▶ Введём новую переменную $y = x^2 + x$. Получим

$$\frac{1}{y-2} + \frac{7}{y-20} + \frac{1}{4} = 0.$$

Отсюда

$$4y - 80 + 28y - 56 + y^2 - 22y + 40 = 0,$$
$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём, что

$$y = 6 \text{ или } y = -16.$$

Уравнение $x^2 + x = 6$ имеет два корня: -3 и 2.
Уравнение $x^2 + x = -16$ корней не имеет.
Каждое из чисел -3 и 2 не обращает в нуль знаменатели дробей исходного уравнения и, следовательно, является его корнем.
Ответ: -3; 2. ◁

Упражнения

233. При каких значениях a равно нулю значение дроби:

а) $\frac{a^3 - 9a}{a^2 + a - 12}$; б) $\frac{a^5 + 2a^4}{a^3 + a + 10}$; в) $\frac{a^5 - 4a^4 + 4a^3}{a^4 - 16}$?

234. Решите уравнение:

а) $\frac{5y^3 - 15y^2 - 2y + 6}{y^2 - 9} = 0$; в) $\frac{6x^3 + 48x^2 - 2x - 16}{x^2 - 64} = 0$;

б) $\frac{3y^3 - 12y^2 - y + 4}{9y^4 - 1} = 0$; г) $\frac{y^3 - 4y^2 - 6y + 24}{y^3 - 6y} = 0$.

235. Решите уравнение:

а) $\frac{2}{x-2} - \frac{10}{x+3} = \frac{50}{x^2 + x - 6} - 1$;

б) $\frac{x+5}{x-1} + \frac{2x-5}{x-7} - \frac{30-12x}{8x - x^2 - 7} = 0$.

236. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{3x-2}{x-1} - \frac{2x+3}{x+3} = \frac{12x+4}{x^2 + 2x - 3}$;

б) $\frac{5x-1}{x+7} - \frac{2x+2}{x-3} + \frac{63}{x^2 + 4x - 21} = 0$;

в) $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} = \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{16}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$.

237. При каких значениях a:

а) сумма дробей $\frac{a+1}{a-2}$ и $\frac{a-4}{a+1}$ равна дроби $\frac{3a+3}{a^2-a-2}$;

б) разность дробей $\frac{3a-5}{a^2-1}$ и $\frac{6a-5}{a-a^2}$ равна дроби $\frac{3a+2}{a^2+a}$?

238. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x-9}$;

б) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+21}$.

239. (*Для работы в парах.*) Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-5}$;

б) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+28} + \frac{1}{x}$.

1) Обсудите, в каком виде удобно представить уравнение в каждом случае, и выполните соответствующие преобразования.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли найдены корни уравнения, и исправьте ошибки, если они допущены.

240. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = x^2 + x - 9$ и $y = \frac{9}{x}$;   б) $y = x^2 + 6x - 4$ и $y = \frac{24}{x}$.

241. При каких значениях a:

а) равны значения выражений $\frac{5a+7-28a^2}{20a}$ и a^2;

б) являются противоположными числами значения выражений $\frac{2-18a^2-a}{3a}$ и $3a^2$?

242. (*Для работы в парах.*) Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $\frac{12}{x^2-2x+3} = x^2 - 2x - 1$;

б) $\frac{12}{x^2+x-10} - \frac{6}{x^2+x-6} = \frac{5}{x^2+x-11}$;

в) $\frac{16}{x^2-2x} - \frac{11}{x^2-2x+3} = \frac{9}{x^2-2x+1}$.

1) Выполните совместно задание а).
2) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли решены уравнения, и исправьте ошибки, если они допущены.

243. Найдите корни уравнения:

а) $\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 + 16\left(\frac{x-4}{x+2}\right)^2 = 17;$

б) $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 + 18\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2 = 11.$

244. (*Задача-исследование.*) Существует ли такое положительное число, при сложении которого с числом, ему обратным, получится сумма, в 13 раз меньшая суммы кубов этих чисел?

1) Обсудите, значения каких выражений сравниваются, и составьте соответствующее уравнение.
2) Введите новую переменную и решите полученное уравнение.
3) Для каждого из найденных значений вспомогательной переменной вычислите корень составленного уравнения.
4) Выберите значения корней, соответствующие условию задачи.

245. Решите уравнение:

а) $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3\frac{1}{2};$

б) $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8.$

П

246. Сократите дробь:

а) $\frac{12 - 5x - 2x^2}{15 - 10x};$ б) $\frac{3x^2 - 36x - 192}{x^2 - 256}.$

247. Постройте график функции $y = x^2 - 3$. Укажите промежутки, в которых функция принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения.

248. На строительстве работали две бригады. После 5 дней совместной работы вторую бригаду перевели на другой объект. Оставшуюся часть работы первая бригада закончила за 9 дней. За сколько дней могла бы выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно, если известно, что второй бригаде на выполнение всей работы потребовалось бы на 12 дней меньше, чем одной первой бригаде?

15. Решение задач с помощью уравнений

При решении задач алгебраическим методом, часто обозначают неизвестную величину буквой (вводят переменную) и составляют уравнение с одной неизвестной (с одной переменной). Приведём пример такой задачи.

Задача. Знаменатель обыкновенной дроби на 2 больше числителя. Если числитель дроби увеличить в 2 раза, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

▶ Пусть числитель дроби равен x, тогда её знаменатель равен $x + 2$. После увеличения числителя в 2 раза, а знаменателя на 16 получается дробь $\frac{2x}{x+18}$. Так как полученная дробь меньше данной дроби $\frac{x}{x+2}$ на $\frac{1}{4}$, то

$$\frac{x}{x+2} - \frac{2x}{x+18} = \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решим дробное рациональное уравнение. Умножим левую и правую части уравнения (1) на $4(x + 2)(x + 18)$. Выполнив далее тождественные преобразования и применив свойства уравнений, получим квадратное уравнение

$$5x^2 - 36x + 36 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{4}D = (-18)^2 - 5 \cdot 36 = 144,$$

$$x = \frac{18 \pm 12}{5}, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 1{,}2.$$

Так как при $x = 6$ и $x = 1{,}2$ значения выражений $x + 2$ и $x + 18$ отличны от нуля, то числа 6 и 1,2 являются корнями дробного рационального уравнения (1). Однако число 1,2 не удовлетворяет условию задачи, так как числитель обыкновенной дроби не может быть дробным числом.

Ответ: $\frac{6}{8}$. ◁

Заметим, что дробь $\frac{3}{4}$, которая получается при сокращении дроби $\frac{6}{8}$, не удовлетворяет условию задачи, так как её знаменатель лишь на 1 больше числителя.

Упражнения

249. Одно число на 6 больше другого. Если большее число разделить на меньшее и к частному прибавить результат от деления увеличеного в 4 раза меньшего числа на большее, то получится 4. Найдите эти числа.

250. Знаменатель обыкновенной дроби на 6 больше её числителя. Если из числителя вычесть 2, а к знаменателю прибавить 2, то дробь уменьшится на $\frac{1}{6}$. Найдите эту дробь.

251. Знаменатель обыкновенной дроби больше её числителя на 3. Если числитель дроби увеличить в 3 раза, а затем уменьшить на 7, а знаменатель увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 11, то получится дробь, обратная данной. Найдите эту дробь.

252. Из посёлка в город, до которого 150 км, выехали одновременно легковой и грузовой автомобили. Скорость легкового автомобиля была на 10 км/ч больше скорости грузового, поэтому он приехал в город на полчаса быстрее, чем грузовой автомобиль. Найдите скорость грузового автомобиля.

253. Мотоциклист проехал от села до озера 60 км. На обратном пути он уменьшил скорость на 10 км/ч, поэтому от озера в село он ехал на 0,3 ч дольше. Сколько времени мотоциклист ехал от озера до села?

254. На 80 км пути велосипедист тратит на 2 ч больше, чем мотоциклист, так как его скорость на 20 км/ч меньше, чем скорость мотоциклиста. Найдите скорость велосипедиста.

255. Первый лыжник прошёл дистанцию 30 км на $\frac{1}{2}$ ч быстрее, чем второй дистанцию 45 км, хотя скорость второго была на 3 км/ч больше. За какое время первый лыжник прошёл 30 км?

256. С первого участка собрали 80 ц проса, а со второго 90 ц проса, хотя площадь второго участка была на 2 га меньше. С каждого гектара второго участка собирали на 5 ц больше, чем с каждого гектара первого. Какова урожайность проса на каждом участке?

257. За 6 ч катер прошёл 36 км по течению реки и 48 км против течения. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 3 км/ч?

258. Плот проплывает 60 км по течению реки на 5 ч быстрее, чем такое же расстояние проходит моторная лодка против течения. Найдите скорость лодки по течению, если её скорость в стоячей воде 10 км/ч.

259. Моторная лодка прошла по течению 70 км. За то же время она может пройти против течения 30 км. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

260. Две швеи, работая вместе, выполнят полученный заказ за 6 дней. За сколько дней выполнит заказ каждая швея, работая отдельно, если одной из них для этого потребуется на 5 дней больше, чем другой?

261. Два слесаря выполнили задание за 12 ч. Если бы половину задания выполнил первый, а оставшуюся часть второй, то первому потребовалось бы времени на 5 ч больше, чем второму. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить задание?

П

262. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2ab + 2by + ay + y^2}{2ab - 2by + ay + y^2}$;

б) $\dfrac{9x^2 + 6x + 4}{27x^3 - 8}$.

263. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x + 6$, с их помощью найдите решение уравнения

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1 Какое уравнение с одной переменной называется целым? Приведите пример.

2 Как найти степень целого уравнения?

3 Дайте определение биквадратного уравнения. Объясните, как решают биквадратное уравнение.

4 Какое уравнение называется дробным рациональным? На примере уравнения $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x^2-7}{x^2-4x+3}$ объясните, как решают дробные рациональные уравнения.

