x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$, $y = -\frac{1}{3}x^2 - 1$;

в) $y = \frac{1}{5}x^2$, $y = \frac{1}{5}(x - 3)^2$, $y = \frac{1}{5}(x + 3)^2$.

135. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4$; в) $y = (x - 5)^2$;
б) $y = -x^2 + 3$; г) $y = (x + 3)^2$.

136. Используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2$; в) $y = (x + 4)^2$;
б) $y = -x^2 - 1$; г) $y = -(x - 3)^2$.

137. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = 10x^2 + 5$; в) $y = -6x^2 + 8$; д) $y = -(x - 8)^2$;
б) $y = -7x^2 - 3$; г) $y = (x - 4)^2$; е) $y = -3(x + 5)^2$?

138. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$; в) $y = -4(x - 3)^2 + 5$;

б) $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$; г) $y = -4(x + 2)^2 - 2$.

139. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$; б) $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 3$.

140. Используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте график функции:
а) $y = (x - 2)^2 + 3$; б) $y = -(x - 3)^2 + 5$.

141. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ постройте график функции:
а) $y = (x + 3)^2 - 4$; б) $y = -(x + 4)^2 - 2$.

142. Найдите нули функции (если они существуют):
а) $y = 12x^2 - 3$; б) $y = 6x^2 + 4$; в) $y = -x^2 - 4$.

143. При каких значениях a функция $y = ax^2 - 5$ имеет нули?

144. На рисунке 27 изображены графики функций:

а) $y = -\frac{1}{3}(x + 4)^2$; в) $y = \frac{1}{3}x^2 + 4$;

б) $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 - 1$; г) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$.

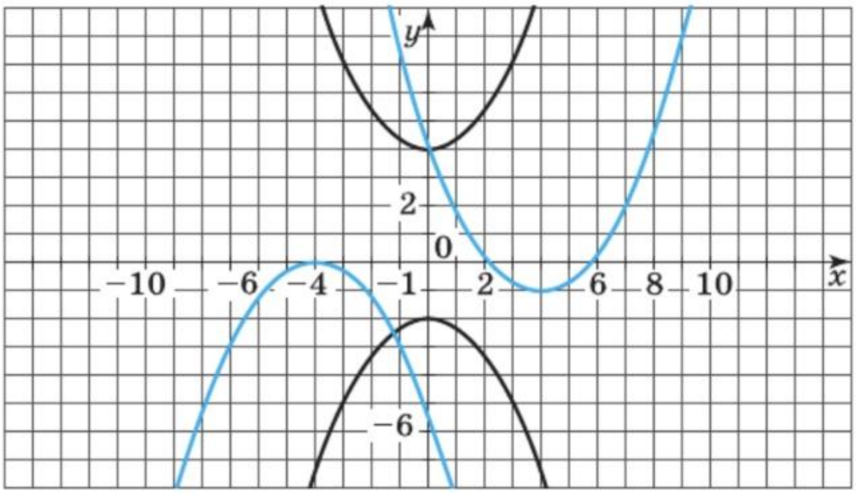


Рис. 27

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

145. На рисунке 28 изображён график функции $f(x) = a(x + b)^2$. Найдите $f(38)$.

146. На рисунке 29 изображён график функции $f(x) = ax^2 - b$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 68.

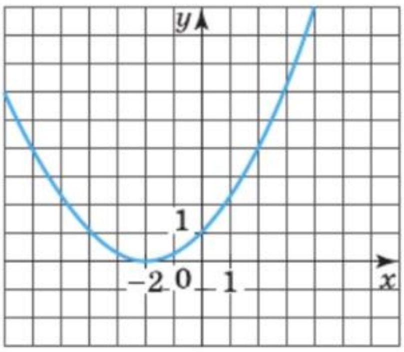


Рис. 28

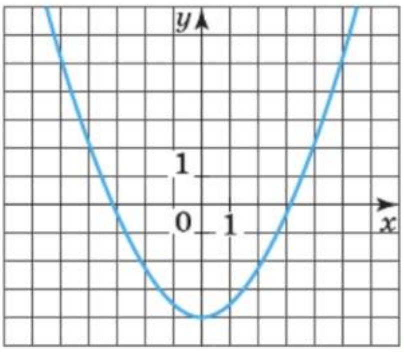


Рис. 29

147. Решите уравнение:

а) $0{,}6a - (a + 0{,}3)^2 = 0{,}27$;

б) $\dfrac{y^2 - 2y}{4} = 0{,}5y(6 - 2y)$.

148. Решите неравенство:

а) $5x - 0{,}7 < 3x + 5{,}1$;

б) $0{,}8x + 4{,}5 \geqslant 5 - 1{,}2x$;

в) $2x + 4{,}2 \leqslant 4x + 7{,}8$;

г) $3x - 2{,}6 > 5{,}5x - 3{,}1$.

11. Построение графика квадратичной функции

Для построения графика квадратичной функции запишем формулу $y = ax^2 + bx + c$ в виде $y = a(x - m)^2 + n$.

Выделим из трёхчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отсюда $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Мы получили формулу вида $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y. Отсюда следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, вершиной которой является точка $(m; n)$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Осью симметрии параболы служит прямая $x = m$, параллельная оси y. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:
1) определить направление ветвей параболы;
2) найти координаты вершины параболы и отметить её в координатной плоскости;
3) построить ещё несколько точек, принадлежащих параболе;
4) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу m вершины удобно находить по формуле $m = -\frac{b}{2a}$. Ординату n можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу $y = ax^2 + bx + c$, так как при $x = m$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n = n.$$

Построим графики некоторых квадратичных функций.

П р и м е р 1. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + x - 4$.

▶ Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + x - 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх.
Так как $c = -4$, то график функции пересекает ось ординат в точке $(0; -4)$.
Найдём координаты m и n вершины параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 0{,}5} = -1;$$

$$n = 0{,}5 \cdot (-1)^2 + (-1) - 4 = -4{,}5.$$

Вершина параболы — точка $(-1; -4{,}5)$, а прямая $x = -1$ — ось симметрии.
Чтобы найти точки пересечения параболы с осью абсцисс, найдём нули функции. Для этого решим уравнение $0{,}5x^2 + x - 4 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа -4 и 2, значит, парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-4; 0)$ и $(2; 0)$.
Составим таблицу.

x	-5	-4	-2	-1	0	2	3
y	$3{,}5$	0	-4	$-4{,}5$	-4	0	$3{,}5$

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции $y = 0{,}5x^2 + x - 4$ (рис. 30). ◁

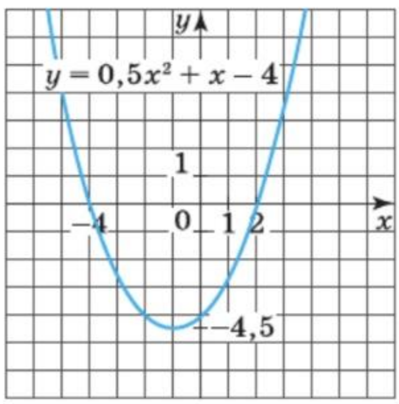


Рис. 30

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая $x = -1$ является осью симметрии параболы.

