Пересечение множеств A и B — это множество $A \cap B$, которое содержит элементы, принадлежащие и множеству A, и множеству B.

Аналогично можно определить пересечение любого количества множеств.

ПРИМЕР 1. Пусть даны два множества:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ и } B = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Их пересечением является множество

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

Числа 1 и 4 не принадлежат множеству B, поэтому они не принадлежат и пересечению. Точно так же числа 5 и 7 не принадлежат множеству A, поэтому они не принадлежат пересечению. Зато числа 2 и 3 принадлежат обоим множествам. Поэтому они и образуют пересечение $A \cap B$.

Объединение множеств

Два или несколько множеств можно объединить в одно. Получится новое множество, которое называют **объединением**. Для обозначения объединения множеств используют значок $\cup$.

Объединение множеств A и B — это множество $A \cup B$, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

ПРИМЕР 2. Объединим множества A и B из примера 1. Получится числовое множество

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}.$$

Числа 1 и 4 принадлежат объединению $A \cup B$, потому что они принадлежат множеству A, числа 5 и 7 принадлежат $A \cup B$, потому что они принадлежат множеству B, а числа 2 и 3 принадлежат обоим множествам A и B, поэтому они тем более принадлежат их объединению, но считаются только по одному разу, а не по два.

При объединении множеств общие элементы учитываются один раз.

ПРИМЕР 3. Даны два числовых отрезка: $[-1; 3]$ и $[2; 5]$. Найдём их пересечение и объединение. Для этого изобразим оба отрезка на числовой прямой.

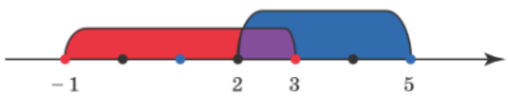
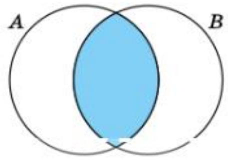


Рисунок 50

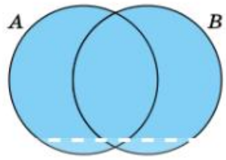
На рисунке 50 видно, что объединением является отрезок $[-1; 5]$, а пересечением — общая часть данных отрезков, то есть отрезок $[2; 3]$.

Диаграммы Эйлера

Мы изобразили на координатной прямой два числовых множества, и это помогло нам увидеть их пересечение и объединение. Как быть с другими множествами? Можно ли придумать способ изображения множеств произвольной природы?



а) Пересечение множеств A и B



б) Объединение множеств A и B

Рисунок 51

Удобно использовать **диаграммы Эйлера**[1]. Сами множества A и B изобразим кругами. Тогда общая часть этих кругов изображает множество $A \cap B$ (рис. 51, *а*). На рисунке 51, *б* закрашено объединение множеств A и B.

На рисунке 51 мы изображали множества A и B кругами. Это не обязательно. Можно использовать квадраты, треугольники и вообще любые фигуры. Главное — правильно показать, как множества связаны друг с другом.

Диаграмма Эйлера — способ графического представления множеств и операций над ними с помощью геометрических фигур.

На диаграммах Эйлера можно показывать не только объединение и пересечение. Можно наглядно представить включение одного множества в другое.

ПРИМЕР 4. Дана диаграмма Эйлера (рис. 52). Запишем все связи между множествами A, B и C, которые только можно увидеть на этой диаграмме.

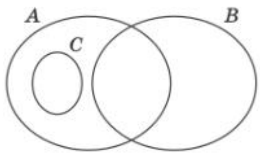


Рисунок 52

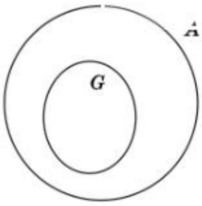
Мы не знаем, что это за множества и каковы их элементы. Диаграмма Эйлера даёт мало информации, но всё же кое-что сказать можно.

1. Множества A и B имеют непустое пересечение.
2. Множество C является подмножеством множества A: $C \subset A$.
3. Множества C и B не пересекаются. Можно сказать, что их пересечение — пустое множество: $B \cap C = \varnothing$.

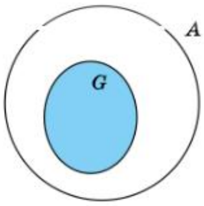
Иногда можно понять не только то, как связаны сами множества, но и как связано число элементов в одном множестве и число элементов во втором множестве.

ПРИМЕР 5. В первом классе 24 ученика, из них 15 — девочки. Обозначим множество всех учеников буквой A, а множество, состоящее из всех девочек этого класса, — буквой G. Сколько элементов содержит множество: а) $A \cap G$; б) $A \cup G$?

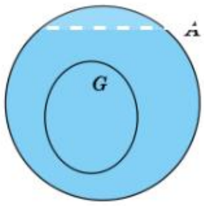
Решение. Каждая девочка в классе является ученицей. Поэтому $G \subset A$. Изобразим множества на диаграмме (рис. 53, *а*).



а) Фигура G внутри фигуры A



б) $A \cap G = G$



в) $A \cup G = A$

Рисунок 53

[1] Часто такие диаграммы называют диаграммами Эйлера — Венна или короче: круги Эйлера.

Чтобы получить пересечение, нужно закрасить общую часть фигур A и G (рис. 53, *б*). Но общая часть совпадает с фигурой G, поскольку она полностью лежит внутри фигуры A. Значит, $A \cap G = G$, а поэтому пересечение содержит ровно 15 элементов.

Чтобы найти объединение, нужно закрасить обе фигуры (рис. 53, *в*). Но получается фигура A, поскольку G лежит внутри. Значит, $A \cup G = A$, поэтому множество $A \cup G$ содержит ровно 24 элемента — столько, сколько содержит множество A.

На этом примере с помощью диаграмм Эйлера мы проиллюстрировали важное свойство множеств, одно из которых содержит другое.

Свойство. Если $B \subset A$, то $A \cap B = B$ и $A \cup B = A$.

Вопросы

1 Сравните два способа изображать множества — числовую прямую и диаграмму Эйлера. Как вы думаете, в каких случаях удобнее использовать числовую прямую? В каких случаях удобнее диаграмма Эйлера?

2 A и B — два множества. Является ли утверждение $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ истинным или ложным высказыванием?

3 Может ли утверждение $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ быть истинным? Если да, то приведите пример таких множеств A и B.

Задачи

203 Даны два множества $C = \{a, o, d, q\}$ и $D = \{p, o, t, q\}$.

а) Перечислите элементы множества $C \cap D$;

б) Перечислите элементы множества $C \cup D$.

204 Даны два числовых промежутка $(-3; 4]$ и $(-2; 7]$. Запишите промежуток, который является:

а) их объединением;

б) их пересечением.

205 Изобразите на диаграмме Эйлера множества X и Y, для которых выполняются соотношение:

а) $X \cap Y = X$; б) $X \cup Y = X$; в) $X \cup Y = \varnothing$.

206 Перерисуйте в тетрадь диаграмму Эйлера (рис. 54) и укажите на ней множество:

а) $A \cup (B \cap C)$; б) $A \cap (B \cup C)$.

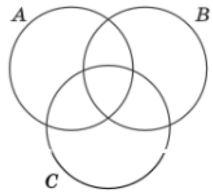


Рисунок 54

207 Пользуясь диаграммой Эйлера, проверьте, верно ли равенство:

а) $A \cup (B \cap A) = B$; б) $A \cap (B \cup A) = A$.

208 Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

209 Двенадцать малышей вышли во двор играть в песочнице. Каждый, кто принёс ведёрко, принёс и совочек. Забыли дома ведёрко девять малышей, совочек забыли двое. На сколько меньше тех, кто принёс ведёрко, чем тех, кто забыл дома ведёрко, но принёс совочек?

34* Множества решений неравенств и систем

ПРИМЕР 1. Предположим, что нужно решить систему двух неравенств с одной переменной. Например, систему

$$\begin{cases} 3x-2<1, \\ 4x+5>-3. \end{cases}$$

Преобразуем оба неравенства и получим:

$$x < 1 \text{ и } x > -2.$$

Эти два условия должны выполняться одновременно. Иными словами, мы ищем такие значения x, которые удовлетворяют и первому неравенству, и второму. Значит, нужно найти пересечение множеств $(-\infty; 1)$ и $(-2; +\infty)$. Уже знакомый нам способ (рис. 55) даёт решение: интервал $(-2; 1)$.

Ответ: $(-2; 1)$.

ПРИМЕР 2. Не обязательно решение неравенств или систем сводится к поиску пересечения числовых промежутков. Рассмотрим неравенство

$$|x-3| \geqslant 5.$$

Это неравенство можно прочесть так: «Расстояние от числа x до числа 3 не меньше, чем 5». Все такие числа x можно изобразить на числовой прямой. Они попадают в два промежутка $(-\infty; -2]$ и $[8; +\infty)$ (рис. 56). Решением неравенства является любое число из любого из этих двух промежутков. Поэтому решением неравенства является объединение этих двух промежутков.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [8; +\infty)$.