§ 6 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

16. Решение неравенств второй степени с одной переменной

Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0,$$

где x — переменная, a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$, называют *неравенствами второй степени с одной переменной.*

Решение неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0$$

можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные или отрицательные значения. Для этого достаточно проанализировать, как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ в координатной плоскости: куда направлены ветви параболы — вверх или вниз, пересекает ли парабола ось x и если пересекает, то в каких точках.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим неравенство $5x^2 + 9x - 2 < 0$.

▶ Рассмотрим функцию $y = 5x^2 + 9x - 2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх.
Выясним, как расположена эта парабола относительно оси x. Для этого решим уравнение $5x^2 + 9x - 2 = 0$.

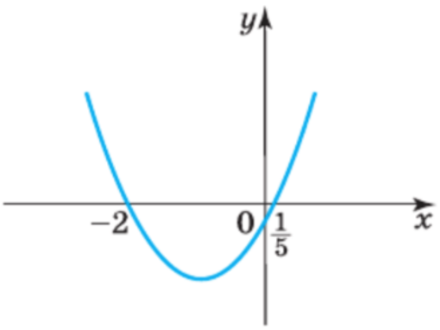

Рис. 41

Это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -2,\ x_2 = \frac{1}{5}.$$

Значит, парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -2 и $\frac{1}{5}$.

Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости (рис. 41). Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения, когда $x \in \left(-2; \frac{1}{5}\right)$. Следовательно, множеством решений неравенства $5x^2 + 9x - 2 < 0$ является числовой промежуток $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$.

Ответ: $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$. ◁

Заметим, что при рассмотренном способе решения неравенства нас не интересовала вершина параболы. Важно лишь было знать, куда направлены ветви параболы — вверх или вниз и каковы абсциссы точек её пересечения с осью x.

Пример 2. Решим неравенство $3x^2 - 11x - 4 > 0$.

▶ График функции $y = 3x^2 - 11x - 4$ — парабола, ветви которой направлены вверх.

Для того чтобы выяснить, пересекает ли парабола ось x и в каких точках, решим уравнение

$$3x^2 - 11x - 4 = 0.$$

Это уравнение имеет корни

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 4.$$

Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости (рис. 42). Из рисунка видно, что данное неравенство верно, если x принадлежит промежутку $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ или промежутку $(4; +\infty)$, т. е. множеством решений неравенства является объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $(4; +\infty)$.

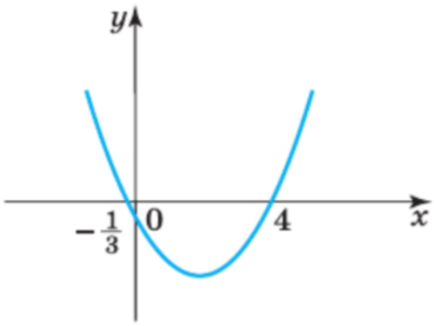

Рис. 42

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (4; +\infty)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 < 0$.

▶ Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$.

Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз.

Выясним, как расположен график относительно оси x. Решим для этого уравнение $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = 0$.

Это уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Значит, парабола касается оси x.

Изобразив схематически параболу (рис. 43), найдём, что функция принимает отрицательные значения при любом x, кроме 4.

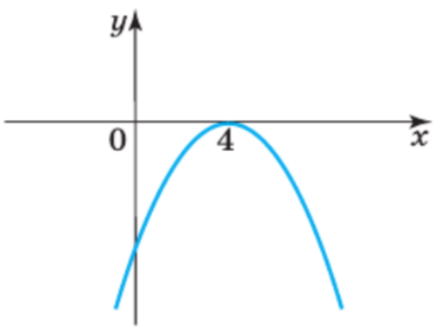

Рис. 43

Ответ: $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. ◁

Пример 4. Решим неравенство $x^2 - 3x + 4 > 0$.

▶ Графиком функции $y = x^2 - 3x + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Чтобы выяснить, как расположена парабола относительно оси x, решим уравнение

$$x^2 - 3x + 4 = 0.$$

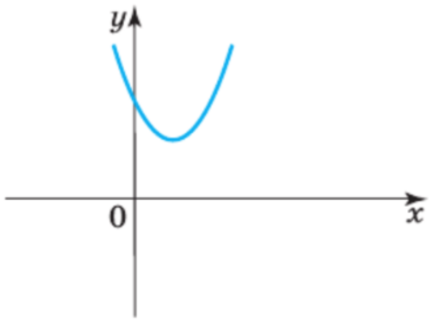

Рис. 44

Находим, что

$$D = 9 - 4 \cdot 4 = -7 < 0,$$

т. е. это уравнение не имеет корней. Значит, парабола не имеет общих точек с осью x.

Показав схематически расположение параболы в координатной плоскости (рис. 44), найдём, что функция принимает положительные значения при любом x.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$. ◁

Итак, для решения неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0$$

поступают следующим образом:

1) находят дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют, имеет ли трёхчлен корни;
2) если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трёхчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ или в нижней при $a < 0$;
3) находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

Упражнения

264. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 48 < 0$;
б) $2x^2 - 7x + 6 > 0$;
в) $-x^2 + 2x + 15 > 0$;
г) $-5x^2 + 11x - 6 > 0$;
д) $4x^2 - 12x + 9 > 0$;
е) $25x^2 + 30x + 9 < 0$;
ж) $-10x^2 + 9x > 0$;
з) $-2x^2 + 7x < 0$.

265. Найдите множество решений неравенства:

а) $2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$; б) $-6x^2 + 6x + 36 \geqslant 0$; в) $-x^2 + 5 \leqslant 0$.

266. Решите неравенство:

а) $2x^2 + 13x - 7 > 0$; г) $-2x^2 - 5x + 18 \leqslant 0$;
б) $-9x^2 + 12x - 4 < 0$; д) $3x^2 - 2x > 0$;
в) $6x^2 - 13x + 5 \leqslant 0$; е) $8 - x^2 < 0$.

267. Найдите, при каких значениях x трёхчлен:

а) $2x^2 + 5x + 3$ принимает положительные значения;
б) $-x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}$ принимает отрицательные значения.

268. Решите неравенство:

а) $x^2 < 16$; в) $0{,}2x^2 > 1{,}8$; д) $3x^2 < -2x$;
б) $x^2 \geqslant 3$; г) $-5x^2 \leqslant x$; е) $7x < x^2$.

269. Решите неравенство:

а) $0{,}01x^2 \leqslant 1$; в) $4x \leqslant -x^2$; д) $5x^2 > 2x$;
б) $\frac{1}{2}x^2 > 12$; г) $\frac{1}{3}x^2 > \frac{1}{9}$; е) $-0{,}3x < 0{,}6x^2$.

270. При каких значениях b уравнение имеет два корня:

а) $3x^2 + bx + 3 = 0$; б) $x^2 + 2bx + 15 = 0$?

271. При каких значениях t уравнение не имеет корней:

а) $2x^2 + tx + 18 = 0$; б) $4x^2 + 4tx + 9 = 0$?

272. Найдите множество решений неравенства:

а) $3x^2 + 40x + 10 < -x^2 + 11x + 3$;
б) $9x^2 - x + 9 \geqslant 3x^2 + 18x - 6$;
в) $2x^2 + 8x - 111 < (3x - 5)(2x + 6)$;
г) $(5x + 1)(3x - 1) > (4x - 1)(x + 2)$.

273. Решите неравенство:

а) $2x(3x - 1) > 4x^2 + 5x + 9$;
б) $(5x + 7)(x - 2) < 21x^2 - 11x - 13$.

274. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{12x - 3x^2}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x + 18}}$.

275. (*Для работы в парах.*) Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $7x^2 - 10x + 7 > 0$; г) $\frac{1}{4}x^2 - 8x + 64 \geqslant 0$;
б) $-6y^2 + 11y - 10 < 0$; д) $-9y^2 + 6y - 1 \leqslant 0$;
в) $4x^2 + 12x + 9 \geqslant 0$; е) $-5x^2 + 8x - 5 < 0$.

1) Обсудите, при каком условии неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c — некоторые числа, верно при любом значении переменной x. Укажите аналогичные условия для неравенства $ax^2 + bx + c < 0$.
2) Распределите, кто выполняет задания а), в), д), а кто — задания б), г), е), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено доказательство неравенств, и исправьте ошибки, если они допущены.

276. Какое из данных выражений принимает положительное значение при любом значении y?

1. $(y - 2)(y - 3) - 4$
2. $(5 - y)(1 - y) + 4$
3. $(5 - y)(1 - y) + 10$
4. $(y - 8)(y - 7) - 60$

277. Докажите, что:

а) $x^2 + 7x + 1 > -x^2 + 10x - 1$ при любом x;
б) $-2x^2 + 10x < 18 - 2x$ при $x \neq 3$.

278. Одна сторона прямоугольника на 7 см больше другой. Какой может быть меньшая сторона, если площадь прямоугольника не превосходит 60 см^2?

279. Длина прямоугольника на 5 см больше ширины. Какую ширину должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь была больше 36 см^2?

280. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0, \\ x^2 - 9 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 < 0, \\ x^2 - 4x > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0, \\ x^2 + 2x - 120 < 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \leqslant 0, \\ x^2 + 4x - 12 \leqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x^2 + 4x + 15 \geqslant 0, \\ x^2 - 9x + 8 \leqslant 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 < 0, \\ 3x^2 + x + 11 < 0. \end{cases}$

281. Укажите все целые значения x, принадлежащие области определения функции:

а) $y = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{9x - x^2 - 14}$;
б) $y = \sqrt{8x - x^2 - 12} + \sqrt{16 - x^2}$.

П

282. Функция задана формулой $y = \dfrac{0{,}5x - 2}{3}$. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения её графика с осью x; с осью y. Является ли эта функция возрастающей или убывающей?

283. Решите уравнение:

а) $y^4 - 24y^2 - 25 = 0$; б) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$.

284. Слиток массой 3 кг, содержащий 80% олова и 20% свинца, сплавили с куском олова, после чего процентное содержание олова в слитке составило 94%. Сколько олова добавили в слиток?

17. Решение неравенств методом интервалов

Рассмотрим функцию $f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 5)$.