Поэтому мы брали точки, симметричные относительно прямой $x = -1$ (эти точки имеют одинаковые ординаты).

Пример 2. Построим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

▶ Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём координаты её вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = 3;$$

$$n = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Прямая $x = 3$ — ось симметрии параболы.
Вычислив координаты ещё нескольких точек, получим таблицу.

x	1	2	3	4	5
y	-9	-3	-1	-3	-9

Соединив плавной линией точки, координаты которых указаны в таблице, получим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$ (рис. 31). ◁

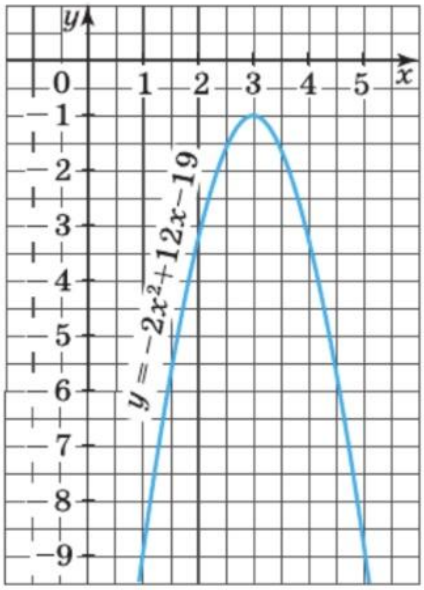


Рис. 31

Пример 3. Построим график функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

▶ Графиком функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём координаты её вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2;$$

$$n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 0.$$

Прямая $x = -2$ — ось симметрии параболы.
Вычислив координаты ещё нескольких точек, получим таблицу.

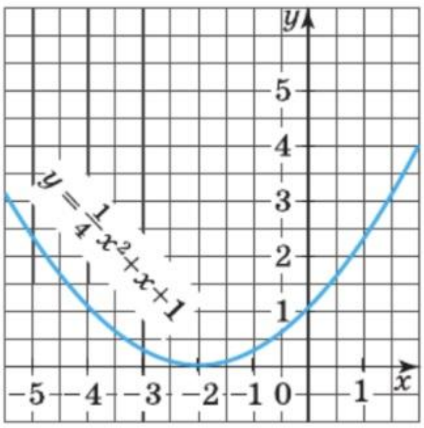


Рис. 32

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$

График функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ изображён на рисунке 32. ◁

Упражнения

149. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (м/с) с высоты h_0 (м). Высота h (м), на которой окажется тело через t (с), выражается формулой

$$h = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0$$

($g \approx 10$ м/с^2).

На рисунке 33 показан график зависимости h от t для случая, когда $h_0 = 20$, $v_0 = 15$. Найдите по графику:

а) сколько времени тело поднималось вверх;
б) сколько времени оно опускалось вниз;
в) какой наибольшей высоты достигло тело;
г) через сколько секунд тело упало на землю.

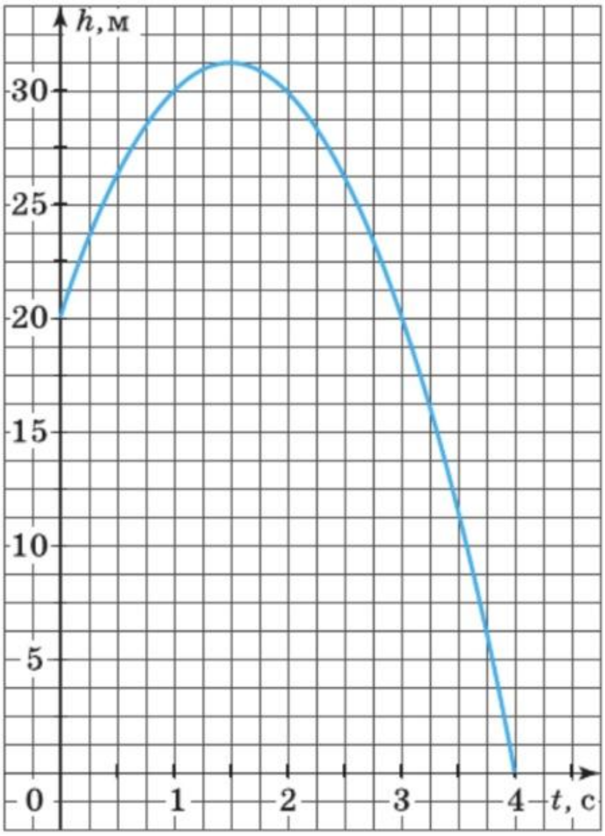


Рис. 33

150. Квадратичная функция задана формулой:

а) $y = x^2 - 4x + 7$;
б) $y = -2x^2 - 5x - 2$.

Найдите координаты вершины параболы. Наметив на координатной плоскости вершину параболы и её ось симметрии, изобразите схематически график.

151. Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 8$ и найдите, используя график:

а) значения функции при $x = 2{,}5;\ -0{,}5;\ -3$;
б) значения аргумента, при которых $y = 6;\ 0;\ -2$;
в) нули функции и промежутки знакопостоянства;
г) промежутки возрастания и убывания функции, множество значений функции.

152. Постройте график функции $y = 2x^2 + 8x + 2$ и найдите, используя график:

а) значения у при $x = -2{,}3;\ -0{,}5;\ 1{,}2$;
б) значения x, при которых $y = -4;\ -1;\ 1{,}7$;
в) нули функции и промежутки знакопостоянства;
г) промежутки возрастания и убывания функции, наименьшее значение функции.

153. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$; в) $y = x^2 + 3x$.

154. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$; б) $y = x^2 - 4x$; в) $y = -x^2 + 6x - 9$.

155. Постройте график функции:

а) $y = 0{,}5x^2 - 2$; б) $y = x^2 - 4x + 4$; в) $y = -x^2 + 2x$.

156. Постройте график функции:

а) $y = (x - 2)(x + 4)$; б) $y = -x(x + 5)$.

157. Найдите

а) наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x - 4$;

б) наибольшее значение функции $y = -x^2 - 4x + 5$;

в) наименьшее значение функции $y = x^2 - 6x - 6$;

г) наибольшее значение функции $y = -x^2 - 3x + 2$.

158. Выясните, график какой из функций $y = x^2 + 6x$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, $y = -x^2 - 6$ изображён на рисунке 34.

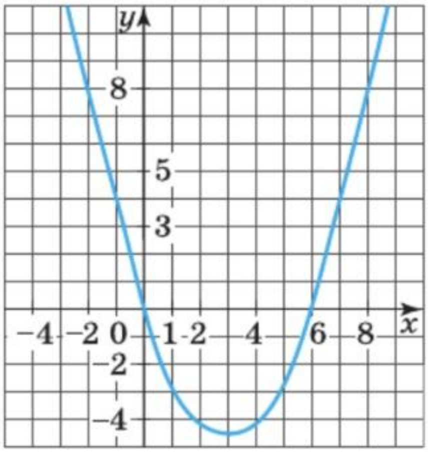


Рис. 34

159. Найдите значение b, при котором прямая $y = 6x + b$ касается параболы $y = x^2 + 8$.