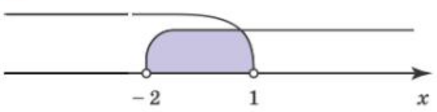


Рисунок 55

Рисунок 56

Умение находить пересечения и объединения множеств позволяет находить и верно записывать множества решений уравнений, неравенств и систем.

Вопросы

1 Вспомните, какие виды числовых промежутков вам известны.
2 Каким множеством может быть пересечение двух числовых отрезков?
3 Каким множеством является объединение двух числовых отрезков, которые имеют общую точку?
4 Каким множеством может быть пересечение двух числовых лучей?

Задачи

210 Найдите пересечение двух числовых промежутков и изобразите промежутки и их пересечение на числовой прямой.

а) $1 \leqslant x \leqslant 3$ и $2 < x \leqslant 8$;
б) $x > 8$ и $x > 5$;
в) $x \leqslant 1{,}5$ и $-3 \leqslant x \leqslant 6$.
г) $2 < x < 9$ и $x \geqslant 5{,}7$.

211 Изобразите объединение числовых промежутков на числовой прямой.

а) $3 < x \leqslant 5$ и $4 < x \leqslant 8$;

б) $x > 2$ и $x < -1$;

в) $x \geqslant 6$ и $x \leqslant 9$;

г) $5 \leqslant x < 7$ и $x > 4$.

212 Запишите с помощью знака объединения множество, изображённое на рисунке 57.

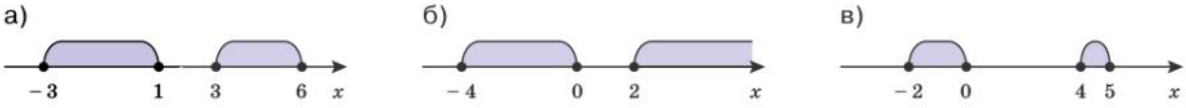


Рисунок 57

213 Найдите пересечение и объединение числовых промежутков:

а) $[4;\ 7]$ и $(0;\ 6)$;

б) $(-5;\ 2)$ и $(3;\ 7)$;

в) $[-4;\ 1]$ и $(-2;\ 5)$.

г) $(-\infty;\ 7]$ и $[5;\ +\infty)$.

214 Найдите пересечение и объединение числовых лучей:

а) $x < 6$ и $x \geqslant 4$;

б) $x \geqslant 5$ и $x \leqslant 1$.

215 Известно, что $x \in [1;\ 4]$ и $x \in (2;\ 5)$. Истинны ли утверждения:

а) $x \in (2;\ 4]$;

б) $3 \leqslant x \leqslant 4$;

в) $x \in (-5;\ 8)$;

г) $x > 2$?

216 Решая систему двух неравенств относительно переменной x, школьник получил отдельно решения обоих неравенств: $x \geqslant 3$ и $x \leqslant 7$. Укажите промежуток, который является решением системы, и изобразите его на числовой прямой.

217 При решении системы двух неравенств получились решения обоих неравенств: $x \leqslant -4$ и $x > 8$. Какое множество является решением системы?

218 Решая систему неравенств, школьник нашёл, что переменная a должна удовлетворять одновременно двум утверждениям: $a > 5$ и $a \geqslant 3$. Запишите множество всех значений a, которые являются решением задачи.

219 В задаче требовалось найти значения переменной y. Решая задачу, школьник нашёл, что переменная y должна удовлетворять хотя бы одному из двух неравенств: $3 < y \leqslant 4$ и $-2 \leqslant y \leqslant 0$. Запишите множество всех значений переменной y, которые не являются решением задачи.

35* Правило умножения

Предположим, у нас есть два множества. Что будет, если составить пары из элементов этих множеств? Например, на переговоры приезжают две дипломатические делегации из двух стран. В первой делегации 3 дипломата, а во второй 4 дипломата. Каждый дипломат пожимает руки всем дипломатам из другой делегации. Сколько всего случилось рукопожатий? Изобразим оба множества и рукопожатия с помощью графа (рис. 58).

Слева (красные вершины) — дипломаты из первой делегации, а справа (синие вершины) — из второй.

Можно считать, что каждое рукопожатие — это пара дипломатов. Таким образом, возникает множество пар. Сколько элементов в этом множестве? Очевидно, столько

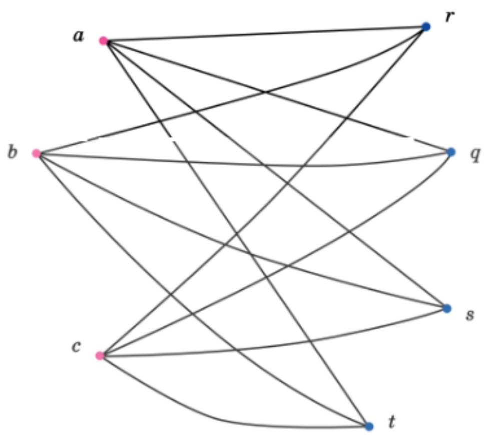


Рисунок 58

же, сколько рёбер в этом графе. Попробуйте, не пересчитывая, сразу сказать, сколько их.

Каждая из 3 красных вершин связана с четырьмя синими вершинами, значит, из каждой красной вершины исходит ровно 4 ребра. Всего красных вершин 3, поэтому всего рёбер $3 \cdot 4 = 12$.

Получается, что если имеется множество $A = \{a, b, c\}$, в котором 3 элемента, и множество $B = \{r, q, s, t\}$, в котором 4 элемента, то можно составить множество пар вида (a, r), (c, s) и т. п. В каждой паре сначала записан какой-то элемент множества A, а потом — какой-то элемент множества B. То есть пары **упорядоченные**, а всего этих пар 12.

Если в множествах A и B другое число элементов, скажем, пусть в множестве A всего n элементов, а в множестве B всего k элементов, то таким же рассуждением мы найдём, что множество упорядоченных пар состоит из nk элементов. Получается правило.

Правило умножения. Если множество A состоит из n элементов, а множество B — из k элементов, то множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, состоит из nk элементов.

Это правило иногда применяется не столь прямо, как мы это сделали в задаче о дипломатах. Иногда его приходится немного видоизменять.

ПРИМЕР 1. Предположим, что встречаются 6 человек, и каждый пожимает руки всем остальным. Сколько всего будет рукопожатий?

Решение. Кажется, что задача совсем другая, ведь у нас нет двух множеств, а есть только одно множество. Тем не менее правило умножения поможет и здесь. Составим все возможные пары, используя множество из 6 человек дважды. Тогда пар будет $6 \cdot 6 = 36$. Но при этом мы посчитали и пары, которые каждый образует сам с собой, то есть 6 пар лишние.

Если их удалить, то останется $36 - 6 = 30$ пар, но при этом каждое рукопожатие посчитано дважды. Например, если в этой группе есть Иван и Дмитрий, то получаются две пары (Иван, Дмитрий) и (Дмитрий, Иван), а рукопожатие они делают только одно. Поэтому рукопожатий вдвое меньше, чем пар: $\frac{30}{2} = 15$.

Рассуждая так же в общем виде, видим, что если в компании не шестеро, а n человек, то рукопожатий будет

$$\frac{n^2-n}{2}.$$

Можно было рассуждать даже проще: каждый из n человек пожал руку каждому из $n-1$ оставшихся, поэтому правило умножения даёт $n(n-1)$ упорядоченных пар, а неупорядоченных — вдвое меньше:

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Убедитесь, что два полученных выражения тождественно равны.

ПРИМЕР 2. Сколько диагоналей у 10-угольника? Будем рассуждать похожим образом. Диагональ — это «рукопожатие двух вершин». Будем составлять пары: на один конец диагонали поставим любую из десяти вершин (синяя на рис. 59), а на другой — любую из семи вершин (кроме выбранной вершины и двух её соседей). Получается $10 \cdot 7$ упорядоченных пар. При этом каждую диагональ мы посчитали 2 раза. Значит, всего диагоналей вдвое меньше:

$$\frac{10 \cdot 7}{2} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Напишите выражение, которое показывает, сколько диагоналей у n-угольника.

С помощью правила умножения можно перечислять не только пары, но и тройки, четвёрки и т. д. Самостоятельно сформулируйте правило умножения для трёх или нескольких множеств.

ПРИМЕР 3. Сколько существует треугольников с вершинами в вершинах правильного пятиугольника (рис. 60)?

Решение. Первую точку можно выбрать пятью способами, вторую — четырьмя, третью — тремя. Получается $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ упорядоченных троек из этих пяти точек. При этом каждый треугольник мы посчитали 6 раз. Например, треугольник ABC посчитан ещё как треугольники ACB, BCA, BAC, CAB и CBA. Значит, 60 нужно разделить на 6.