Областью определения этой функции является множество всех чисел. Нулями функции служат числа -2, 3, 5. Они разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$ и $(5; +\infty)$ (рис. 45, *а*).

Выясним, каковы знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.

Рис. 45

Выражение $(x + 2)(x - 3)(x - 5)$ представляет собой произведение трёх множителей. Знак каждого из этих множителей в рассматриваемых промежутках указан в таблице.

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 3)$	$(3; 5)$	$(5; +\infty)$
$x + 2$	−	+	+	+
$x - 3$	−	−	+	+
$x - 5$	−	−	−	+

Отсюда ясно, что:

если $x \in (-\infty; -2)$, то $f(x) < 0$;
если $x \in (-2; 3)$, то $f(x) > 0$;
если $x \in (3; 5)$, то $f(x) < 0$;
если $x \in (5; +\infty)$, то $f(x) > 0$.

Мы видим, что на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$, $(5; +\infty)$ функция сохраняет знак, а при переходе через точки -2, 3 и 5 её знак изменяется (рис. 45, *б*).

Вообще пусть функция задана формулой

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где x — переменная, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — не равные друг другу числа. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются нулями функции. На каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль её знак изменяется.

Это свойство используется для решения неравенств вида

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)>0,\\(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)<0,\end{aligned} \qquad (1)$$

где x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа.

П р и м е р 1. Решим неравенство $(x+6)(x+1)(x-4)<0$.

▶ Это неравенство является неравенством вида (1), так как в левой части записано произведение $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, где $x_1=-6$, $x_2=-1$ и $x_3=4$. Для его решения удобно воспользоваться рассмотренным выше свойством чередования знаков функции.

Рис. 46

Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x)=(x+6)(x+1)(x-4)$$

(рис. 46, *а*). Найдём знаки этой функции на каждом из промежутков $(-\infty; -6)$, $(-6; -1)$, $(-1; 4)$ и $(4; +\infty)$. Для этого достаточно знать, какой знак имеет функция на одном из этих промежутков, и, пользуясь свойством чередования знаков, определить знаки на всех остальных промежутках. При этом удобно начинать с крайнего справа промежутка $(4; +\infty)$, так как на нём значения функции $f(x)=(x+6)(x+1)(x-4)$ заведомо положительны. Это объясняется тем, что при значениях x, расположенных правее всех нулей функции, каждый из множителей $x+6$, $x+1$ и $x-4$ положителен. Используя свойство чередования знаков, определим, двигаясь по координатной прямой справа налево, знаки данной функции на каждом из остальных промежутков (рис. 46, *б*).

Из рисунка видно, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -6)$ и $(-1; 4)$.

О т в е т: $(-\infty; -6) \cup (-1; 4)$. ◁

Рассмотренный способ решения неравенств называют *методом интервалов.*

Приведём примеры решения неравенств методом интервалов.

П р и м е р 2. Решим неравенство $x(0{,}5-x)(x+4)<0$.

▶ Приведём данное неравенство к виду (1). Для этого в двучлене $0{,}5-x$ вынесем за скобку множитель -1. Получим

$$-x(x-0{,}5)(x+4)<0,$$

отсюда

$$x(x-0{,}5)(x+4)>0.$$

Мы получили неравенство вида (1), равносильное данному. Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x)=x(x-0{,}5)(x+4)$$

(рис. 47, *а*). Покажем знаком «плюс», что на крайнем справа промежутке функция принимает положительное значение, а затем, двигаясь справа налево, укажем знак функции на каждом из промежутков (рис. 47, *б*). Получим, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-4; 0)$ и $(0{,}5; +\infty)$.

Рис. 47

Ответ: $(-4;\ 0)\cup(0{,}5;\ +\infty)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $(5x+1)(5-x)\geqslant 0$.

▶ Приведём неравенство к виду (1). Для этого в первом двучлене вынесем за скобки множитель 5, а во втором −1, получим

$$-5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)\geqslant 0.$$

Разделив обе части неравенства на −5, будем иметь

$$\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)\leqslant 0.$$

Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5),$$

т. е. точки $-\frac{1}{5}$ и 5, и укажем знаки функции на образовавшихся промежутках (рис. 48). Мы видим, что множество решений неравенства состоит из чисел $-\frac{1}{5}$ и 5 и чисел, заключённых между ними, т. е. представляет собой промежуток $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$.

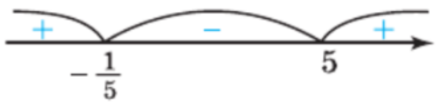

Рис. 48

Ответ: $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$. ◁

Заметим, что данное неравенство можно решить иначе, используя свойства графика квадратичной функции.

П р и м е р 4. Решим неравенство $\frac{7-x}{x+2} < 0$.

▶ Так как при всех значениях x, при которых дробь $\frac{7-x}{x+2}$ имеет смысл, знак этой дроби совпадает со знаком произведения $(7-x)(x+2)$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$(7-x)(x+2) < 0.$$

Приведя неравенство

$$(7-x)(x+2) < 0$$

к виду (1) и используя метод интервалов, найдём, что множеством решений этого неравенства, а значит, и исходного неравенства $\frac{7-x}{x+2} < 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -2)$ и $(7; +\infty)$.

О т в е т: $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$. ◁

П р и м е р 5. Решим неравенство $\frac{17-2x}{x-4} \geqslant 0$.

▶ Знак дроби $\frac{17-2x}{x-4}$ совпадает со знаком произведения $(17-2x)(x-4)$ при всех значениях x, при которых дробь имеет смысл. Поэтому данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(17-2x)(x-4) \geqslant 0,\\ x-4 \neq 0.\end{cases}$$

Неравенство $(17-2x)(x-4) \geqslant 0$ приведём к виду

$$(x-8{,}5)(x-4) \leqslant 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов и исключив из множества его решений число 4, найдём, что множеством решений исходного неравенства является промежуток $(4; 8{,}5]$.

О т в е т: $(4; 8{,}5]$. ◁

Упражнения

285. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x+8)(x-5) > 0$;
б) $(x-14)(x+10) < 0$;
в) $(x-3{,}5)(x+8{,}5) \geqslant 0$;
г) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right) \leqslant 0$.

286. Решите неравенство:

а) $(x+25)(x-30) < 0$;
б) $(x+6)(x-6) > 0$;
в) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right) \leqslant 0$;
г) $(x+0{,}1)(x+6{,}3) \geqslant 0$.

287. Решите неравенство:

а) $(x-2)(x-5)(x-12)>0$;
б) $(x+7)(x+1)(x-4)<0$;
в) $x(x+1)(x+5)(x-8)>0$.

288. Найдите, при каких значениях x:

а) произведение $(x+48)(x-37)(x-42)$ положительно;
б) произведение $(x+0{,}7)(x-2{,}8)(x-9{,}2)$ отрицательно.

289. Решите неравенство:

а) $(x+9)(x-2)(x-15)<0$;
б) $x(x-5)(x+6)>0$;
в) $(x-1)(x-4)(x-8)(x-16)<0$.

290. Найдите множество решений неравенства:

а) $5(x-13)(x+24)<0$;
б) $-\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\geqslant 0$;
в) $(x+12)(3-x)>0$;
г) $(6+x)(3x-1)\leqslant 0$.

291. Решите неравенство:

а) $2(x-18)(x-19)>0$;
б) $-4(x+0{,}9)(x-3{,}2)<0$;
в) $(7x+21)(x-8{,}5)\leqslant 0$;
г) $(8-x)(x-0{,}3)\geqslant 0$.

292. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(5-x)(x+8)}$;
б) $y=\sqrt{(x+12)(x-1)(x-9)}$.

293. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(2x+5)(x-17)}$;
б) $\sqrt{x(x+9)(2x-8)}$?

294. Решите неравенство:

а) $\frac{x-5}{x+6}<0$;
б) $\frac{1{,}4-x}{x+3{,}8}<0$;
в) $\frac{2x}{x-1{,}6}>0$;
г) $\frac{5x-1{,}5}{x-4}>0$;
д) $\frac{5x+1}{x-2}>0$;
е) $\frac{3x}{2x+9}<0$.

295. Решите неравенство:

а) $\frac{x-21}{x+7}<0$;
б) $\frac{x+4{,}7}{x-7{,}2}>0$;
в) $\frac{6x+1}{3+x}>0$;
г) $\frac{5x}{4x-12}<0$.

296. Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{x-1}{x-3}\geqslant 0$;
б) $\frac{x+6}{x-5}\leqslant 0$;
в) $\frac{2-x}{x}\geqslant 0$;
г) $\frac{3-2x}{x-1}\leqslant 0$;
д) $\frac{7x-2}{1-x}\geqslant 0$;
е) $\frac{1-11x}{2x-3}\leqslant 0$.

297. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x-8}{x+4} > 2$; в) $\dfrac{7x-1}{x} > 5$;

б) $\dfrac{3-x}{x-2} < 1$; г) $\dfrac{6-2x}{x+4} > 3$.

298. Решите неравенство:

а) $\dfrac{5x+4}{x} < 4$; в) $\dfrac{x}{x-1} \geqslant 2$;

б) $\dfrac{6x+1}{x+1} > 1$; г) $\dfrac{3x-1}{x+2} \geqslant 1$.

П

299. Напишите уравнение прямой, которая:

а) проходит через начало координат и точку $A(0{,}6;\ -2{,}4)$;
б) пересекает оси координат в точках $B(0;\ 4)$ и $C(-2{,}5;\ 0)$.

300. Два сосуда были наполнены растворами соли, причём в первом сосуде содержалось на 1 л меньше раствора, чем во втором. Концентрация раствора в первом сосуде составляла 10%, а во втором — 20%. После того как растворы слили в третий сосуд, получили новый раствор, концентрация которого составила 16%. Сколько раствора было в каждом сосуде первоначально?

Контрольные вопросы и задания

1 На примере неравенств $3x^2 + 5x - 2 < 0$ и $x^2 + 2x + 6 > 0$ расскажите, как можно решить неравенство второй степени, используя свойства графика квадратичной функции.

2 На примере неравенства $(x-5)(x+7)(x+9) < 0$ расскажите, как решают неравенства методом интервалов.