160. При каком значении n графики функций $y = 2x^2 - 5x + 6$ и $y = x^2 - 7x + n$ имеют только одну общую точку? Найдите координаты этой точки.

161. Функции, графики которых изображены на рисунке 35, задаются уравнениями вида $y = ax^2 + bx + c$. Найдите значения коэффициентов a, b и c в каждом случае.

162. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, если:

1) $a > 0$, $D > 0$; 2) $a < 0$, $D > 0$;
$a > 0$, $D = 0$; $a < 0$, $D = 0$;
$a > 0$, $D < 0$; $a < 0$, $D < 0$.

(Буквой D обозначен дискриминант квадратичного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.)

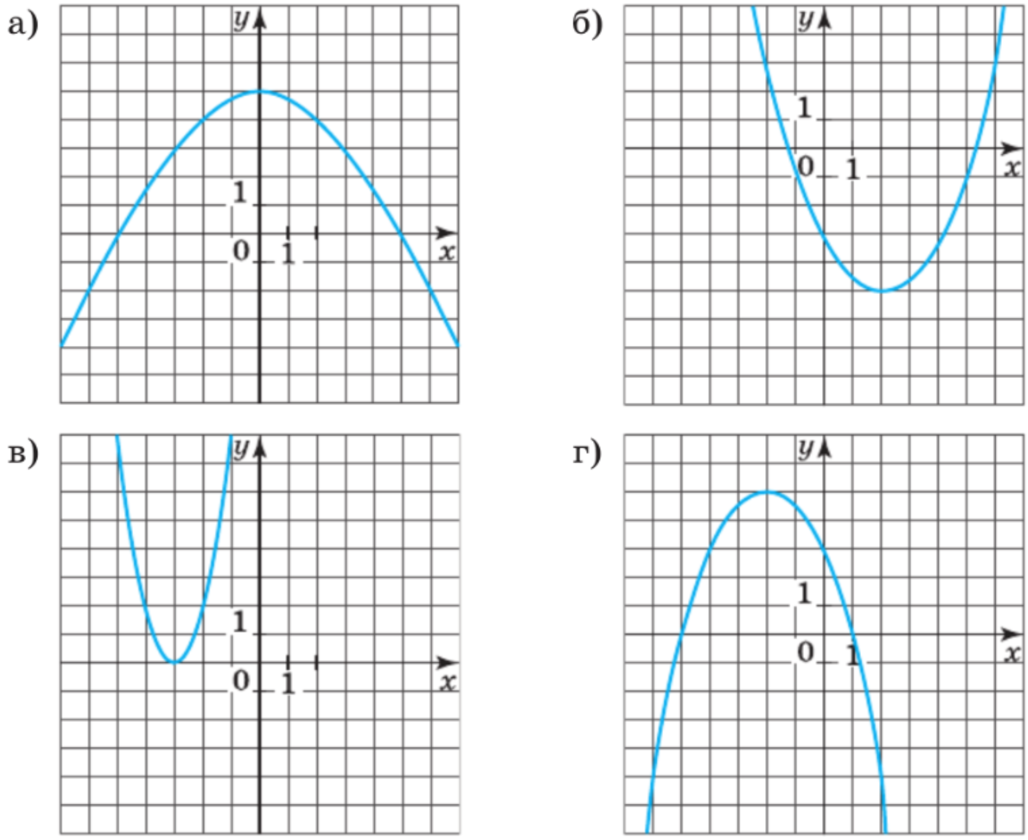


Рис. 35

163. (*Задача-исследование.*) По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 36) определите знаки коэффициентов a, b и c.
1) Объясните, как, пользуясь рисунком, можно определить знаки коэффициентов a и c. Укажите эти знаки.
2) Обсудите, как, пользуясь рисунком, можно определить знак коэффициента b. Укажите этот знак.

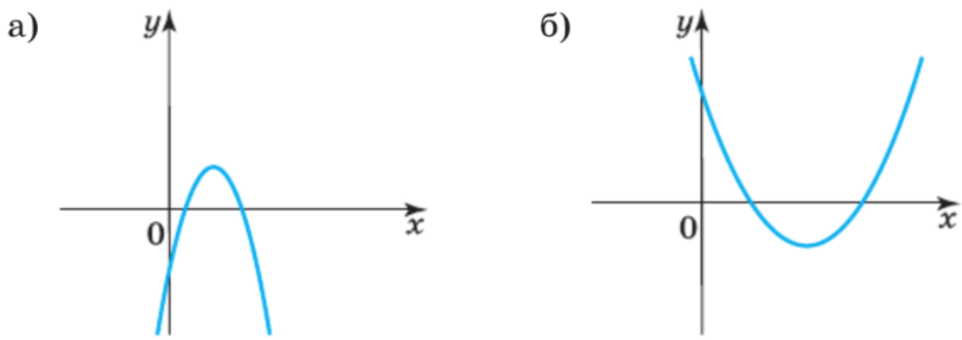


Рис. 36

164. Сократите дробь $\dfrac{(1-3a)^2}{3a^2+5a-2}$.

П

165. Решите уравнение:

а) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 - 2x + 2$;

б) $(2x - 3)(2x + 3) - 1 = 5x + (x - 2)^2$.

166. Если с каждого гектара участка соберут 35 ц пшеницы, то план недовыполнят на 20 т; если с каждого гектара будет получено 42 ц, то план перевыполнят на 50 т. Какова площадь участка?

167. Если на каждую машину грузить 3,5 т груза, то останется 4 т; если на каждую машину грузить 4,5 т, то для полной загрузки всех машин не хватит 4 т груза. Сколько было машин?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение квадратичной функции.
2. Как выглядит график квадратичной функции $y = ax^2$ и какими свойствами обладает функция: а) при $a > 0$; б) при $a < 0$?
3. Как из графика функции $y = ax^2$ можно получить график функции: а) $y = ax^2 + n$; б) $y = a(x - m)^2$; в) $y = a(x - m)^2 + n$?
4. Что представляет собой график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$?

   На примере функции $y = 2x^2 - 12x + 16$ покажите, как строят график квадратичной функции.

Для тех, кто хочет знать больше

12. Дробно-линейная функция и её график

Вам известны свойства и график функции $y = \dfrac{k}{x}$ при $k > 0$. Отметим ещё одно свойство этой функции и особенность её графика.

При неограниченном возрастании положительных значений аргумента значения функции, оставаясь положительными, убывают и стремятся к нулю, т. е. если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Аналогично если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$. На графике это свойство проявляется в том, что точки графика по мере их удаления в бесконечность (т. е. при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$) неограниченно приближаются к оси x. Говорят, что ось x, т. е. прямая $y = 0$, является *асимптотой* графика функции $y = \dfrac{k}{x}$ при $k > 0$.