Ответ: 10.

ПРИМЕР 4. Сколько существует способов составить очередь из 6 человек? Рассуждение похожее, и снова помогает правило умножения. На первой позиции любой из 6. Тогда за ним можно поставить любого из пяти оставшихся, за ним — одного из четырёх оставшихся, и т. д. Когда мы выберем предпоследнего (2 способа), останется кто-то один, кто и займёт последнее место. С помощью правила умножения получаем, что общее число способов составить разные очереди из шести человек равно

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

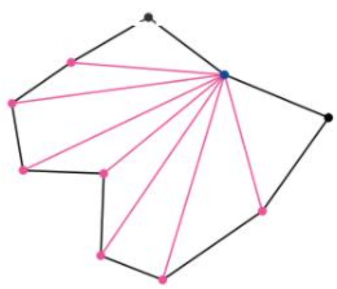


Рисунок 59

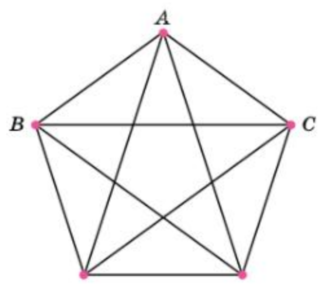


Рисунок 60

В теории вероятностей правило умножения помогает перечислять события. Мы знаем, что общее число результатов двукратного бросания костей можно найти по правилу умножения: $6 \cdot 6 = 36$. Если же мы бросаем три монеты, то может случиться один из $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ результатов, потому что каждый раз монета падает одной из двух сторон вверх.

ПРИМЕР 5. Сколько возможно различных результатов в случайном опыте, в котором игральный кубик бросают 3 раза; 4 раза?

Решение. При трёхкратном бросании правило умножения даёт

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$$

вариантов, а если шестигранную кость бросить четыре раза, то может случиться один из $6^4 = 1296$ результатов.

Вопросы

1 Сформулируйте правило умножения для двух множеств.

2 Сколько может быть различных результатов при бросании трёх монет?

Задачи

220 В группе детского сада 11 мальчиков и 8 девочек. Сколько можно составить пар «мальчик — девочка»?

221 В множестве A восемь элементов, а в множестве B пять элементов. Сколько можно составить пар вида $(a; b)$, где $a \in A$ и $b \in B$?

222 Игральная кость имеет форму правильного двенадцатигранника. Грани пронумерованы числами от 1 до 12. Эту кость бросают 2 раза. Сколько существует различных результатов? Считайте, что пары выпавших чисел упорядочены: например, сначала 8, а затем 12 и сначала 12, а затем 8 — это разные результаты.

223 Сколько существует натуральных трёхзначных чисел, которые начинаются не цифрой 9 и при этом делятся на 5?

224 Сколько существует натуральных четырёхзначных чисел, которые составлены только из:

а) чётных цифр;

б) нечётных цифр?

225 Сколько диагоналей:

а) у 15-угольника;

б) у 20-угольника?

226 Натуральное число называется палиндромом, если оно одинаково читается в обе стороны. Например, числа 343 и 89 398 – палиндромы.

Сколько существует:

а) трёхзначных чисел-палиндромов;

б) четырёхзначных чисел-палиндромов;

в) семизначных палиндромов;

г) восьмизначных палиндромов?

227 Четыре подруги отправляли друг другу новогодние открытки: каждая отправила по одной трём другим. Сколько всего открыток было отправлено?

228 У Вити восемь разных учебников. Сколько существует способов поставить их в ряд на книжной полке?

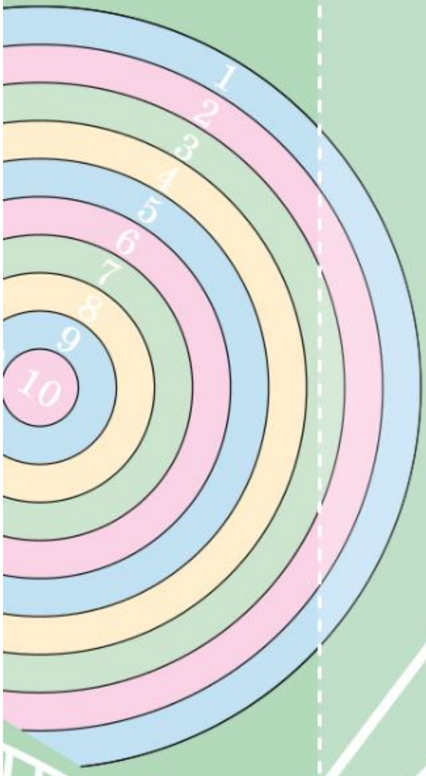
229 Сколько существует способов:

а) рассадить пять человек вокруг круглого стола на пять стульев;

б) поставить этих пятерых в хоровод вокруг ёлки?

230 Сколько четырёхзначных натуральных чисел можно составить из цифр от 1 до 9 таким образом, чтобы каждая следующая цифра была больше предыдущей (например, 1367)?

VIII Математическое описание случайных явлений



В этой главе мы повторим то, что уже знаем о случайных событиях, и рассмотрим случайные события как множества, состоящие из элементарных событий.

Чтобы определить вероятности событий в случайном опыте, нужно задать вероятности элементарных событий. Это сделать легко, если все элементарные события имеют одинаковые шансы: они равновозможны. Чаще всего такие опыты искусственные: они связаны с играми или жребиями. Мы научимся вычислять вероятности событий в таких опытах.

36 Случайные опыты и элементарные события

Ещё раз обратим внимание на то, что о случайных событиях можно говорить только при определённых условиях. Если нет условий, то нет и событий. Например, случайное событие «выпадение орла» возможно только в опыте с подбрасыванием монеты. Без этого о выпадении орла говорить нельзя. О случайном событии «электрическая лампочка прослужит более 100 часов» можно говорить, только если имеется лампочка, которую включают в электрическую сеть.

Условия и действия, при которых может наступить случайное событие, принято называть **случайным опытом** или **случайным экспериментом**.

Точное математическое определение случайного опыта дать непросто. Для этого требуются абстрактные понятия, которые уведут нас далеко от цели.

Мы не даём определение случайного опыта так же, как в учебнике геометрии не даётся определение плоскости. Вместо этого мы иллюстрируем понятие случайного опыта многочисленными примерами.

Иногда случайный опыт — это действительно опыт, вроде бросания игральной кости или испытания лампочки. А иногда слово «опыт» подходит меньше. Например, гроза в определённый летний день, без сомнения, случайное событие. Но здесь случайный опыт проводит не человек, а природа.

Наступление некоторых событий можно предсказать. Мы твёрдо знаем, что любая электрическая лампочка в конце концов перегорит. В опыте с лампочкой это событие **достоверное**. Напротив, событие «лампочка никогда не перегорит» — **невозможное**.

Невозможное и достоверное события также принято считать случайными.

В случайном опыте могут произойти различные случайные события. Например, в результате бросания игральной кости можно говорить о событии «выпадет четвёрка» или о событии «выпадет чётное число очков». Событие «выпадет чётное число очков» можно разбить на три события: «выпадет два очка», «выпадет четыре очка», «выпадет шесть очков». А событие «выпадет четвёрка» на более простые события не разделяется.

События случайного опыта, которые нельзя разделить на более простые, называются **элементарными событиями** или **элементарными исходами**.

В каждом опыте можно выделить элементарные события, из которых состоят все остальные события. Здесь снова можно провести аналогию с геометрией. Геометрические фигуры на плоскости состоят из точек. Точно так же события внутри случайного опыта состоят из элементарных событий.

В результате случайного опыта обязательно наступает только одно элементарное событие.

ПРИМЕР 1. При подбрасывании игральной кости элементарных событий шесть: «выпадет одно очко», «выпадет два очка» и т. д., вплоть до события «выпадет шесть очков». Коротко их можно записать цифрами: «1», «2», «3», «4», «5», «6».

В более сложных опытах элементарных событий больше.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим опыт, где игральную кость бросают два раза. В этом опыте $6 \cdot 6 = 36$ элементарных событий. Все эти 36 элементарных событий удобно представить в виде таблицы.

Номер строки показывает, сколько очков выпало при первом броске, а номер столбца — сколько очков выпало при втором броске. Если выпала, например, комбинация (1, 5), это можно изобразить штриховкой или крестиком в соответствующей ячейке (рис. 61).

	1	2	3	4	5	6
1					×	
2						
3						
4						
5						
6						

Рисунок 61.
Таблица эксперимента «двукратное бросание кости»

При двух бросаниях игральной кости элементарным событием является **упорядоченная пара** чисел.

Вопросы

1 Школьник говорит: «Я написал изложение и не сделал ни одной ошибки». Что здесь является случайным опытом, а что — случайным событием?

2 В классе 25 учеников. Учитель во время урока вызывает к доске одного ученика. Сколько различных элементарных событий имеет этот случайный опыт?