Для тех, кто хочет знать больше

18. Некоторые приёмы решения целых уравнений

При решении целых уравнений бывает полезна теорема о корне многочлена, которую мы примем без доказательства.

ТЕОРЕМА 1 **о корне многочлена**

Если число a является корнем многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \text{ где } a_0 \neq 0,$$

то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a)\,P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.

Эта теорема позволяет свести решение целого уравнения n-й степени, для которого известен один из корней, к решению уравнения $(n - 1)$-й степени, в частности от уравнения третьей степени перейти к квадратному.

Если целое уравнение с одной переменной с целыми коэффициентами имеет целый корень, то его можно найти, используя теорему о целых корнях целого уравнения.

ТЕОРЕМА 2 **о целых корнях целого уравнения**

Если уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором все коэффициенты — целые числа, причём свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

● Пусть x_0 — целый корень данного уравнения. Тогда верно равенство

$$a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -a_0x_0^n - a_1x_0^{n-1} - \ldots - a_{n-1}x_0,$$

$$a_n = x_0(-a_0x_0^{n-1} - a_1x_0^{n-2} - \ldots - a_{n-1}).$$

Число, записанное в этом равенстве в скобках, является целым, так как x_0 и все коэффициенты $-a_0$, $-a_1$, ..., $-a_{n-1}$ — целые числа. Значит, при делении a_n на x_0 получается целое число, т. е. x_0 — делитель свободного члена. ○

Приведём примеры решения целых уравнений с использованием указанных теорем.

Один из приёмов решения уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен третьей или более высокой степени, состоит, как известно, в разложении многочлена $P(x)$ на множители.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0.$$

▶ Если это уравнение имеет целый корень, то в силу теоремы 2 он является делителем числа -2, т. е. равен одному из чисел $1, -1, 2, -2$. Проверка убеждает нас, что корнем уравнения является число 2. Значит, в силу теоремы 1 многочлен $x^3 - 8x^2 + 13x - 2$ можно представить в виде произведения $(x-2)\cdot P(x)$, где $P(x)$ — многочлен второй степени.

Для того чтобы найти многочлен $P(x)$, разделим многочлен $x^3 - 8x^2 + 13x - 2$ на двучлен $x - 2$. Деление многочленов выполним уголком:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
- & x^3 - 8x^2 & + 13x & - 2 & \,x - 2 \\ \cline{5-5}
 & x^3 - 2x^2 & & & \,x^2 - 6x + 1 \\ \cline{2-4}
 & - & -6x^2 + 13x & & \\
 & & -6x^2 + 12x & & \\ \cline{3-4}
 & & - & x - 2 & \\
 & & & x - 2 & \\ \cline{4-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Значит, исходное уравнение можно представить в виде

$$(x-2)(x^2 - 6x + 1) = 0.$$

Отсюда

$$x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Первое уравнение имеет единственный корень — число 2. Второе уравнение имеет два корня: $3 - \sqrt{8}$; $3 + \sqrt{8}$.

О т в е т: 2; $3 - \sqrt{8}$; $3 + \sqrt{8}$. ◁

Ещё один приём, который используется при решении целых уравнений третьей и более высоких степеней, состоит во введении новой переменной.

П р и м е р 2. Решим уравнение

$$2007(x^4 - 6x^2 + 9) + 2006(x^2 - 3) - 1 = 0.$$

▶ Имеем $2007(x^2 - 3)^2 + 2006(x^2 - 3) - 1 = 0$. Используем подстановку $y = x^2 - 3$. Получим квадратное уравнение

$$2007y^2 + 2006y - 1 = 0.$$

Применение формулы корней квадратного уравнения приводит здесь к громоздким вычислениям. Поступим иначе. Попытаемся найти целый корень уравнения, если он существует. По теореме 2 он является делителем числа -1, т. е. равен 1 или -1. Подставляя в уравнение числа 1 и -1, убеждаемся, что корнем уравнения является число -1. Второй корень квадратного уравнения найдём, используя теорему Виета. Так как $y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{2007}$ и $y_1 = -1$, то $y_2 = \frac{1}{2007}$.

Из равенств

$$x^2 - 3 = -1 \text{ и } x^2 - 3 = \frac{1}{2007}$$

найдём корни исходного уравнения:

$$x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -\sqrt{3\frac{1}{2007}},\ x_4 = \sqrt{3\frac{1}{2007}}.$$

Ответ: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3\frac{1}{2007}}$; $\sqrt{3\frac{1}{2007}}$. ◁

Метод введения новой переменной находит применение при решении возвратных уравнений.

Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором коэффициенты членов уравнения, одинаково отстоящих от начала и конца, равны, т. е. $a_k = a_{n-k}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим пример решения возвратного уравнения четвёртой степени.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

▶ Воспользуемся тем, что коэффициенты членов многочлена, записанного в левой части уравнения, одинаково удалённых от начала и конца, равны между собой.

Разделив обе части уравнения на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем первый член с последним и второй с четвёртым, причём во второй сумме вынесем множитель -5 за скобки. Получим

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Введём новую переменную: $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2.$$

Отсюда

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Выполнив подстановку, получим

$$(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0,$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $y_1 = 1$ и $y_2 = 4$.
Значит,

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ или } x + \frac{1}{x} = 4.$$

Решая эти уравнения, найдём, что первое из них не имеет корней, а второе имеет два корня: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.
Значит, исходное возвратное уравнение имеет два корня: $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$.
Ответ: $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$. ◁

Иногда удаётся решить целое уравнение, воспользовавшись свойством возрастания или убывания функций.

Пример 4. Решим уравнение $x^5 + x - 2 = 0$.

▶ Если данное уравнение имеет целый корень, то в силу теоремы 2 он является делителем числа -2. Проверка убеждает нас, что корнем уравнения является число 1. Покажем, что других корней это уравнение не имеет. Для этого представим его в виде $x^5 = -x + 2$. Функция $y = x^5$ является возрастающей, а функция $y = -x + 2$ — убывающей. Значит, уравнение $x^5 + x - 2 = 0$ имеет единственный корень. Это хорошо видно на рисунке 49, на котором схематически изображены графики функций $y = x^5$ и $y = -x + 2$.
Итак, исходное уравнение имеет единственный корень — число 1.
Ответ: 1. ◁

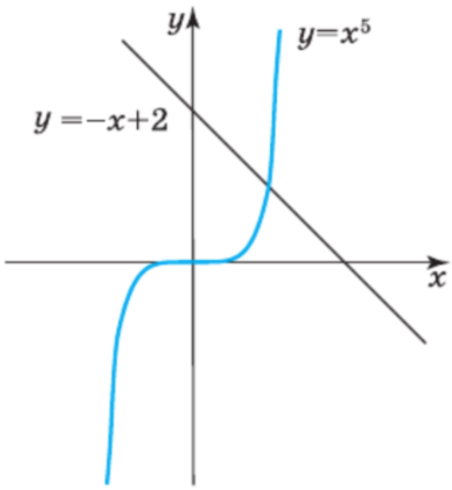

Рис. 49

Пример 5. Решим уравнение $(x^2 - 9)^2 + (x^2 - 2x - 3)^2 = 0$.

▶ Раскрытие скобок привело бы к уравнению 4-й степени. Поэтому будем рассуждать иначе.

Левая часть уравнения — сумма двух квадратов, поэтому корнем уравнения может быть то и только то число, при котором

$$(x^2 - 9)^2 = 0 \text{ И } (x^2 - 2x - 3)^2 = 0.$$

Из уравнения $(x^2 - 9)^2 = 0$ получим: $x^2 - 9 = 0$; $x = 3$ и $x = -3$.

Из уравнения $(x^2 - 2x - 3)^2 = 0$ получим: $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = 3$ и $x = -1$.

Значит, оба слагаемых в левой части уравнения одновременно обращаются в нуль только при $x = 3$.

Таким образом, уравнение имеет единственный корень, равный 3.

Запись решения может быть такой: $\begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -1. \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: 3. ◁

Упражнения

301. Из данных чисел

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 7,\ -7$$

выберите те, которые являются корнями уравнения

$$x^4 - x^3 - 51x^2 + 49x + 98 = 0.$$

Какие из них можно исключить сразу, не подставляя их в уравнение?

302. Решите уравнение:

а) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$;

б) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

303. При каких значениях p равны значения двучленов:

а) $p^3 - p^2$ и $8p - 12$; б) $p^3 - 3p$ и $p^2 + 1$?

304. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$ с осями координат.

305. Известно, что график функции $y = x^4 - ax^3 - 10x^2 + 80x - 96$ пересекает ось x в точке $(4; 0)$. Найдите a и координаты других точек пересечения графика функции с осью x.

306. Решите уравнение:

а) $718x^4 - 717x^2 - 1 = 0$; б) $206x^4 - 205x^2 - 1 = 0$.

307. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 8x)^2 - 4(x + 4)^2 = 256$;

б) $2(x^2 - 6x)^2 - 120(x - 3)^2 = 8$.

308. Решите уравнение:

а) $x^3 + 11x - 108 = 0$; б) $x^5 + 6x + 44 = 0$.

309. Из данных уравнений выберите то, которое имеет один и только один целый корень.

1. $x^3 - x + 3 = 0$ 2. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
3. $x^4 + x^2 - 20 = 0$ 4. $x^3 - 5x + 4 = 0$

310. Решите возвратное уравнение

$$10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0.$$

311. Докажите, что если число m является корнем уравнения $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где a, b, c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, то обратное ему число также является корнем этого уравнения.

312. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 4x - 12)^2 + (x^2 - 10x + 24)^2 = 0$;

б) $|x^2 + 15x + 50| + |x^2 + 7x + 10| = 0$.

313. Найдите корень уравнения $x^2 - 13x - \sqrt{5-x} = -\sqrt{5-x} - 30$. Если оно имеет два корня, то в ответе укажите больший из них.

314. Найдите корень уравнения $40 + \sqrt{x+2} = x^2 + 6x + \sqrt{x+2}$. Если оно имеет два корня, то в ответе укажите меньший из них.