Вообще асимптотой кривой называется прямая, к которой приближаются как угодно близко точки кривой по мере их удаления в бесконечность.

Гипербола $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ имеет ещё одну асимптоту — ось y, т. е. прямую $x = 0$. Нетрудно понять, что гипербола $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ также имеет две асимптоты — ось x и ось y.

Теперь мы познакомимся с дробно-линейными функциями. Примерами таких функций могут служить функции, задаваемые формулами $y = \frac{2x - 5}{3x + 4}$, $y = \frac{6}{10x - 7}$, $y = \frac{x + 4}{2x}$. Правые части этих формул — дроби, у которых числитель — многочлен первой степени или число, отличное от нуля, а знаменатель — многочлен первой степени. Такие функции называют *дробно-линейными функциями*.

Вообще *дробно-линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида* $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, *где x — переменная, a, b, c и d — произвольные числа, причём $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$.*

Ограничения $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$ существенны. Если $c = 0$, то мы получим линейную функцию, а при $ad - bc = 0$ — сократимую дробь, значение которой равно $\frac{b}{d}$, т. е. получим константу.

Вы знаете, что график функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$. График функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

Покажем, что графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей. Проиллюстрируем это на примерах построения графиков конкретных дробно-линейных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$.

▶ Для этого выделим из дроби $\frac{2x + 4}{x - 1}$ целую часть, представив дробь в виде $n + \frac{k}{x - m}$. Имеем

$$\frac{2x + 4}{x - 1} = \frac{2x - 2 + 6}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 6}{x - 1} = 2 + \frac{6}{x - 1}.$$

Здесь $k = 6$, $m = 1$, $n = 2$.

График функции $y = \frac{6}{x-1} + 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \frac{6}{x}$ на 1 единицу вправо вдоль оси x и сдвига полученного графика $y = \frac{6}{x-1}$ на 2 единицы вверх в направлении оси y. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: ось x перейдёт в прямую $y = 2$, а ось y — в прямую $x = 1$.

Для построения графика данной функции поступим так: проведём в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую $x = 1$ и прямую $y = 2$. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две таблицы: одну для $x < 1$, другую для $x > 1$.

x	-5	-3	-2	-1	0
y	1	0,5	0	-1	-4

x	2	3	4	5	7
y	8	5	4	3,5	3

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, используя

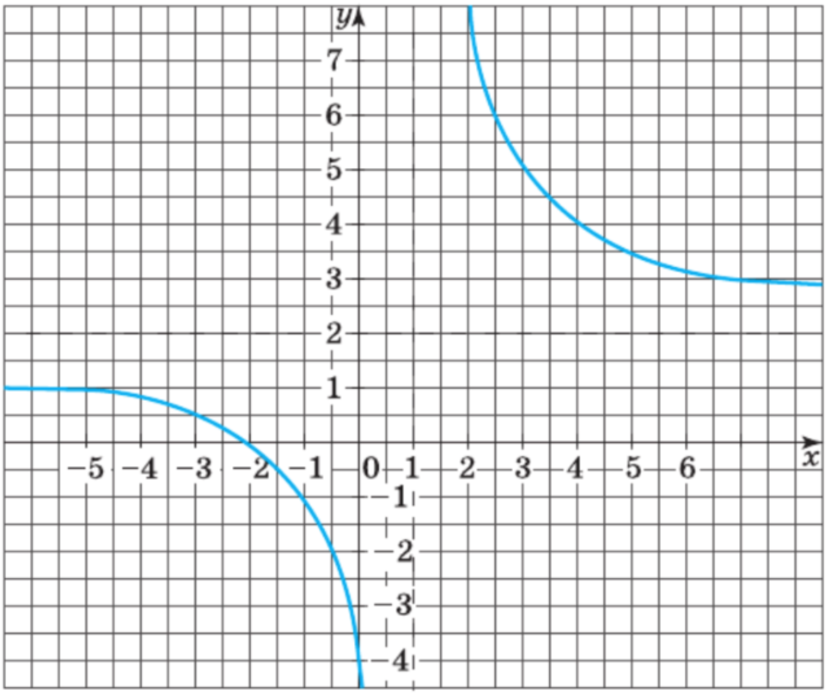


Рис. 37

вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$ изображён на рисунке 37. ◁

Пример 2. Построим график функции $y = -\dfrac{2x-1}{x+1}$.

▶ Так же как и в примере 1, выделим из дроби $-\dfrac{2x-1}{x+1}$ целую часть, т. е. представим дробь в виде $n + \dfrac{k}{x-m}$. Имеем

$$-\frac{2x-1}{x+1} = -\frac{2x+2-3}{x+1} = -\frac{2(x+1)-3}{x+1} = -\left(2 - \frac{3}{x+1}\right) = -2 + \frac{3}{x+1}.$$

В этом случае $k = 3$, $m = -1$, $n = -2$.

График функции $y = \dfrac{3}{x+1} - 2$ можно получить из графика функции $y = \dfrac{3}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$ на 1 единицу влево и сдвига графика функции $y = \dfrac{3}{x+1}$ на 2 единицы вниз. При этом асимптотами гиперболы $y = \dfrac{3}{x+1} - 2$ станут прямые $y = -2$ и $x = -1$.

Далее поступим так. Проведём в координатной плоскости пунктиром асимптоты $y = -2$ и $x = -1$. Составим две таблицы: одну для $x < -1$, другую для $x > -1$.

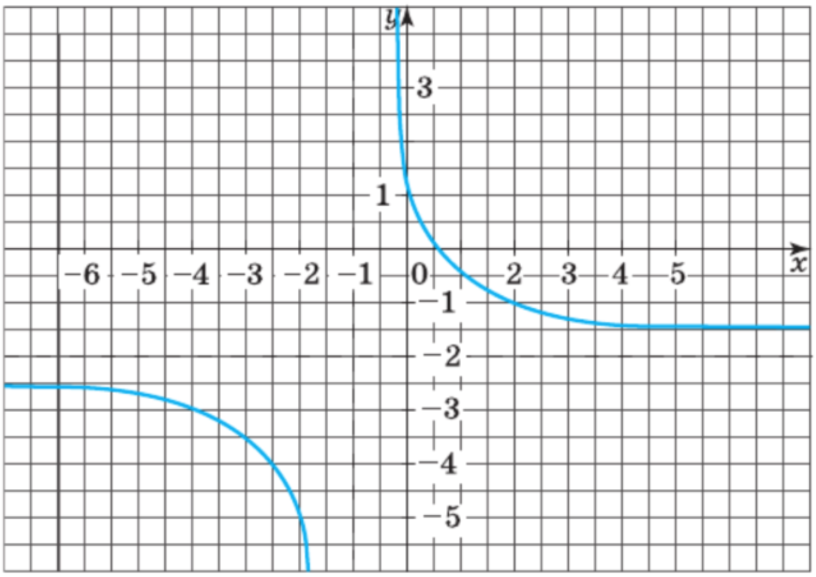


Рис. 38

x	-6	-4	-3	-2
y	$-2{,}6$	-3	$-3{,}5$	-5

x	0	1	2	5
y	1	$-0{,}5$	-1	$-1{,}5$

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = -\dfrac{2x-1}{x+1}$ изображён на рисунке 38 на с. 65. ◁

В примерах 1 и 2 мы установили, что графиком каждой из функций $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$ и $y = -\dfrac{2x-1}{x+1}$ является гипербола, и показали один из способов построения графиков этих функций.