3 Могут ли в результате опыта одновременно наступить два различных элементарных события?

4 Перечислите элементарные события опыта, где игральную кость бросают один раз.

5 Назовите элементарные события, которые возникают при бросании математической монеты.

6 Что является элементарным событием в опыте, где игральную кость бросают 2 раза? Сколько элементарных событий в этом опыте?

7 Почему при двукратном бросании монеты элементарное событие ОР (сначала выпал орёл, затем — решка) нельзя разделить на два более простых события: «выпал орёл» и «выпала решка»?

Задачи

231 Игральную кость бросают 2 раза. Укажите, какие из перечисленных ниже случайных событий являются невозможными, а какие — достоверными.

A «сумма выпавших очков меньше, чем 100»;

B «в сумме выпадет одно очко»;

C «в сумме выпадет 13 очков»;

D «в сумме выпадет два или больше очков».

232 Из множества натуральных чисел от 1 до 100 выбирают два различных числа. Какие из перечисленных ниже событий невозможные, а какие — достоверные?

A «одно из чисел больше другого»;

B «одно из чисел больше другого на 100»;

C «сумма выбранных чисел — положительное число»;

D «одно из двух данных чисел меньше половины другого числа».

233 Андрей и Борис решили купить мороженое и встали в очередь перед киоском «Мороженое». Сколькими способами они могут расположиться друг за другом? Выпишите все эти способы.

234 В киоске продаётся мороженое трёх сортов: сливочное, шоколадное и клубничное. Андрей и Борис покупают по одной порции. Выпишите в виде таблицы элементарные события этого опыта. Сколько всего получилось элементарных событий? Перечертите в тетрадь и продолжите заполнять таблицу 48.

Таблица 48

Андрей	Борис
Сливочное	Сливочное

235 Андрей, Борис и Владимир решили купить мороженое и встали в очередь. Сколькими способами они могут расположиться друг за другом? Выпишите все эти способы.

236 Игральную кость подбрасывают дважды. Нарисуйте в тетради таблицу элементарных событий этого эксперимента. Закрасьте в таблице элементарные события, при которых в сумме выпадет:

а) менее 4 очков; в) ровно 11 очков;

б) ровно 7 очков; г) чётное число очков.

237 При подбрасывании монеты будем обозначать буквой О выпадение орла, буквой Р — выпадение решки. Подбросим монету два раза. Элементарное событие «выпадет два орла» записывается как ОО. Выпишите все элементарные события этого опыта. Сколько их?

238 Монету бросают 3 раза. Выпишите все элементарные события этого опыта, пользуясь обозначениями О для орла и Р для решки.

239 а) Во сколько раз больше число элементарных событий при трёх бросаниях монеты, чем при двух бросаниях монеты?

б) Сколько элементарных событий при четырёх бросаниях монеты?

в) Сколько элементарных событий при десяти бросаниях монеты?

240 Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Пользуясь обозначениями О и Р, запишите несколько элементарных событий этого опыта. Сколько всего элементарных событий в этом случайном опыте?

241 Команда «Математик» проводит встречу из нескольких матчей по волейболу с командой «Физик». Ничья невозможна. Встреча проводится до двух побед одной из команд. Победу «Математика» обозначим буквой М, а победу «Физика» — буквой Ф. Одним из элементарных событий является ММ.

а) Запишите все возможные элементарные события.

б) Запишите все элементарные события, при которых встречу выигрывает команда «Физик».

в) Предположим, что во встрече победила команда «Математик». Какой буквой оканчивается запись соответствующих элементарных событий?

г) Какое наибольшее количество матчей может состояться?

242 В ящике три детали: две исправные детали a и b и одна бракованная деталь c. Из ящика наугад извлекают по одной детали, пока не обнаружат бракованную. Элементарные события этого опыта будем записывать в виде последовательности букв. Например, abc, ac и т. д.

а) Является ли последовательность cab элементарным событием в этом опыте?

б) Какими буквами может заканчиваться запись элементарного события?

в) Выпишите все элементарные события этого опыта.

243 Игральную кость подбрасывают трижды. Сколько элементарных событий в этом эксперименте?

244 Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите количество элементарных событий, при которых в сумме выпадет:

а) 3 очка; б) 4 очка; в) 2 очка.

245 Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите количество элементарных событий, при которых в сумме выпадет более:

а) 17 очков; б) 16 очков; в) 15 очков.

37 Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором три элементарных события. Обозначим их латинскими буквами a, b, c. Вероятности этих элементарных событий обозначим $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$.

Можно считать, что весь случайный опыт — это одно большое событие, которое обязательно наступит (оно достоверно), и приписать ему максимальную вероятность 1. В результате эксперимента какое-то одно из элементарных событий обязательно наступает. Причём только одно, два элементарных исхода наступить не могут. Поэтому вероятности элементарных событий следует назначать, следуя двум правилам.

1. Вероятности элементарных событий неотрицательны.
2. Сумма вероятностей всех элементарных событий равняется единице.

Для трёх элементарных событий a, b и c должно выполняться равенство

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1.$$

Это свойство вероятностей является отражением такого же свойства частот. Повторим опыт N раз. Пусть элементарное событие a произошло $N(a)$ раз, событие b произошло $N(b)$ раз, событие c произошло $N(c)$ раз. Значит, частоты событий a, b и c равны $\frac{N(a)}{N}$, $\frac{N(b)}{N}$ и $\frac{N(c)}{N}$, и их сумма равна 1.

В некоторых случаях вероятности элементарных исходов можно рассчитать. В других случаях их можно оценить с помощью частот, проведя множество наблюдений. А иногда вероятности элементарных событий назначить не удаётся никак.

Интересен случай, когда элементарные события в опыте имеют одинаковые шансы. Например, при одном бросании игральной кости элементарные события — это 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Если кость правильная (симметричная), то шансы этих шести элементарных событий одинаковы.

Если в случайном опыте шансы всех элементарных событий одинаковы, то он называется случайным опытом с **равновозможными элементарными событиями**.

При бросании двух игральных костей элементарных событий 36, и все они равновозможны. Опыты с равновозможными элементарными событиями возникают при бросании костей, раздаче игральных карт, в лотереях, жребиях, социологических исследованиях и других искусственных экспериментах.

Равновозможные исходы возникают не только в играх или опросах. Есть очень важная математическая задача — генерация случайных чисел. Мы все пользуемся мобильными телефонами, а значит — многочисленными алгоритмами шифрования и защиты данных. Во всех этих алгоритмах используются случайные числа — десятичные дроби, которые с равными шансами выбираются из интервала от 0 до 1. Программа для создания случайных чисел называется **генератором случайных чисел.**

В природе опыты с равновозможными элементарными событиями встречаются очень редко.

Предположим, что в некотором случайном опыте N элементарных событий, и вероятность каждого равна p. Сумма всех вероятностей равна 1:

$$\underbrace{p+p+p+\ldots+p+p}_{N \text{ одинаковых слагаемых}}=1.$$

Значит, $Np = 1$, откуда $p = \frac{1}{N}$.

Получается правило, позволяющее назначать вероятности элементарных событий.

Правило. Если в случайном опыте ровно N равновозможных элементарных событий, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N}$.

Хотя в природе опыты с равновозможными элементарными событиями практически не встречаются, эти опыты очень важны. Во-первых, с помощью искусственных опытов с равновозможными событиями часто удаётся находить приближённые решения сложных и важных задач. Во-вторых, эксперименты с равновозможными событиями удобны при изучении теории вероятностей. Традиционно теорию вероятностей начинают изучать именно с таких опытов. Но здесь кроется опасность: из-за злоупотребления равновозможными элементарными событиями при обучении многие люди думают, что во всех опытах события равновозможны. Вспомним распространённую шутку.

— Какова вероятность встретить на прогулке живого динозавра? — спрашивает преподаватель студента.
— Одна вторая, — отвечает студент.
— Это почему же? — удивляется преподаватель.
— Либо встречу, либо нет.

Это, конечно, шутка. Но, как и во всякой шутке, в ней есть доля правды. Известен случай, когда подобную ошибку совершил знаменитый учёный Д'Аламбер[1], когда писал статью по теории вероятностей для энциклопедии.

Ошибка Д'Аламбера

В опыте, где монету бросают 2 раза, всего четыре элементарных события: ОО, ОР, РО и РР. Эти четыре события равновозможны из-за симметричности монет, и вероятность каждого из них равна $\frac{1}{4}$.

Если вместо того чтобы бросать монету 2 раза, мы одновременно бросим две одинаковые монеты, то элементарные события ОР и РО покажутся нам одним событием: ведь монеты одинаковы. Значит, в этом опыте три элементарных события: «два орла», «две решки» и «орёл и решка». Может возникнуть ошибочное впечатление, что вероятность каждого из них равна $\frac{1}{3}$. Именно так и посчитал Д'Аламбер.