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 5

315. Решите уравнение:

а) $x^5 - x^3 = 0$; в) $0{,}5x^3 = 32x$;

б) $x^6 = 4x^4$; г) $0{,}2x^4 = 4x^2$.

316. Найдите корни уравнения:

а) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4) = 25a^2 - 16$;

б) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 1$.

317. Решите уравнение:

а) $x^3 - x^2 - 4(x - 1)^2 = 0$; в) $5x^3 - 19x^2 - 38x + 40 = 0$;

б) $2y^3 + 2y^2 - (y + 1)^2 = 0$; г) $6x^3 - 31x^2 - 31x + 6 = 0$.

318. Решите уравнение:

а) $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$;

б) $x^3 + 4x^2 - 3x - 6 = 0$.

319. Решите уравнение $x^3 = x$ двумя способами: графическим и аналитическим.

320. С помощью графиков выясните, сколько решений может иметь уравнение $x^3 + ax + b = 0$ при различных значениях a и b.

321. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 6x)^2 - 5(x^2 + 6x) = 24$;

б) $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 5) = 3$;

в) $(x^2 + 3x - 25)^2 - 2(x^2 + 3x - 25) = -7$;

г) $(y + 2)^4 - (y + 2)^2 = 12$;

д) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 3$;

е) $(x^2 - x - 16)(x^2 - x + 2) = 88$;

ж) $(2x^2 + 7x - 8)(2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$.

322. Решите уравнение:

а) $y^7 - y^6 + y = 1$; б) $y^7 + y^6 - 27y = 27$.

323. Решите уравнение:

а) $2x^7 + x^6 + 2x^4 + x^3 + 2x + 1 = 0$;

б) $x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 4x^3 + x - 2 = 0$.

324. Найдите сумму корней биквадратного уравнения:

а) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$; в) $4x^4 - 12x^2 + 1 = 0$;

б) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$; г) $12y^4 - y^2 - 1 = 0$.

325. Является ли число:

а) $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 6x^2 + 3 = 0$;

б) $\sqrt{5 - \sqrt{2}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 10x^2 + 23 = 0$?

326. Разложите на множители трёхчлен:

а) $x^4 - 20x^2 + 64$; г) $x^4 - 3x^2 - 4$;

б) $x^4 - 17x^2 + 16$; д) $9x^4 - 10x^2 + 1$;

в) $x^4 - 5x^2 - 36$; е) $4x^4 - 17x^2 + 4$.

327. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3y^3 + 12y^2 - 27y - 108}{y^2 - 16} = 0$; б) $\dfrac{y^3 + 6y^2 - y - 6}{y^3 - 36y} = 0$.

328. При каких значениях x разность дробей $\dfrac{1}{x+2}$ и $\dfrac{1}{x+4}$ равна разности дробей $\dfrac{1}{x+8}$ и $\dfrac{1}{x+20}$?

329. Решите уравнение, используя выделение целой части из дроби:

а) $\dfrac{x^2-5x+3}{x-5}-\dfrac{x^2+5x+1}{x+5}=\dfrac{1}{4}$;

б) $\dfrac{x^2+6x+10}{x+3}-\dfrac{x^2-6x+7}{x-3}=7\dfrac{1}{8}$.

330. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{1}{x^2-6x+8}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{10}{x^2-4}=0$;

б) $\dfrac{3}{x^2-x-6}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{7}{x^2-9}$.

331. Решите уравнение

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}+\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}=\frac{4x^3-3x^2+14x-4}{x^4-1}.$$

332. Найдите корни уравнения:

а) $x^2=\dfrac{7x-4}{4x-7}$; б) $x^2=\dfrac{5x-3}{3x-5}$.

333. Решите уравнение, обозначив одно из слагаемых через t, а другое через $\dfrac{1}{t}$:

а) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{x^2+2}{3x-2}+\dfrac{3x-2}{x^2+2}=2\dfrac{1}{6}$.

334. Решите уравнение, используя подстановку $y=x^2$:

а) $\dfrac{x^4}{x^2-2}+\dfrac{1-4x^2}{2-x^2}+4=0$;

б) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}+\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{10}{x^4-3x^2-4}=0$.

335. Решите уравнение:

а) $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2-16\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2=15$; б) $\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2-9\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^2=8$.

336. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$; б) $9x^2-18x+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{18}{x}=22$.

337. При каких значениях a сумма чисел a и $\frac{1}{a}$ в $3\frac{1}{4}$ раза меньше суммы их кубов?

338. Решите уравнение:

а) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 22\left(x + \frac{1}{x}\right)$; б) $x^3 - \frac{1}{x^3} = 19\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

К параграфу 6

339. Решите неравенство:

а) $x^2 - 5x - 50 < 0$; г) $8p^2 + 2p \geqslant 21$;
б) $-m^2 - 8m + 9 \geqslant 0$; д) $12x - 9 \leqslant 4x^2$;
в) $3y^2 + 4y - 4 > 0$; е) $-9x^2 < 1 - 6x$.

340. Докажите, что при любом значении x верно неравенство:

а) $2(x + 1)(x - 3) > (x + 5)(x - 7)$;
б) $\frac{1}{4}(x + 5)(x - 7) \leqslant (x + 2)(x - 4)$.

341. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{144 - 9x^2}}$; б) $y = \frac{\sqrt{16 - 24x + 9x^2}}{x + 2}$.

342. При каких значениях a уравнение $(a + 2)x^2 + 8x + a - 4 = 0$ имеет два корня?

343. При каких значениях b уравнение $(b - 1)x^2 + 6x + b - 3 = 0$ не имеет корней?

344. При каких значениях c не имеет корней уравнение:

а) $x^4 - 12x^2 + c = 0$; б) $x^4 + cx^2 + 100 = 0$?

345. (*Задача-исследование.*) При каких значениях k биквадратное уравнение $x^4 - 13x^2 + k = 0$:

а) имеет четыре корня;
б) имеет два корня;
в) не имеет корней?

1) Обозначьте x^2 через y. Выясните, при каких значениях k полученное квадратное уравнение имеет два корня; имеет один корень; не имеет корней.
2) Укажите знаки корней квадратного уравнения с переменной y, если корни существуют.
3) Сделайте вывод о числе корней заданного уравнения в зависимости от значения k.

346. Найдите общие решения неравенств

$$x^2 + 6x - 7 \leqslant 0 \text{ и } x^2 - 2x - 15 \leqslant 0.$$

347. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 27x - 7 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ 2x^2 - 18 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x^2 + 17x + 6 < 0, \\ x < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 3x^2 - 15x < 0. \end{cases}$

348. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$

349. Решите неравенство:

а) $(x + 1{,}2)(6 - x)(x - 4) > 0$;

б) $\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{7} - x\right) < 0$;

в) $(x + 0{,}6)(1{,}6 + x)(1{,}2 - x) > 0$;

г) $(1{,}7 - x)(1{,}8 + x)(1{,}9 - x) < 0$.

350. При каких значениях x произведение $(3x - 5)(x + 4)(2 - x)$:

а) равно нулю; б) положительно; в) отрицательно?

351. Решите неравенство:

а) $(18x - 36)(x - 7) > 0$;

б) $(x - 7{,}3)(9{,}8 - x) > 0$;

в) $(x + 0{,}8)(4 - x)(x - 20) < 0$;

г) $(10x + 3)(17 - x)(x - 5) \geqslant 0$.

352. Решите неравенство, разложив его левую часть на множители:

а) $(x^2 - 16)(x + 17) > 0$; г) $x^3 - 0{,}01x > 0$;

б) $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 - 121) < 0$; д) $(x^2 - 9)(x^2 - 1) > 0$;

в) $x^3 - 25x < 0$; е) $(x^2 - 15x)(x^2 - 36) < 0$.

353. Решите неравенство:

а) $(x^2 + 17)(x - 6)(x + 2) < 0$; в) $(x - 1)^2(x - 24) < 0$;

б) $(2x^2 + 1)x(x - 4) > 0$; г) $(x + 7)(x - 4)^2(x - 21) > 0$.

354. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{4}{\sqrt{(3x - 1)(6x + 1)}}$; б) $y = \dfrac{7}{\sqrt{(11x + 2)(x - 4)}}$.

355. Равносильны ли неравенства:

а) $\frac{x-3}{x+1} \geqslant 0$ и $(x-3)(x+1) \geqslant 0$;

б) $\frac{x+5}{x-8} \leqslant 0$ и $(x+5)(x-8) \leqslant 0$?

356. Решите неравенство:

а) $\frac{x-8}{x+4} > 0$; в) $\frac{x+1}{3-x} \geqslant 0$; д) $\frac{2x-4}{3x+3} \leqslant 0$;

б) $\frac{x+16}{x-11} < 0$; г) $\frac{6-x}{x-4} \leqslant 0$; е) $\frac{5x-1}{2x+3} \geqslant 0$.

357. Решите неравенство:

а) $\frac{6x+2}{x+4} < 5$; в) $\frac{3-2x}{3x+2} \leqslant 1$;

б) $\frac{5x+8}{x} > 1$; г) $\frac{5x-4}{x+8} \geqslant 15$.

Глава IV УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В этой главе в центре внимания системы уравнений с двумя переменными, в которых одно или оба уравнения второй степени. Вы знаете, что если в системе есть уравнение первой степени, то её можно будет решить способом подстановки. Если же система составлена из двух уравнений второй степени, то найти её решение бывает затруднительно. Лишь в редких случаях это удаётся сделать, используя графический способ или алгебраический — подстановки или сложения. Вам предлагается более широкий круг текстовых задач, которые вы сможете решить с помощью уравнения или систем уравнений второй степени. Советуем обратить внимание на имеющие важное прикладное значение задачи на смеси и сплавы. Кроме того, вы встретитесь с неравенствами с двумя переменными. Это интересный материал, при изучении которого вы будете изображать на координатной плоскости множество решений неравенств с двумя переменными и их систем. При изучении этого материала вам окажется полезным использование компьютера.