Можно доказать, что любую дробно-линейную функцию $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ можно представить в виде $y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

Таким образом, графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ с помощью двух параллельных переносов.

Упражнения

168. Укажите асимптоты гиперболы:

а) $y = \dfrac{10}{x-3} - 2$; б) $y = \dfrac{8}{x+2} - 3$.

169. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{4}{x-3}$; б) $y = \dfrac{4}{x} + 2$; в) $y = \dfrac{4}{x+3}$; г) $y = \dfrac{4}{x} - 2$.

170. Найдите асимптоты гиперболы:

а) $y = \dfrac{x+8}{x-2}$; б) $y = -\dfrac{x-8}{x+3}$.

171. Покажите схематически, как расположен график функции $y = \dfrac{k}{x-m} + n$, где $k < 0$, если:

а) $m > 0$, $n < 0$; б) $m < 0$, $n > 0$.

172. Постройте график функции $y = \dfrac{3x-2}{x-2}$. Найдите нули функции и промежутки знакопостоянства.

173. Укажите функции, графиками которых являются гиперболы:

1. $y = \dfrac{15}{x-3}$ 2. $y = \dfrac{37+x}{37-x}$

3. $y = \dfrac{8x-5}{25}$ 4. $y = \dfrac{8x-40}{5x-25}$

174. Докажите, что графику функции $y = \dfrac{2x+5}{x-3}$ принадлежат лишь две точки, у которых и абсцисса, и ордината — натуральные числа. Найдите координаты этих точек.

175. Найдите все точки графика функции $y = \dfrac{8x-7}{x}$, у которых и абсцисса, и ордината являются целыми числами.

176. Решите графически уравнение $\dfrac{4x}{x+2} = x - 3$.

177. Постройте график функции $g(x) = \dfrac{6}{|x-2|}$.

Решите уравнение:

а) $g(x) = 3$; б) $g(x) = 6$; в) $g(x) = -2$.

178. Установите соответствие между функциями

$$y = \frac{x+2}{x-1},\ y = \frac{-x-2}{x-1}$$

и их графиками, представленными на рисунке 39.

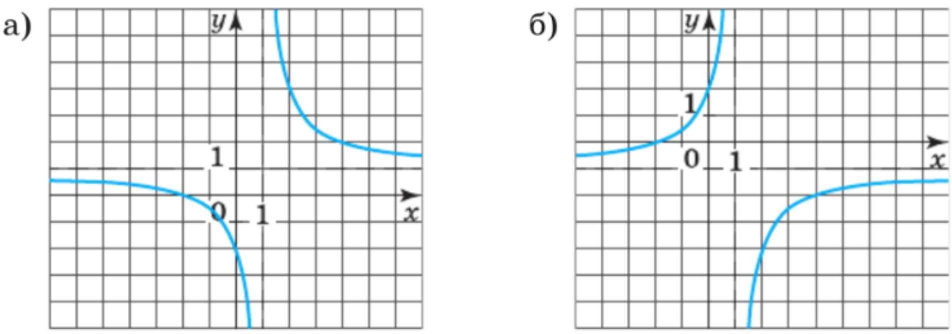


Рис. 39

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 3

179. Постройте в одной и той же системе координат графики функций:

а) $y = x + 5$; $y = -0{,}5x + 5$; $y = 5$;
б) $y = 0{,}5x + 3$; $y = 0{,}5x$; $y = 0{,}5x - 2$.

180. Изобразите схематически график функции $f(x) = kx + b$ и перечислите её свойства, если:

а) $k > 0$, $b > 0$; б) $k < 0$, $b < 0$; в) $k > 0$, $b < 0$.

181. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{12}{x}$; б) $y = \frac{10}{x}$.

182. Постройте график функции $y = \sqrt{kx}$ при k, равном: а) 2; б) 0,5. Как меняется характер графика в зависимости от коэффициента k?

183. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$. Найдите промежутки возрастания и убывания для каждой функции.

184. Изобразите схематически в одной системе координат графики функций $y = ax^2$ для случая: $a < 0$; $a > 0$. Перечислите свойства функции для каждого случая.

185. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{1}{9}x^3$ и $y = -\frac{1}{9}x^3$. Найдите промежутки возрастания и убывания для каждой функции.

186. Докажите, что:

а) сумма двух чётных функций есть функция чётная;
б) сумма двух нечётных функций — функция нечётная.

187. Докажите, что:

а) произведение двух чётных функций является чётной функцией;
б) произведение двух нечётных функций есть функция чётная;
в) произведение чётной и нечётной функций есть функция нечётная.

188. Задайте уравнением функцию $y = f(x)$, график которой представлен на рисунке 40, и опишите её свойства.

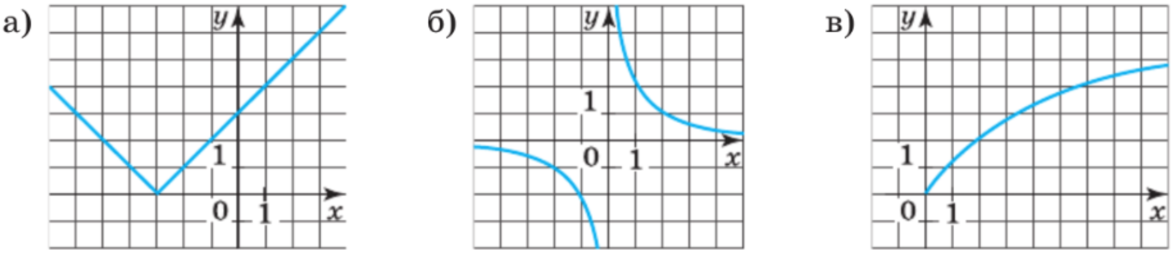


Рис. 40

189. Обладает ли функция $y = f(x)$ свойством чётности или свойством нечётности, если:

а) $f(x) = x^3 - 7x$; б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$?

190. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$.

К параграфу 4

191. При каком значении a график функции $y = ax^2$ проходит через точку:

а) $(5;\ -7)$; б) $(-\sqrt{3};\ 9)$; в) $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; г) $(100;\ 10)$?

192. Постройте график функции, заданной формулой $y = -0{,}25x^2$, где $x \in [-6;\ 2]$. Каковы наибольшее и наименьшее значения этой функции?