На самом деле эти элементарные события не равновозможны: вероятность события «два орла» и вероятность события «две решки» равны $\frac{1}{4}$, а вероятность события «орёл и решка» равна $\frac{1}{2}$.

Вопросы

1 Какие элементарные события называют равновозможными?
2 Приведите примеры опытов, в которых элементарные события равновозможны.
3 Сформулируйте свойство суммы вероятностей всех элементарных событий случайного опыта.
4 Могут ли вероятности элементарных событий в случайном опыте быть не равны друг другу?
5 На какой ответ мог рассчитывать преподаватель из шутки про динозавра?

Задачи

246 Равновозможны ли элементарные события «выпал орёл» и «выпала решка» при бросании правильной монеты?

[1] Жан Лерон Д'Аламбер — французский учёный, который жил в XVIII в. и занимался математикой и физикой. В 1764 г. был избран почётным членом Санкт-Петербургской академии наук, хотя ни разу не был в России.

247 Автомобиль подъезжает к перекрёстку (рис. 62). Определим возможные элементарные события:
«автомобиль повернёт направо»,
«автомобиль повернёт налево»,
«автомобиль поедет прямо»,
«автомобиль развернётся и поедет обратно».
Можно ли считать эти элементарные события равновозможными? Объясните свой ответ.


Рисунок 62

Указание. Подумайте, так ли часто автомобили разворачиваются и едут обратно. Какие события будут случаться чаще, если автомобиль подъезжает к улице с более оживлённым движением?

248 Команда высшей лиги, встречаясь в матче по футболу с командой первой лиги, может либо победить или проиграть, либо встреча закончится вничью. Равновозможны ли эти элементарные события? Обоснуйте своё мнение.

249 Случайный опыт может закончиться одним из трёх элементарных событий: a, b или c. Чему равна вероятность элементарного события c, если:

а) $\mathrm{P}(a) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(b) = 0{,}2$;

б) $\mathrm{P}(a) = \frac{1}{2}$; $\mathrm{P}(b) = \frac{1}{3}$;

в) $\mathrm{P}(a) = 0{,}1$; $\mathrm{P}(b) = 0{,}01$;

г)* $\mathrm{P}(a) = p$; $\mathrm{P}(b) = 0{,}8 - p$? Какие значения может принимать p?

250 Игральная кость несимметрична. В таблице 49 показаны вероятности выпадения на этой кости 1, 2, 3, 5 или 6 очков. Найдите вероятность выпадения 4 очков.

Таблица 49. **Вероятности выпадения граней**

Число очков	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	?	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

251 В некотором случайном эксперименте все элементарные события равновозможны. Найдите вероятность каждого элементарного события, если всего в этом эксперименте количество элементарных событий равно:

а) 25; б) 17; в) 100.

252 Все элементарные события случайного опыта равновозможны. Сколько элементарных событий в этом опыте, если вероятность каждого равна:

а) $\frac{1}{3}$; б) 0,1; в) 0,125; г) $\frac{1}{k}$?

253 В каждом из двух случайных опытов все элементарные события равновозможны. В каком из этих опытов вероятность элементарного события больше, если:

а) в первом опыте элементарных событий больше, чем во втором;

б) в первом опыте элементарных событий меньше, чем во втором;

в) в этих опытах элементарных событий поровну?

254 При подбрасывании монеты обозначим буквой О выпадение орла и буквой Р выпадение решки. Подбросим симметричную монету 2 раза. Равновозможны ли элементарные события ОО, РО, ОР и РР? Найдите их вероятности.

255 Симметричную монету подбрасывают несколько раз. Найдите вероятности элементарных событий при:

а) 3 бросаниях; б) 4 бросаниях; в)* 10 бросаниях.

256 Три богатыря — Илья Муромец, Алёша Попович и Добрыня Никитич — ехали по дороге и увидели развилку, а на ней — придорожный камень с предупреждением:

Направо поедешь — коня потеряешь,
Налево поедешь — копьё потеряешь,
Прямо поедешь — головы не снесёшь.

Богатыри бросили жребий, разделились, и каждый поехал своей дорогой. Придумайте систему обозначений для элементарных событий этого опыта, запишите все элементарные события. Считая их равновозможными, найдите вероятность каждого из них.

257 Три первоклассника по очереди выбирают воздушные шарики. Каждый из них выбирает шарик одного из двух цветов: зелёного (З) или синего (С). Выпишите элементарные события этого эксперимента. Считая, что все они равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

258 Три первоклассника по очереди выбирают фломастеры. Каждый из них выбирает фломастер одного из трёх цветов: зелёного (З), синего (С) или красного (К). Сколько у этого опыта элементарных событий? Считая, что все элементарные события равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

259 Игральную кость подбрасывают несколько раз. Равновозможны ли элементарные события такого опыта? Найдите вероятность каждого элементарного события при: а) трёх бросаниях; б) четырёх бросаниях.

38 Благоприятствующие элементарные события

До сих пор мы обсуждали только элементарные события. Однако в случайных опытах могут возникать более сложные случайные события. Например, при бросании игральной кости возможно событие «выпадет чётное число очков» или событие «выпадет более двух очков». Для обозначения случайных событий будем употреблять большие латинские буквы A, B, C, D и т. д.

Случайным событием в случайном опыте называется произвольное множество, состоящее из элементарных событий этого опыта.

Например, событие A «выпадет чётное число очков» при бросании игральной кости состоит из трёх элементарных событий: «два очка», «четыре очка», «шесть очков». Можно записать событие A как множество с перечислением его элементов:

$$A = \{2,\ 4,\ 6\}.$$

Элементарное событие a «два очка» принадлежит этому событию: $a \in A$. Но чаще говорят, что элементарное событие a благоприятствует событию A. Слова «принадлежать» и «благоприятствовать» мы будем использовать как синонимы.

Элементарные события, при которых наступает событие A, называются **благоприятствующими событию A**.

Мы знаем, что в случайном опыте наступает только одно из элементарных событий. Но если элементарное событие благоприятствует двум различным событиям A и B, то события A и B могут произойти одновременно.

ПРИМЕР 1. Андрей, Борис и Владимир (А, Б и В) встают в очередь. Все возможные события в этом опыте складываются из элементарных событий, которых в данном случае всего шесть: АБВ, АВБ, БВА, БАВ, ВАБ, ВБА.

Рассмотрим событие «Владимир стоит первым». Оно наступает, если случилось одно из двух элементарных событий ВАБ и ВБА (рис. 63).

Элементарные события ВАБ и ВБА благоприятствуют событию «Владимир стоит первым».

Рисунок 63

ПРИМЕР 2. В этом же опыте событию «Борис стоит в очереди перед Андреем» благоприятствуют элементарные события БАВ, БВА и ВБА.

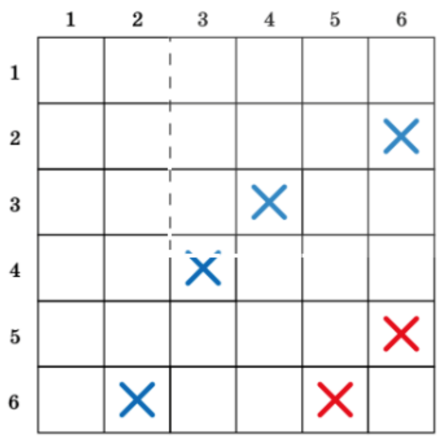


Рисунок 64

ПРИМЕР 3. Игральную кость бросают дважды.

Рассмотрим событие A «сумма очков равна 11». Этому событию благоприятствуют ровно два элементарных события: (6; 5) и (5; 6). Эти элементарные события отмечены на рисунке 64 красными крестиками.

Событие — это множество. Поэтому вместо словесного описания события можно записать событие A перечислением благоприятствующих элементарных событий в фигурных скобках: $A = \{(6; 5), (5; 6)\}$.

Событию B «произведение очков при двух бросках равно 12» благоприятствуют элементарные события (4; 3), (3; 4), (2; 6) и (6; 2). Они выделены на рисунке 64 синими крестиками. Можно записать: $B = \{(4; 3), (3; 4), (2; 6), (6; 2)\}$.

ПРИМЕР 4. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не собьёт её. Промах обозначим буквой Н (неудача), попадание — буквой У (успех). Элементарные события в таком опыте имеют вид У, НУ, ННУ и т. д. Последняя буква У, поскольку стрельба оканчивается успешным выстрелом[1]. Пользуясь этими обозначениями, можно записать разные события в этом эксперименте. Например, событию A «стрелку потребуется не больше четырёх выстрелов» благоприятствуют элементарные события: У, НУ, ННУ, НННУ.

Событию B «стрелку потребуется не меньше трёх выстрелов» благоприятствует бесконечно много элементарных событий: ННУ, НННУ, ННННУ и т. д.