§ 7 УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

19. Уравнение с двумя переменными и его график

При изучении алгебры вы уже встречались с уравнениями с двумя переменными. Вот примеры таких уравнений:

$$y - 5x = 3,\ s = 5t^2,\ 2a + 3b = 0,\ \frac{u}{v} = -1.$$

Напомним, что *решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство*. Например, пара (5; −4) является решением уравнения $x^2 - y^2 = 9$, а пара (4; −5) его решением не является. Заметим, что при использовании скобок для записи решений уравнения на первое место всегда ставят значение той переменной, которая по алфавиту идёт раньше.

Уравнению, содержащему две переменные, соответствует некоторое множество точек координатной плоскости — *график* этого уравнения.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают это уравнение в верное равенство.

В курсе ранее уже были рассмотрены некоторые уравнения с двумя переменными. Прежде всего это линейное уравнение, т. е. уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа. Если хотя бы один из коэффициентов a и b при переменных отличен от нуля, то графиком линейного уравнения является прямая. На рисунке 50 изображены прямые — графики уравнений вида $ax + by = c$ при различных значениях коэффициентов a и b.

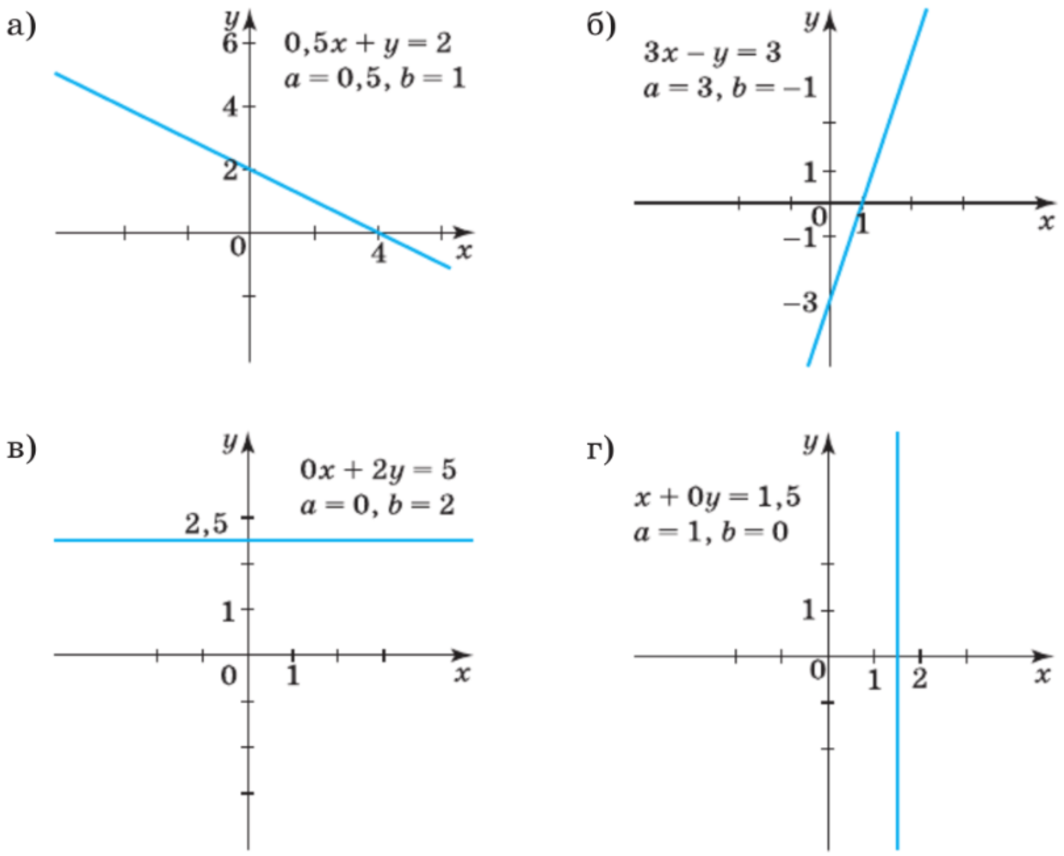

Рис. 50

Если коэффициенты при переменных одного знака оба положительные или оба отрицательные, то угловой коэффициент прямой, равный $-\frac{a}{b}$, отрицателен, и прямая при движении по оси x слева направо опускается вниз (рис. 50, *а*). Если же коэффициенты при переменных разных знаков, то угловой коэффициент прямой положителен и прямая поднимается вверх (рис. 50, *б*). Заметим, что если в уравнении $ax + by = c$ оба коэффициента a и b равны 0, то либо решением уравнения является любая пара значений x и y (его геометрический образ в этом случае — вся плоскость), либо уравнение решений не имеет.

Кроме линейного уравнения рассматривались также уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ и гиперболы $xy = k$, $k \neq 0$.

Положение параболы в координатной плоскости определяется знаком коэффициента a и значением дискриминанта D трёхчлена $ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Если $D > 0$, то парабола пересекает ось x. При $D = 0$ она касается оси x. При $D < 0$ парабола не имеет с осью x общих точек (рис. 51).

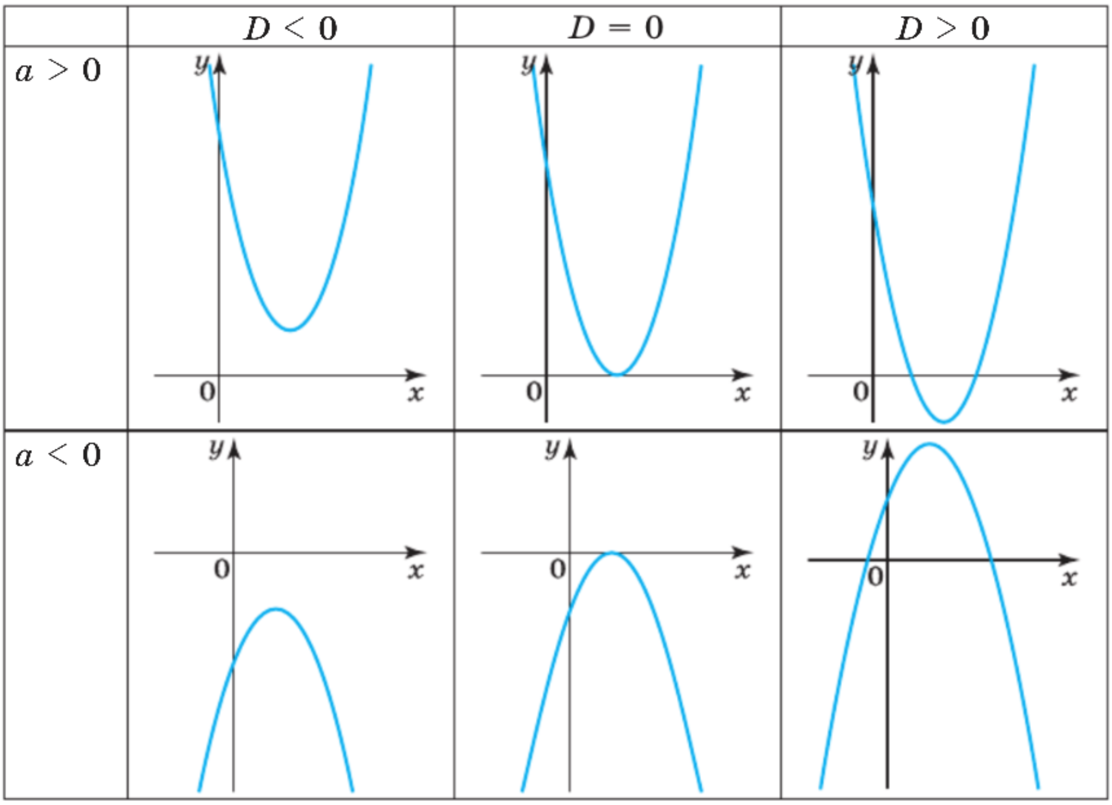

Рис. 51

Положение в координатной плоскости гиперболы $xy = k$ определяется знаком числа k. Если $k > 0$, то ветви гиперболы располагаются в первой и третьей координатных четвертях (рис. 52, *а*), если $k < 0$ — то во второй и четвёртой (рис. 52, *б*).

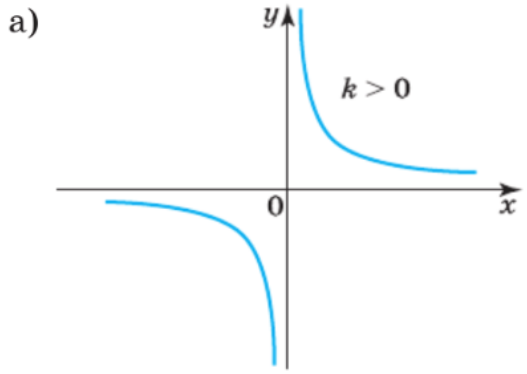

Рис. 52

С увеличением значений $|x|$ ветви гиперболы всё больше приближаются к оси абсцисс. Чем ближе к нулю значение аргумента x, тем меньше становится расстояние гиперболы от оси ординат. Но общих точек ни с осью x, ни с осью y гипербола не имеет.

Рассмотрим ещё одно уравнение второй степени, а именно уравнение $x^2 + y^2 = r^2$, где r — некоторое положительное число. Докажем, что графиком этого уравнения является окружность радиуса r с центром в начале координат (рис. 53).

Пусть точка $B(x; y)$ — произвольная точка этой окружности, не принадлежащая ни одной из координатных осей. Тогда из прямоугольного треугольника AOB имеем $AO^2 + AB^2 = BO^2$. Так как $AO = |x|$, $AB = |y|$, $BO = r$, то $|x|^2 + |y|^2 = r^2$, или, опустив знак модуля, получим

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

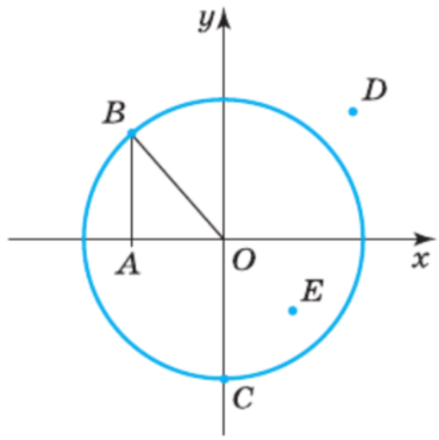

Рис. 53

Легко убедиться, что если точка окружности находится на одной из координатных осей, то её координаты также удовлетворяют уравнению (1). Например, подставив в уравнение (1) координаты точки $C(0; -r)$, получим верное равенство $0^2 + (-r)^2 = r^2$.