193. При каких значениях a областью значений функции $y = ax^2$ является промежуток: а) $[0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0]$?

194. Докажите, что графики функций $y = ax^2$ и $y = ax$, где $a \neq 0$, пересекаются в точке $(1;\ a)$. В какой ещё точке пересекаются эти графики?

195. Параболу $y = 7x^2$ сдвинули вверх на 5 единиц и влево на 8 единиц. Графиком какой функции является полученная парабола?

196. Какие преобразования надо выполнить, чтобы:

а) из графика функции $y = x^3$ получить графики функций $y = -x^3$, $y = (x - 3)^3$, $y = x^3 + 4$;

б) из графика функции $y = \sqrt{x}$ получить графики функций $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x + 5}$, $y = \sqrt{x} - 1$?

197. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = |x|$, $y = |x - 4|$, $y = |x - 4| - 3$.

198. Постройте график функции:

а) $f(x) = |x^2 - 2x|$; б) $f(x) = x^2 - 2|x|$.

199. Постройте график функции:

а) $y = x|x|$; б) $y = -\dfrac{x^3}{|x|}$.

200. При каких значениях c график функции $y = x^2 - 6x + c$ расположен выше прямой:

а) $y = 4$; б) $y = -1$?

201. При каких значениях b и c вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$ является точка $(6; -12)$?

202. Найдите значение a, при котором осью симметрии параболы $y = ax^2 - 16x + 1$ является прямая $x = 4$.

203. При каких значениях a и c квадратичная функция $y = ax^2 + c$ имеет нули?

204. Найдите значения a и b, при которых график функции $y = ax^2 + bx - 18$ проходит через точки $M(1; 2)$ и $N(2; 10)$.

205. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $y = x^2 + 2x - 15$;
б) $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4$;
в) $y = 4 - 0{,}5x^2$;
г) $y = 6x - 2x^2$;
д) $y = (2x - 7)(x + 1)$;
е) $y = (2 - x)(x + 6)$.

206. Используя график, найдите множество значений функции:

а) $y = 3x^2 - 0{,}5x + \dfrac{1}{16}$;
б) $y = 2x^2 + 1{,}2x + 2$;
в) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 5{,}5$;
г) $y = -3x^2 - 2x - 4\dfrac{2}{3}$.

207. Пусть h (м) — высота, на которой находится брошенный с земли вверх мяч, t (с) — время полёта мяча. Зависимость h от t выражается формулой $h = 24t - 4{,}9t^2$. Какой наибольшей высоты достиг мяч? В какой промежуток времени он поднимался и в какой опускался? Через сколько секунд после броска он упал на землю?

208. Задайте формулой какую-либо квадратичную функцию, которая:

а) в промежутке $(-\infty; -3]$ убывает, а в промежутке $[-3; +\infty)$ возрастает;
б) в промежутке $(-\infty; 6]$ возрастает, а в промежутке $[6; +\infty)$ убывает.

209. Функция задана формулой $y = x^2 + px + q$. Найдите значения p и q, если известно, что:

а) нули функции — числа 3 и 4;
б) график функции пересекает оси координат в точках $(0; 6)$ и $(2; 0)$;
в) наименьшее значение, равное 24, функция принимает при $x = 6$.

Глава III УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вы уже научились решать целые уравнения с одной переменной первой и второй степени. Теперь вы встретитесь с более сложными случаями, когда нужно решить уравнение третьей или более высокой степени. Специальные приёмы для решения уравнений помогут при выполнении различных упражнений. В этой главе также будут рассматриваться дробные рациональные уравнения, решение которых сводится к решению целых уравнений третьей или более высокой степени. Кроме того, вы научитесь решать неравенства второй степени с одной переменной, а также использовать метод интервалов для решения более сложных неравенств.

§ 5 УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

13. Целое уравнение и его корни

Определение. Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого — целые выражения.

Например, уравнения

$$x + 3\frac{2}{3} = 5x - 4, \quad \frac{x^2+1}{6} - \frac{x+1}{3} = 10 \text{ и } (x+2)(x-3) = x(x+1) \text{ —}$$

целые, а уравнения

$$x + 3\frac{2}{3} = \frac{5}{x} - 4, \quad \frac{x^2+1}{6} - \frac{3}{x+1} = 10 \text{ и } \frac{x+2}{x-3} = \frac{x}{x+1}$$

целыми не являются.

Всякое целое уравнение можно заменить равносильным ему уравнением вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида. Так, линейное уравнение можно привести к виду $ax + b = 0$, а квадратное — к виду $ax^2 + bx + c = 0$.

Возьмём целые уравнения

$$(x^3 - 1)^2 + x^5 = x^6 - 2(x - 1), \qquad (1)$$

$$\frac{x^4 - 1}{4} - \frac{x^2 + 1}{2} = 3x^2 \qquad (2)$$

и преобразуем их к виду $P(x) = 0$.

В уравнении (1) раскроем скобки, перенесём все члены в левую часть и приведём подобные слагаемые:

$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 = x^6 - 2x + 2,$$

$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 - x^6 + 2x - 2 = 0,$$

$$x^5 - 2x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Преобразуем уравнение (2). В этом случае сначала избавимся от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на четыре:

$$x^4 - 1 - 2(x^2 + 1) = 12x^2.$$

Далее будем выполнять преобразования, аналогичные преобразованиям в примере (1):

$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 = 12x^2,$$

$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 - 12x^2 = 0,$$

$$x^4 - 14x^2 - 3 = 0.$$

Если уравнение с одной переменной записано в виде $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называют *степенью уравнения*. Степенью произвольного целого уравнения называют степень равносильного ему уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Например, уравнение (1) является уравнением пятой степени, а уравнение (2) — уравнением четвёртой степени.

Уравнение первой степени можно привести к виду $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Из уравнения $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ получаем, что $x = -\frac{b}{a}$. Число $-\frac{b}{a}$ — корень уравнения. Каждое уравнение первой степени имеет единственный корень.

Уравнение второй степени можно привести к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Число корней такого уравнения зависит от дискриминанта

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Таким образом, любое уравнение второй степени имеет не более двух корней. Для нахождения корней при $D \geqslant 0$ используется формула корней квадратного уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Уравнение третьей степени можно привести к виду

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

уравнение четвёртой степени — к виду

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ и т. д.},$$

где a, b, c, ... — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Можно доказать, что уравнение третьей степени имеет не более трёх корней, уравнение четвёртой степени — не более четырёх корней. Вообще *уравнение n-й степени имеет не более n корней.*

Для уравнений третьей и четвёртой степеней известны формулы корней, но эти формулы очень сложны и неудобны для практического применения. Для уравнений пятой и более высоких степеней общих формул корней не существует.

Если стоит задача решения целого уравнения, степень которого выше двух, надо прежде всего пытаться воспользоваться какими-либо особенностями этого уравнения.