Можно записать: A = {У, НУ, ННУ, НННУ} и B = {ННУ, НННУ, ННННУ, ...}.

Вопросы

1 Что означает высказывание «элементарное событие благоприятствует событию A»? Сформулируйте его иначе.

2 Всякое ли элементарное событие опыта является случайным событием?

3 Верно ли, что случайному событию может благоприятствовать только одно элементарное событие?

4 Могут ли в опыте два случайных события наступить одновременно?

5 Могут ли в опыте два элементарных события наступить одновременно?

Задачи

260 Бросают одну игральную кость. Запишите событие A перечислением элементарных событий в фигурных скобках, если событие A состоит в том, что:

а) выпадет чётное число очков;
б) выпадет меньше 5 очков;
в) выпадет больше 2 очков;
г) выпадет от 2 до 5 очков.

261 Монету бросают 2 раза. Опишите словами следующие события:

а) A = {ОО, ОР}; б) B = {ОР, РО}; в) C = {РР, РО, ОР}; г) D = {ОО, РР}.

262 Шахматисты Андреев и Борисов играют между собой. Игра может окончиться победой одного из них или вничью. Известно, что Андреев не проиграл Борисову. Какие элементарные события благоприятствуют этому событию?

263 Нарисуйте в тетради таблицу элементарных событий опыта, где игральную кость бросают дважды. Закрасьте в таблице элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «выпадут одинаковые числа»;
б) «при каждом броске выпадет число очков, кратное трём»;
в) «сумма очков при первом и втором бросках равна 5»;
г) «произведение выпавших очков равно 10».

264 Пользуясь таблицей элементарных событий опыта с двумя бросками игральной кости, укажите элементарные события, которые благоприятствуют событию:

а) «сумма очков равна 7»;
б) «при втором броске выпадет больше очков, чем при первом»;
в) «сумма очков не меньше 6».

265 Биатлонист делает по одному выстрелу в каждую из пяти мишеней. Что является элементарным событием в этом опыте? Сколько элементарных событий благоприятствует событию: а) «биатлонист попадёт ровно в четыре мишени»; б) «биатлонист попадёт ровно в одну мишень»?

---

[1] В этом опыте можно рассматривать ещё одно элементарное событие ННН..., состоящее из бесконечного числа промахов. Но это событие мы не будем брать в расчёт, а позже докажем, что его вероятность равна нулю.

266 Симметричную монету бросают дважды. Выпадение орла при каждом бросании обозначим через О, а выпадение решки — через Р. Запишите перечислением в фигурных скобках событие:

а) «выпадет один орёл и одна решка»;

б) «во второй раз выпадет решка»;

в) «решка выпадет хотя бы один раз»;

г) «в первый раз выпадет орёл».

267 Симметричную монету бросают 3 раза. Пользуясь обозначениями О и Р, выпишите элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «выпадет ровно один орёл»;

б) «выпадет ровно одна решка»;

в) «при втором бросании выпадет решка»;

г) «при третьем бросании выпадет орёл».

268 Константин, Леонид и Михаил купили по одной порции мороженого. Всего было куплено мороженое трёх сортов: абрикосовое, брусничное и вишнёвое. Введите подходящую систему обозначений для элементарных событий такого эксперимента. Запишите все элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «Константин купил абрикосовое мороженое»;

б) «Леонид не купил брусничное мороженое»;

в) «Михаил купил либо абрикосовое, либо вишнёвое мороженое»;

г) «У Леонида ни брусничное, ни вишнёвое мороженое».

269 Стрелок в тире стреляет по мишени, пока не собьёт её. Опишите словами следующие события:

а) A = {НУ, ННУ, НННУ};

б) B = {У, НУ, ННУ, НННУ, ННННУ};

в) C = {ННУ, НННУ, ННННУ, ...} (многоточие означает, что последовательность продолжается до бесконечности);

г) D = {У, ННУ, ННННУ, ННННННУ, ...}.

270 В классе 25 учеников, среди которых учится Петя. Учитель в течение урока по очереди вызывает к доске двух человек. Сколько элементарных событий благоприятствует событию «Петю вызовут к доске»?

39 Вероятности событий

Вероятности событий мы будем обозначать буквой Р латинского алфавита по начальной букве латинского слова *probabilitas*, что означает «вероятность». Например, вероятность события A обозначим $\mathrm{P}(A)$, вероятность события B — $\mathrm{P}(B)$ и т. п.

Правило вычисления вероятностей. Вероятность события равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

Запишем это правило формулой. Пусть событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c, d: $A = \{a, b, c, d\}$. Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей этих элементарных событий:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(a) + \mathrm{P}(b) + \mathrm{P}(c) + \mathrm{P}(d).$$

Число элементарных событий, благоприятствующих данному событию, и, следовательно, число слагаемых в правой части равенства может быть каким угодно и даже бесконечным.

Вероятности всех элементарных событий неотрицательны и в сумме равны 1. Поэтому вероятность события A также неотрицательна и не превосходит 1:

$$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1.$$

В частности, вероятность невозможного события равна нулю, а вероятность достоверного — единице. Событие, которому благоприятствуют все элементарные события случайного эксперимента, является достоверным.

ПРИМЕР 1. Автомобиль подъезжает к перекрёстку (см. рис. 62 на с. 142). Предположим, что вероятность элементарного события «автомобиль повернёт направо» равна 0,5, вероятность элементарного события «автомобиль повернёт налево» равна 0,3, вероятность элементарного события «автомобиль поедет прямо» равна 0,18. Найдём вероятность события A «автомобиль не развернётся». Этому событию благоприятствуют три перечисленных элементарных события. Следовательно, $\mathrm{P}(A) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}98$.

ПРИМЕР 2. В таблице 50 сгруппированы результаты измерений роста взрослых мужчин в большой выборке. Шаг группировки — 5 см.

Возьмём одного мужчину из этой выборки и посмотрим, какому из интервалов принадлежит его рост. Это случайный опыт, в котором 12 элементарных исходов, но они не равновозможны. В качестве вероятности каждого элементарного события разумно взять частоту соответствующего интервала.

Таблица 50

Рост, см	145—149	150—154	155—159	160—164	165—169	170—174
Частота	0,002	0,011	0,030	0,068	0,155	0,189
Рост, см	175—179	180—184	185—189	190—194	195—199	200 и более
Частота	0,211	0,163	0,097	0,047	0,018	0,006

Теперь можно находить вероятности разных событий. Например, вероятность события A «рост окажется меньше, чем 160 см», равна сумме вероятностей элементарных исходов «145—149», «150—154» и «155—159»:

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}002 + 0{,}011 + 0{,}030 = 0{,}043.$$

Элементарные исходы, принадлежащие событию A, выделены в таблице 50 голубым цветом. Вероятность события A мала.

Вероятность события B «рост от 165 до 184 см» (выделены розовым цветом) равна

$$\mathrm{P}(B) = 0{,}155 + 0{,}189 + 0{,}211 + 0{,}163 = 0{,}718.$$

Событие B весьма вероятное: примерно 71,8% мужчин в данной выборке имеют рост от 165 до 184 см.

Вопросы

1 Сформулируйте правило вычисления вероятностей.

2 Бросают одну игральную кость. Событие A заключается в том, что выпадет целое (не дробное) число очков. Является ли событие A достоверным? Чему равна вероятность события A?

3 Приведите пример достоверного события в случайном эксперименте с бросанием двух игральных костей.

Задачи

271 В случайном опыте четыре элементарных события a, b, c и d, вероятности которых соответственно равны 0,1, 0,3, 0,4 и 0,2. Найдите вероятность события, которому благоприятствуют элементарные события:

а) a и c;
б) a, b и d;
в) b, d и c;
г) a и d.

272 В шахматной партии Андрей играет с Борисом. Вероятность выигрыша Андрея равна 0,3, вероятность ничьей равна 0,2, вероятность того, что партия не будет закончена, равна 0,1. Найдите вероятность того, что:

а) Андрей не проиграет;

б) Борис не проиграет;

в) никто не выиграет.

273 На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с вишней. Петя наугад берёт один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с вишней.

274 В таксомоторной компании в данный момент свободно 25 машин: 3 чёрных, 12 жёлтых и 10 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет зелёное такси.

275 У бабушки десять чашек: шесть с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

276 Родительский комитет закупил 25 пазлов для подарков детям на Новый год. Пазлы с разными рисунками: 12 с автомобилями и 13 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом между 25 детьми, среди которых есть Коля. Найдите вероятность того, что Коле достанется пазл с автомобилем.

277 В лыжных гонках участвуют 13 спортсменов из России, 2 спортсмена из Норвегии и 5 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России.

278 В магазине канцтоваров в продаже 100 ручек: 23 красных, 12 зелёных, 17 фиолетовых, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или чёрной.