Можно доказать, что если точка не принадлежит окружности, как, например, точка D или точка E, то её координаты не удовлетворяют уравнению (1).

Значит, равенство $x^2 + y^2 = r^2$ верно тогда и только тогда, когда точка с координатами x и y принадлежит окружности радиуса r с центром в начале координат. Отсюда следует, что графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ является окружность радиуса r с центром в начале координат.

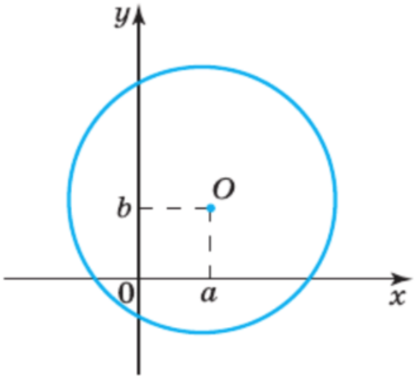

Рис. 54

Если каждую точку этой окружности перенести параллельно оси x на a единиц вправо при $a > 0$ или на $-a$ единиц влево при $a < 0$ и параллельно оси y на b единиц вверх при $b > 0$ или на $-b$ единиц вниз при $b < 0$, то получим окружность того же радиуса с центром в точке $O(a;\ b)$ (рис. 54). Уравнение этой окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Упражнения

358. Среди данных уравнений найдите уравнения прямых, уравнения гипербол, уравнения парабол, уравнения окружностей. Есть ли среди заданных уравнений те, которые не относятся ни к одному из перечисленных видов?

а) $\dfrac{x + y}{3} = 1$; д) $x^2 - 2x - y = 0$; и) $2x = 3y$;

б) $x^2 + 0{,}5y = 4$; е) $xy = 6$; к) $8x + 3y = 0$.

в) $8 + 3xy = 4$; ж) $x^2 - y^2 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 16 = 0$; з) $x^2 + y^2 = 4$;

359. Найдите координаты точек пересечения графика данного уравнения с осью x и с осью y. Постройте этот график.

а) $x - 2y = 3$; в) $4x - 0{,}5y = 2$;

б) $y + 5x = -10$; г) $2 - 2x = y$.

360. Покажите схематически, в каких координатных четвертях располагается график линейного уравнения:

а) $5x - 8y = -2$; в) $3x + 4y = 25$; д) $15x - 18 = 0$;

б) $5x + 8y = 2$; г) $3x + 12y = -20$; е) $10y + 5 = 0$.

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЁВ (1821—1894) — русский математик и механик, основатель знаменитой петербургской математической школы. Основные его труды относятся к теории чисел, математическому анализу, теории вероятностей и другим вопросам математики и смежных областей знаний.

361. Изобразив схематически графики линейных уравнений, выясните, в какой координатной четверти находятся точки их пересечения:

а) $\begin{cases} 2x + 5y = 8, \\ y - 3x = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 2y = 2, \\ x + 0{,}5y = 4. \end{cases}$

362. Составьте уравнение с двумя переменными, график которого изображён на рисунке 55.

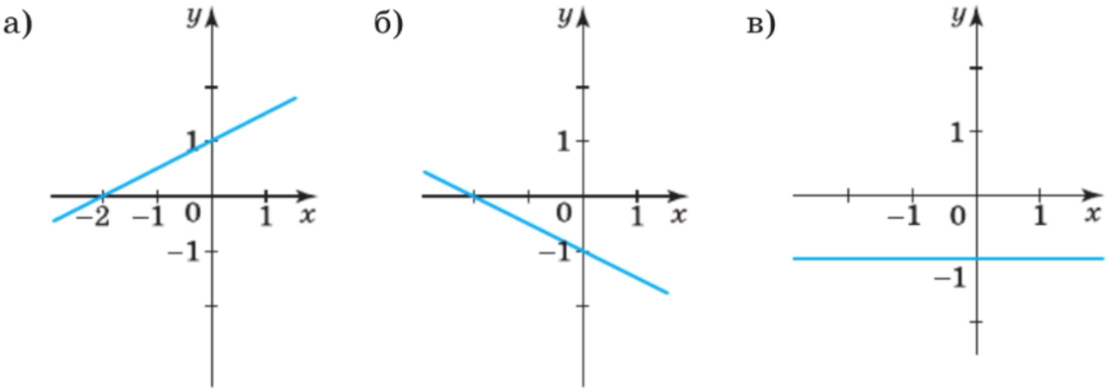

Рис. 55

363. Постройте график уравнения $(y - 5x)(x + y + 4) = 0$.

364. Постройте график уравнения:

а) $2y - 0{,}5x^2 = 0$; в) $4x^2 = 8 - y$;

б) $x^2 - 3y = 6$; г) $-5x^2 + 2y = 3$.

365. Постройте график уравнения:

а) $3xy = 12$; в) $2xy = -8$;

б) $\frac{1}{2}xy = 6$; г) $\frac{1}{2}xy = -6$.

366. График уравнения $xy = k$ проходит через точку $(-2; 4)$. Найдите число k и постройте этот график.

367. Запишите уравнение окружности с центром в начале координат, зная, что она проходит через точку:

а) $A(-2; \sqrt{5})$; б) $B(3; 4)$; в) $C(8; 0)$.

368. Напишите уравнение окружности, зная, что её центр находится в точке $K(2; -5)$ и она проходит через точку:

а) $A(-1; -1)$; б) $B(-3; 7)$; в) $C(1; -4)$.

369. Докажите, что графиком уравнения $x^2 + y^2 - 6(x - y) = 7$ является окружность.

370. Что является графиком уравнения $\frac{(2x+y)^2}{4} - (x - 0{,}5y)^2 = 24$?

Выберите верный ответ.

1. Окружность 2. Гипербола
3. Парабола 4. Пара прямых

371. При каких значениях m графиком уравнения

$$(x-4)^2 + (y+m)^2 = 15$$

является окружность, центр которой расположен в четвёртой координатной четверти?

372. При каких значениях r окружность $(x-5)^2 + (y-7)^2 = r^2$:

а) касается оси x; б) касается оси y?

373. Составьте уравнение окружности с центром в точке (3; 8), зная, что она касается:

а) оси x; б) оси y.

374. Постройте графики уравнений:

а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$; в) $x^2 + (y-3) = 25$;
б) $(x+2)^2 + y^2 = 4$; г) $(x+5)^2 + (y+7)^2 = 49$.

375. Проходит ли через точку $A(0{,}1; -0{,}1)$ график уравнения:

а) $x^2 + y^2 = 0{,}02$; б) $x^2 - y^2 = 0$?

376. При каком значении a точка $B(a; 1-a)$ принадлежит графику уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 14$; б) $x^2 + y^2 = 1$?

377. Составьте уравнения окружностей, симметричных окружности $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ относительно оси абсцисс; относительно оси ординат; относительно начала координат.

378. Дана окружность с центром в точке (5; 8) и радиусом, равным 4.

а) Составьте её уравнение.
б) Составьте уравнение окружностей, симметричных данной окружности относительно оси ординат; относительно оси абсцисс; относительно начала координат.

379. Составьте уравнение двух концентрических окружностей, радиусы которых равны 2 и 5 и общий центр которых находится:

а) в начале координат; в) в точке (0; 4);
б) в точке (3; 0); г) в точке (–1; 2).

380. Две концентрические окружности, заданные уравнениями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 16$, делят плоскость на три области:

кольцо, ограниченное окружностями, часть плоскости, ограниченную малой окружностью, и часть плоскости, находящуюся за пределами круга, ограниченного большой окружностью. В какой из трёх областей расположены точки: $M(5;\ 5)$, $N(1;\ -2)$, $P(3{,}6;\ 0)$, $Q(4{,}001;\ -0{,}5)$? Сделайте схематический рисунок.

П

381. Решите неравенство:

а) $25x^2 + 6x \leqslant 0$;

б) $x^2 - 169 > 0$;

в) $4x^2 - 225 \leqslant 0$;

г) $y^2 < 10y + 24$;

д) $15y^2 + 30 > 22y + 7$;

е) $3y^2 - 7 \leqslant 26y + 70$.

382. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} 11x - 9y = 37, \\ x = 1 + 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 16x - 4y = 5, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

383. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = 30, \\ 3x + 4y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 85, \\ 5x - 2y = 200. \end{cases}$

20. Решение систем уравнений с двумя переменными

Рассмотрим несколько примеров решения систем двух уравнений с двумя переменными, при этом будем использовать как аналитический, так и графический способы решения.

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 7x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ 3x + y - 2 = 0. \end{cases}$

▶ Эта система содержит линейное уравнение, поэтому для её решения воспользуемся способом подстановки.

Выразим из второго уравнения системы переменную y через x. Получим: $y = 2 - 3x$. Подставив в первое уравнение системы вместо y выражение $2 - 3x$, придём к уравнению:

$$7x^2 + (2 - 3x)^2 - 4 = 0.$$

Выполнив преобразования, получим квадратное уравнение

$$7x^2 + 4 - 12x + 9x^2 - 4 = 0.$$

После упрощения получим квадратное уравнение:

$$16x^2 - 12x = 0;$$

$$4x(4x - 3) = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

Подставив в уравнение $y = 2 - 3x$ значение $x_1 = 0$, найдём $y_1 = 2$. Подставив в уравнение $y = 2 - 3x$ значение $x_2 = \frac{3}{4}$, получим $y_2 = -\frac{1}{4}$.