Пример 1. Решим два целых уравнения:

$$(x^2 - 4)^2 + (x^2 + x - 2)^2 = 0, \qquad (3)$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + x - 2) = 0. \qquad (4)$$

▶ Сначала рассмотрим уравнение (3). Сумма двух квадратов равна нулю в том и только в том случае, когда каждое из слагаемых обращается в нуль. Значит, корнем уравнения (3) может служить лишь то значение x, при котором

$$x^2 - 4 = 0 \text{ И } x^2 + x - 2 = 0.$$

Решая каждое из этих уравнений, получим:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2 \text{ И } x_3 = -2,\ x_4 = 1.$$

Таким образом, уравнение (3) имеет единственный корень — число -2.

Решим теперь уравнение (4). Его левая часть — это произведение двух целых выражений. Такое произведение обращается в нуль, если хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, корнем уравнения (4) может быть лишь такое число, при котором

$$x^2 - 4 = 0 \textbf{ или } x^2 + x - 2 = 0,$$

Получаем

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2 \textbf{ или } x_3 = -2,\ x_4 = 1.$$

Значит, уравнение (4) имеет три корня. Это числа: 2; –2; 1. Коротко решения уравнений (3) и (4) могут быть записаны так.

Уравнение (3): $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, x = -2, \\ x = -2, x = 1. \end{cases}$

Ответ: –2.

Уравнение (4): $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2, x = -2, \\ x = -2, x = 1. \end{array}\right.$

Ответ: 2; –2; 1. ◁

Вы видите, что уравнение (3) равносильно системе двух уравнений, а про уравнение (4) говорят, что оно равносильно *совокупности двух уравнений*.

Решением совокупности уравнений является то и только то значение переменной, которое удовлетворяет хотя бы одному из уравнений, входящих в совокупность.

Иногда целое уравнение, степень которого выше двух, удаётся решить, применив какой-либо специальный приём. Например, некоторые целые уравнения можно решить, применив приём разложения многочлена на множители.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0. \tag{5}$$

▶ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2(x - 8) - (x - 8) = 0,$$

$$(x - 8)(x^2 - 1) = 0,$$

$$(x - 8)(x - 1)(x + 1) = 0.$$

НИЛЬС АБЕЛЬ (1802—1829) — норвежский математик. Основатель общей теории алгебраических функций. Он впервые доказал неразрешимость в общем случае в радикалах алгебраического уравнения пятой степени и более высоких степеней.

Отсюда найдём, что

$$x - 8 = 0, \text{ или } x - 1 = 0, \text{ или } x + 1 = 0.$$

Значит, уравнение (5) имеет три корня:

$$x_1 = 8, \ x_2 = 1, \ x_3 = -1.$$

Ответ: 8; 1; –1. ◁

Уравнения, степень которых выше двух, иногда удаётся решить, введя новую переменную. Рассмотрим примеры.

Пример 3. Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120. \qquad (6)$$

▶ Если перенести все члены уравнения в левую часть и преобразовать получившееся выражение в многочлен стандартного вида, то получится уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x - 96 = 0,$$

для которого трудно найти способ решения.
Однако можно воспользоваться следующей особенностью уравнения (6): в его левой части переменная x входит только в выражение $x^2 - 5x$, которое встречается в уравнении дважды. Это позволяет решить данное уравнение с помощью введения новой переменной.
Обозначим $x^2 - 5x$ через y:

$$x^2 - 5x = y.$$

Тогда уравнение (6) сведётся к уравнению с переменной y:

$$(y + 4)(y + 6) = 120,$$

которое после упрощения примет вид

$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём его корни:

$$y_1 = -16, \ y_2 = 6.$$

Отсюда

$$x^2 - 5x = -16 \text{ или } x^2 - 5x = 6.$$

ЭВАРИСТ ГАЛУА (1811—1832) — французский математик. Заложил основы современной алгебры, ввёл ряд фундаментальных её понятий. Нашёл необходимое и достаточное условие, которому удовлетворяет алгебраическое уравнение, разрешимое в радикалах.

Решая уравнение $x^2 - 5x = -16$, придём к выводу, что оно не имеет корней.
Решая уравнение $x^2 - 5x = 6$, найдём, что оно имеет два корня:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 6.$$

Значит, уравнение (6) имеет два корня: -1 и 6.

Ответ: -1; 6. ◁

Метод введения новой переменной позволяет легко решать уравнения четвёртой степени, имеющие вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, являющиеся квадратными относительно x^2, называют биквадратными уравнениями.

Пример 4. Решим биквадратное уравнение

$$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \qquad (7)$$

▶ Введём новую переменную. Обозначим x^2 через y: $x^2 = y$.
Получим квадратное уравнение с переменной y:

$$9y^2 - 10y + 1 = 0.$$

Решив его, найдём, что

$$y_1 = \frac{1}{9},\ y_2 = 1.$$

Значит,

$$x^2 = \frac{1}{9} \text{ или } x^2 = 1.$$

Из уравнения $x^2 = \frac{1}{9}$ находим, что $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.
Из уравнения $x^2 = 1$ находим, что $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.
Итак, биквадратное уравнение (7) имеет четыре корня:

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; -1; 1. ◁

Упражнения

210. Какова степень уравнения:

а) $2x^2 - 6x^5 + 1 = 0$;
б) $x^6 - 4x^3 - 3 = 0$;
в) $\frac{1}{7}x^5 = 0$;
г) $(x + 8)(x - 7) = 0$;
д) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 5$;
е) $5x^3 - 5x(x^2 + 4) = 17$?

211. Решите уравнение:

а) $(8x - 1)(2x - 3) - (4x - 1)^2 = 38$;

б) $\dfrac{(15x - 1)(1 + 15x)}{3} = 2\dfrac{2}{3}$;

в) $0{,}5y^3 - 0{,}5y(y + 1)(y - 3) = 7$;

г) $x^4 \cdot x^2 = \dfrac{(1 + 2x^2)(2x^2 - 1)}{4}$.

212. Решите уравнение:

а) $(6 - x)(x + 6) - (x - 11)x = 36$;

б) $9x^2 - \dfrac{(12x - 11)(3x + 8)}{4} = 1$;

в) $\dfrac{1 - 3y}{11} - \dfrac{3 - y}{5} = 0$;

г) $\dfrac{(y + 1)^2}{12} - \dfrac{1 - y^2}{24} = 4$.

213. Докажите, что уравнение $5x^6 + 6x^4 + x^2 + 4 = 0$ не имеет корней.

214. Может ли отрицательное число быть корнем уравнения

$$12x^5 + 7x^3 + 11x - 3 = 121?$$

215. Если ребро куба увеличить на 3 см, то его объём увеличится на 513 см^3. Чему равно ребро куба?

216. Первое число на 5 больше второго, а его куб на 3185 больше куба второго. Найдите эти числа.

217. Решите уравнение:

а) $y^3 - 6y = 0$;

б) $6x^4 + 3{,}6x^2 = 0$;

в) $x^3 + 3x = 3{,}5x^2$;

г) $x^3 - 0{,}1x = 0{,}3x^2$;

д) $9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$;

е) $y^4 - y^3 - 16y^2 + 16y = 0$;

ж) $p^3 - p^2 = p - 1$;

з) $x^4 - x^2 = 3x^3 - 3x$.