279 В девятом классе учатся 11 мальчиков и 9 девочек. По жребию они выбирают одного дежурного по классу. Какова вероятность того, что это будет мальчик?

280 Симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность события:

а) «решка выпадет хотя бы один раз»;

б) «в первый раз выпадет орёл».

281 Игральную кость бросают дважды. С помощью таблицы этого эксперимента (см. с. 137, рис. 61) найдите количество благоприятствующих элементарных событий и вероятность события:

а) «сумма выпавших очков равна 6»;

б) «сумма выпавших очков больше чем 5»;

в) «при первом броске выпадет больше очков, чем при втором»;

г) «количество очков, выпавших в первый раз, и количество очков, выпавших во второй раз, различаются на 4».

282 Стрелок один раз стреляет в круглую мишень (рис. 65). Вероятности попадания в зоны мишени показаны в таблице 51. Число очков, которое получает стрелок, равно номеру зоны.

Таблица 51. **Вероятности попадания в зоны мишени**

Зона	1	2	3	4	5
Вероятность	0,001	0,002	0,004	0,006	0,021
Зона	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Вероятность	0,065	0,138	0,243	0,334	0,186

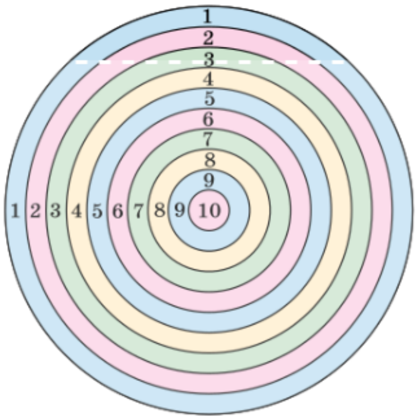


Рисунок 65

Найдите вероятность события:

а) «стрелок получит меньше 5 очков»;

б) «стрелок получит больше 7 очков»;

в) «стрелок попадёт в жёлтую зону»;

г) «стрелок не попадёт в голубую зону».

283 В некотором опыте возможно три элементарных события: a, b и c. Вероятность того, что наступит либо событие b, либо событие c, равна 0,83. Найдите вероятность элементарного события a.

284 В некотором опыте возможно три элементарных события: a, b и c. Вероятность того, что наступит либо событие a, либо событие b, равна 0,4; вероятность того, что наступит либо событие a, либо событие c, равна 0,7. Найдите вероятность каждого из элементарных событий.

40 Опыты с равновозможными элементарными событиями

Напомним, что если в случайном опыте N элементарных событий и все они равновозможны, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N}$ (см. п. 37).

Это обстоятельство позволяет легко находить вероятности всевозможных событий в таком опыте.

ПРИМЕР 1. Игральную кость бросают 2 раза. Найдём вероятность события A «сумма очков меньше 6». Для этого воспользуемся таблицей элементарных событий этого эксперимента (рис. 66) и выделим красными крестиками элементарные события, благоприятствующие событию A.

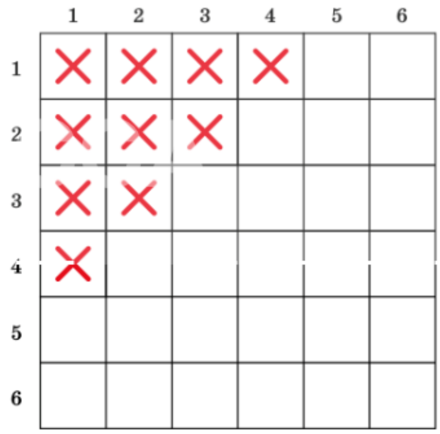


Рисунок 66

Обозначим через $N(A)$ число элементарных событий, благоприятствующих событию A. Таких элементарных событий десять: $N(A) = 10$. Общее число элементарных событий $N = 36$, а вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N} = \frac{1}{36}$.

Поэтому вероятность события A равна

$$\mathrm{P}(A) = \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}}_{N(A)\text{ слагаемых}} = \frac{N(A)}{N} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

На этом примере мы получили общую формулу и соответствующее правило.

Правило. Если в случайном опыте конечное число элементарных событий и все они равновозможны, то вероятность события A равна отношению числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу элементарных событий:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

ПРИМЕР 2. Дважды бросают симметричную монету. Найдём вероятность того, что оба раза выпадет одна и та же сторона.

Выпишем все элементарные события опыта:

ОО, ОР, РО и РР.

Всего элементарных событий четыре: $N = 4$. Так как монета симметричная, элементарные события равновозможны. Из них ровно два события, ОО и РР, благоприятствуют событию B «оба раза выпадет одна сторона»: $N(B) = 2$. Запишем кратко решение задачи: $N = 4$, $N(B) = 2$, следовательно,

$$\mathrm{P}(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Вопросы

1 Сформулируйте правило вычисления вероятности случайного события в опыте с равновозможными элементарными событиями.

2 Запишите это правило формулой.

Задачи

285 Бросают одну игральную кость. Найдите вероятность события:

а) «выпадет чётное число очков»;

б) «выпадет число очков, кратное 3»;

в) «выпадет больше 3 очков»;

г) «выпадет число очков, кратное 7».

286 Бросают одну игральную кость. Вычислите вероятность события:

а) «выпавшее число очков является делителем числа 12»;

б) «выпавшее число очков кратно 5»;

в) «выпадет больше 2 очков»;

г) «выпадет больше 1, но меньше 6 очков».

287 Бросают симметричную монету 2 раза. Равны ли вероятности событий A «два раза выпадет орёл» и B «один раз выпадет орёл, а другой раз — решка»? Найдите вероятности этих событий.

288 Бросают две игральные кости: жёлтую и зелёную. Вычислите вероятность события:

а) «сумма очков на обеих костях равна 7»;

б) «сумма очков на обеих костях равна 11»;

в) «на жёлтой кости выпало больше очков, чем на зелёной»;

г) «числа очков на костях различаются не больше чем на 2».

289 В магазине в коробке 24 одинаковые авторучки. Из них 13 авторучек красные, 5 — зелёные, остальные — синие. Продавец наудачу достаёт одну авторучку. Найдите вероятность того, что извлечённая ручка:

а) красная;

б) не зелёная;

в) либо синяя, либо зелёная;

г) либо красная, либо синяя.

290 В ящике 20 синих и 16 красных карандашей. Продавец не глядя вынимает один карандаш. Найдите вероятность того, что этот карандаш окажется:

а) синим; б) красным.

291 Миша покупает альбом (А), блокнот (Б) и тетрадь (Т). Продавец достаёт эти товары в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что:

а) сначала продавец достанет блокнот;

б) продавец достанет альбом в последнюю очередь;

в) продавец сначала достанет тетрадь, а в последнюю очередь — блокнот;

г) альбом будет извлечён раньше, чем тетрадь.

292 На соревнования приехали гимнастки из трёх стран. Из России 7 гимнасток, из Германии — 8, из Чехии — 5. Порядок выступлений гимнасток определяется жребием. Найдите вероятность того, что:

а) первой будет выступать гимнастка из России;

б) третьим по счёту будет выступление какой-нибудь гимнастки из Германии;

в) второй по счёту будет выступать гимнастка из России или Чехии;

г) последней будет выступать спортсменка, приехавшая не из Чехии.

293 На день рождения к Паше пришли две Маши и два Саши. Все пятеро расселись за круглым столом. Найдите вероятность того, что Паша сидит между двумя тёзками.

294 Шахматный слон может за один ход перейти на любое число полей, двигаясь только по диагонали (рис. 67). Шахматный слон случайным образом поставлен на доску. Найдите вероятность того, что он может за один ход перейти на поле:

а) h1; в) c4; д) d5;

б) a5; г) d7; е) g3.

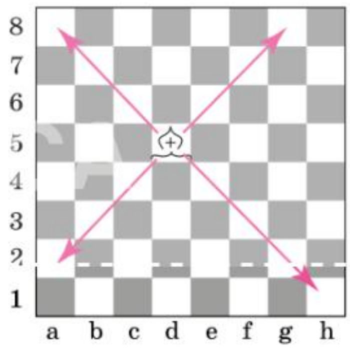


Рисунок 67

295 Одно время на улицах и вокзалах профессиональные игроки предлагали прохожим испытать удачу в простой игре. Зажав в кулаке обычный носовой платок так, что наружу высовывались только четыре уголка, игрок предлагал прохожему взять два любых конца и потянуть за них. Если прохожий вытаскивал два соседних уголка, то он проигрывал. Если прохожий вытаскивал два противоположных уголка, то он выигрывал. Найдите вероятность выигрыша прохожего.

296 По правилам игры «Морской бой» на поле 10×10 клеток размещаются четыре однопалубных корабля (по одной клетке), три двухпалубных, два трёхпалубных и один четырёхпалубный (рис. 68). Игрок делает первый случайный выстрел. Найдите вероятность того, что он:

а) попадёт в однопалубный корабль противника;

б) попадёт в трёхпалубный корабль;

в) попадёт в какой-нибудь из кораблей противника;

г) не попадёт ни в какой корабль.