Ответ: (0; 2), $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. ◁

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

▶ В этом случае, как и в предыдущем примере, можно было бы воспользоваться способом подстановки. Тогда, выразив одну из переменных из уравнения $xy = 6$, мы пришли бы к биквадратному уравнению. Но для данной системы существует и другой приём, который позволит избежать громоздких преобразований. Умножим второе уравнение системы на 2, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Далее сложим левые и правые части уравнений системы, а затем вычтем из первого уравнения системы второе. Получим:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x + y)^2 = 25, \\ (x - y)^2 = 1. \end{cases}$$

Последняя система распадается на четыре системы, содержащие два линейных уравнения с переменными x и y:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -5, \\ x - y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -5, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

В каждой системе уравнений почленно сложим уравнения, а затем почленно вычтем из первого уравнения второе. Получим четыре решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2), (−2; −3), (2; 3), (−3; −2). ◁

Пример 3. Решим графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -x^2 + 2x + 5. \end{cases}$$

Построим в одной системе координат графики уравнений

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ и } y = -x^2 + 2x + 5$$

(рис. 56). Координаты любой точки окружности являются решением уравнения $x^2 + y^2 = 25$, а координаты любой точки параболы — решением уравнения $y = -x^2 + 2x + 5$. Значит, координаты любой точки пересечения окружности и параболы удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, т. е. являются решением рассматриваемой системы. Используя рисунок, находим приближённые значения координат точек пе-

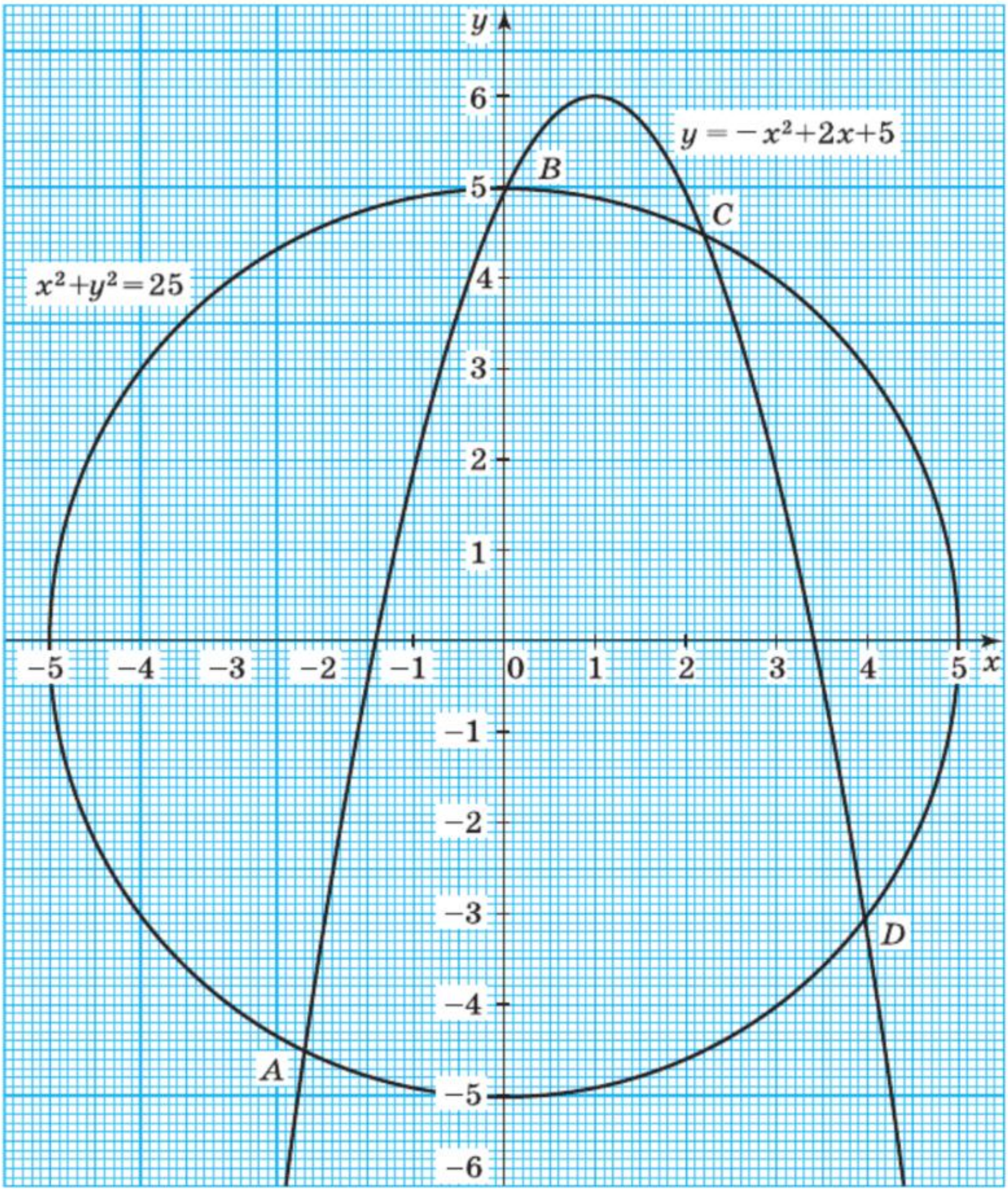

Рис. 56

ресечения графиков: $A(-2,2; -4,5)$, $B(0; 5)$, $C(2,2; 4,5)$, $D(4; -3)$. Следовательно, система уравнений имеет четыре решения:

$$x_1 \approx -2,2,\ y_1 \approx -4,5; \qquad x_2 \approx 0,\ y_2 \approx 5;$$
$$x_3 \approx 2,2,\ y_3 \approx 4,5; \qquad x_4 \approx 4,\ y_4 \approx -3.$$

Подставив найденные значения x и y в уравнения системы, можно убедиться, что второе и четвёртое решения являются точными, а первое и третье — приближёнными. ◁

Пример 4. Выясним, сколько решений имеет система уравнений
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = a, \end{cases}$ где a — некоторое число.

▶ График первого уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2; график второго уравнения — прямая, параллельная оси x.
Возможны следующие случаи:
если $|a| > 2$, то прямая не имеет с окружностью общих точек (рис. 57, *а*, *б*);
если $|a| = 2$, то прямая касается окружности (рис. 57, *в*, *г*);
если $|a| < 2$ (например, $a = 1$), то прямая пересекает окружность (рис. 57, *д*).
Ответ: если $|a| > 2$, то система решений не имеет;
если $|a| = 2$, то система имеет одно решение;
если $|a| < 2$, то система имеет два решения.

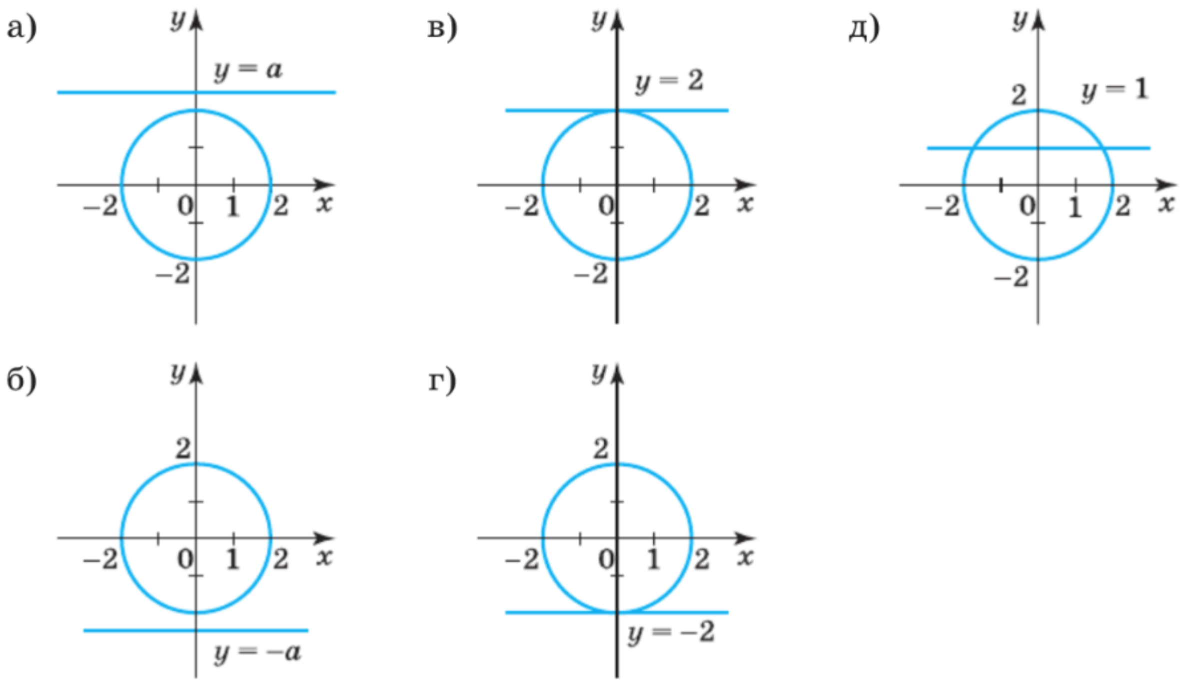

Рис. 57

Упражнения

384. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x-y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=4, \\ xy=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x+y^2=10. \end{cases}$

385. Решите систему уравнений графически и аналитически:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2+1, \\ x+2y=5. \end{cases}$

386. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-2)(y+3)=160, \\ y-x=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-1)(y+10)=9, \\ x-y=11. \end{cases}$

387. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6(y-x)-50=y, \\ y-xy=24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} p+5t=2(p+t), \\ pt-t=10. \end{cases}$

388. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-4=0, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ y^2-6y+5=0. \end{cases}$

389. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2+2x-4y=0, \\ 2y-x=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ y+2x=1. \end{cases}$

390. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11, \\ x-2y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy-3y=9, \\ 3x+2y=-1. \end{cases}$

391. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=12, \\ xy=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-y^2=34, \\ xy=20. \end{cases}$

392. Решите систему уравнений, используя способ сложения:

а) $\begin{cases} x^2-2y^2=14, \\ x^2+2y^2=18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=61, \\ x^2-y^2=11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy+x=56, \\ xy+y=54. \end{cases}$

393. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$