218. Решите уравнение:

а) $3x^3 - x^2 + 18x - 6 = 0$; б) $2x^4 - 18x^2 = 5x^3 - 45x$.

219. Решите уравнение:

а) $x^3 + 7x^2 - 6 = 0$; б) $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$.

220. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с осями координат.

221. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(2x^2 + 3)^2 - 12(2x^2 + 3) + 11 = 0$;

б) $(t^2 - 2t)^2 - 3 = 2(t^2 - 2t)$;

в) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 40$;

г) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$.

222. Решите уравнение:

а) $(x^2+3)^2-11(x^2+3)+28=0$;
б) $(x^2-4x)^2+9(x^2-4x)+20=0$;
в) $(x^2+x)(x^2+x-5)=84$.

223. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4-5x^2-36=0$;
б) $y^4-6y^2+8=0$;
в) $t^4+10t^2+25=0$;
г) $4x^4-5x^2+1=0$;
д) $9x^4-9x^2+2=0$;
е) $16y^4-8y^2+1=0$.

224. Найдите корни биквадратного уравнения:

а) $x^4-25x^2+144=0$;
б) $y^4+14y^2+48=0$;
в) $x^4-4x^2+4=0$;
г) $t^4-2t^2-3=0$;
д) $2x^4-9x^2+4=0$;
е) $5y^4-5y^2+2=0$.

225. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y=x^4-5x^2+4$;
б) $y=x^4+3x^2-10$;
в) $y=x^4-20x^2+100$;
г) $y=4x^4+16x^2$.

226. Разложите на множители трёхчлен:

а) x^4-47x^2-98; б) x^4-85x^2+1764.

227. Решите уравнение:

а) $(x^2-1)(x^2+1)-4(x^2-11)=0$;
б) $3x^2(x-1)(x+1)-10x^2+4=0$.

228. Решите уравнение:

а) $x^5+x^4-6x^3-6x^2+5x+5=0$;
б) $x^5-x^4-2x^3+2x^2-3x+3=0$.

229. Найдите корни уравнения:

а) $y^7-y^6+8y=8$;
б) $u^7-u^6=64u-64$.

П

230. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $3x^2-25x-28$; б) $2x^2+13x-7$.

231. Решите неравенство:

а) $13(5x-1)-15(4x+2)<0$;
б) $6(7-0{,}2x)-5(8-0{,}4x)>0$.

232. Два сварщика, работая вместе, могут выполнить задание за 30 ч. За сколько часов сможет выполнить это задание каждый сварщик, если известно, что первому на выполнение всей работы потребуется времени на 11 ч больше, чем второму?

14. Дробные рациональные уравнения

В каждом из уравнений

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{5}{x+1}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{x^2}=x+5, \qquad 2x-1=\frac{x}{x+12}$$

левая и правая части представляют собой рациональные выражения, причём либо оба выражения являются дробными, либо одно из них является дробным, а другое — целым выражением. Такие уравнения называют *дробными рациональными уравнениями*. Напомним определение дробного рационального равнения.

> Дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого — рациональные выражения, причём хотя бы одно из них является дробным выражением.

При решении дробных рациональных уравнений обычно поступают следующим образом:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- умножают обе части уравнения на этот знаменатель;
- решают получившееся целое уравнение;
- исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.

С простейшими примерами решения дробных рациональных уравнений вы уже встречались. Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{6}{x^2+8}-\frac{9x}{(x^2+8)(9-x^2)}=\frac{x^3}{x^4-x^2-72}. \qquad (1)$$

▶ Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен x^4-x^2-72. Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

$$6x^2-54+9x=x^3.$$

Отсюда

$$x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0. \qquad (2)$$

Решим полученное целое уравнение, используя разложение левой части на множители.
Имеем

$$(x^3 - 6x^2) - (9x - 54) = 0,$$

$$x^2(x - 6) - 9(x - 6) = 0,$$

$$(x - 6)(x^2 - 9) = 0,$$

$$(x - 6)(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Получим три корня:

$$x_1 = 6, \; x_2 = 3, \; x_3 = -3.$$

Теперь необходимо проверить, не обращают ли найденные корни в нуль общий знаменатель дробей, входящих в уравнение (1).
Если $x = 6$, то $x^4 - x^2 - 72 \neq 0$; если $x = 3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$; если $x = -3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$.
Значит, уравнение (1) имеет единственный корень — число 6.
Ответ: 6. ◁

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-7}.$$

▶ Приведение дробей, входящих в уравнение, к общему знаменателю связано с громоздкими преобразованиями и не позволяет легко найти корни уравнения. Поступим иначе. Воспользуемся тем, что знаменатели дробей представляют собой двучлены вида $x + b$, где b — некоторое число. Преобразуем уравнение так, чтобы в левой и правой его частях были записаны разности дробей, и каждую из разностей заменим дробью.
Получим

$$\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-4},$$

$$\frac{x+2-x+6}{(x-6)(x+2)} = \frac{x-4-x+7}{(x-7)(x-4)},$$

$$\frac{8}{x^2 - 4x - 12} = \frac{3}{x^2 - 11x + 28}.$$

Отсюда

$$8(x^2 - 11x + 28) = 3(x^2 - 4x - 12),$$

$$8x^2 - 88x + 224 = 3x^2 - 12x - 36,$$
$$5x^2 - 76x + 260 = 0.$$

Решив это уравнение, найдём, что оно имеет два корня:

$$x_1 = 5{,}2 \text{ и } x_2 = 10.$$

Каждое из этих чисел не обращает в нуль знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: 5,2 и 10.
Ответ: 5,2; 10. ◁

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{2x^2}{x-2} + \frac{3x+2}{2-x} = x^2. \qquad (3)$$

▶ Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим целое уравнение

$$2x^2 - 3x - 2 = x^2(x-2). \qquad (4)$$

Разложив на множители квадратный трёхчлен $2x^2 - 3x - 2$, представим это уравнение в виде

$$(x-2)(2x+1) = x^2(x-2).$$

Отсюда

$$x^2(x-2) - (x-2)(2x+1) = 0,$$
$$(x-2)(x^2 - 2x - 1) = 0,$$
$$x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Решив полученные уравнения, найдём, что уравнение (4) имеет три корня: 2, $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$.
Остаётся проверить, не обращают ли они в нуль знаменатель $x - 2$. Если $x = 2$, то $x - 2 = 0$; если $x = 1 - \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$; если $x = 1 + \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$.
Значит, число 2 не является корнем уравнения (3), а числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ являются его корнями.
Ответ: $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$. ◁

В отдельных случаях удаётся решить дробное рациональное уравнение, используя введение новой переменной.

Пример 4. Решим уравнение

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} + \frac{7}{x^2 + x - 20} + \frac{1}{4} = 0.$$