297 При игре в «Морской бой» после первого вашего выстрела противник сообщил, что вы подбили какой-то корабль (но не потопили его). Какова вероятность того, что вы попали:

а) в четырёхпалубный корабль;

б) в трёхпалубный корабль;

в) в двухпалубный корабль?

298 На рисунке 69 показано положение в игре «Морской бой». Красным цветом показаны потопленные корабли противника. У противника остался только один двухпалубный корабль, положение которого неизвестно. Клетки, в которых нарисованы точки, — это клетки, по которым мы уже стреляли. В них не может быть корабля. Считая равновозможными любые допустимые положения последнего корабля, найдите вероятность того, что мы попадём в него, выстрелив в поле:

а) к4; б) з1; в) к1; г) е7; д) е8.

В какое поле нужно выстрелить, чтобы вероятность подбить последний корабль была наибольшей?

299 У Андрея в правом кармане брюк шесть монет — две из них по 10 р., а четыре монеты по 2 р. На ощупь монеты неразличимы. Андрей достаёт из правого кармана три случайно выбранные монеты и перекладывает их в левый карман. Найдите вероятность того, что обе 10-рублёвые монеты окажутся:

а) в одном кармане;

б) в левом кармане.

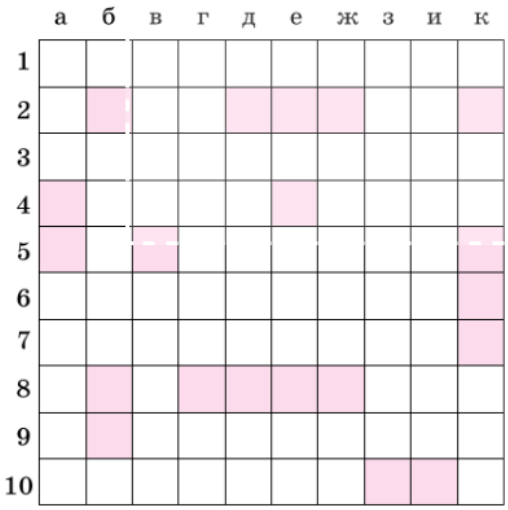


Рисунок 68

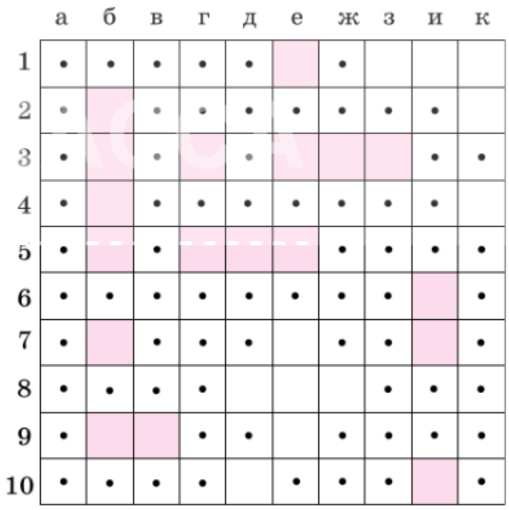


Рисунок 69

300 В городе N пять улиц. При этом две из них идут параллельно друг другу с севера на юг, а остальные проходят параллельно друг другу с запада на восток. Любые две улицы разных направлений пересекаются. Утром двое постовых случайным образом встали на два разных перекрёстка. Найдите вероятность того, что они стоят на одной улице.

41 Случайный выбор

В задачах предыдущего параграфа мы имели дело со случайным выбором одного случайного предмета из нескольких (ручки из коробки, поля на шахматной доске и т. п.). Это **выбор наудачу** или **случайный выбор**, то есть выбор без каких-либо предпочтений. Случайный выбор входит как часть во многие игры: наудачу выбирают номер при игре в лото; наудачу выбирают карты во многих карточных играх; в лотереях наудачу выбирают номера выигрышных билетов и т. д.

В **социологических исследованиях** случайный выбор используется для формирования группы опрашиваемых людей. При контроле качества продукции также используется выбор наудачу, чтобы сократить расходы на контроль. Случайный выбор очень важен при испытаниях новых лекарств и выяснении, насколько они эффективны и какие побочные эффекты могут дать.

Случайный выбор — это разновидность случайного опыта с равновозможными элементарными событиями. Элементарным событием в таком опыте является извлечение одного или нескольких предметов из изучаемой группы. Такая изучаемая группа, из которой выбираются предметы, элементы или люди для опроса или испытаний, называется **совокупностью** или **генеральной совокупностью**.

После выбора одного предмета случайный выбор можно продолжить: из всей совокупности или только из оставшихся предметов выбрать ещё один, затем ещё один и т. д. Собранное таким способом множество называют **случайной выборкой** из совокупности. Численность выборки обычно назначают заранее.

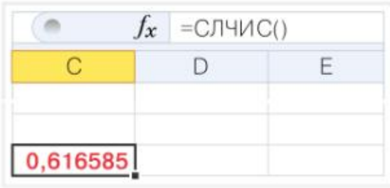
Случайную выборку можно получить иначе: сразу выбрать из общей совокупности нужное число предметов. Два карандаша из пяти можно выбирать один за другим, а можно взять два случайных карандаша сразу. Примечательно, что в обоих случаях вероятность выбора каких-нибудь двух определённых карандашей одна и та же.

Организовать по-настоящему случайный выбор непросто. Для этого требуются специальные методы: нужно бросать жребий, использовать таблицы случайных чисел и т. д. При разработке шифровальных алгоритмов ещё не так давно использовали телефонные книги абонентов большого города или страны: последние несколько цифр в телефонных номерах абонентов можно считать случайными. В других случаях использовался случайный шум разрядов атмосферного электричества — это помехи, которые мы слышим в радиоприёмнике. В настоящее время чаще всего для создания случайных последовательностей используются генераторы случайных чисел.

Если выбор поручить человеку, то выбор не окажется случайным. Многочисленные опыты показали, что равномерного распределения шансов при этом не получается. Например, если учитель пытается по своему разумению осуществить случайный выбор ученика из списка класса, то чаще всего шансы учеников, стоящих первыми и последними в этом списке, будут ниже, чем у остальных.

В электронных таблицах для получения случайного числа на интервале от 0 до 1 используется функция

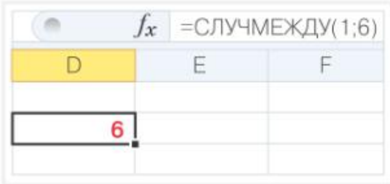
СЛЧИС()



Есть другая функция для случайного выбора:

СЛУЧМЕЖДУ()

Эта функция выбирает целое случайное число на указанном отрезке натурального ряда. На рисунке показано, как в электронной таблице можно имитировать бросание игральной кости.



Вопросы

1 Приведите примеры исследований, которые проводят с помощью случайных выборок.

2 Бросают правильную игральную кость. Можно ли считать такой способ случайным выбором одной из её граней?

3 Бросают правильную монету. Можно ли считать такой способ случайным выбором одной из её сторон?

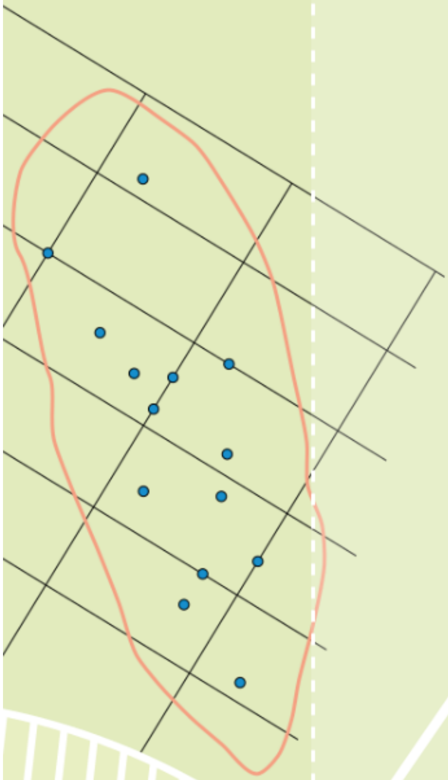
4 Является ли выбор самого высокого ученика в классе случайным?

5 Зачем для формирования выборки нужны специальные методы?

IX Рассеивание данных

Занимаясь описательной статистикой, мы говорили о среднем значении, медиане, наибольшем и наименьшем значениях. Эти характеристики описывают положение массива данных на числовой прямой. Для более полного описания данных нужно уметь измерять рассеивание данных относительно своего среднего.

Чаще всего для описания и измерения рассеивания используются дисперсия и стандартное отклонение. Для графического изображения рассеивания применяются специальные диаграммы, их так и называют — диаграммы рассеивания.



В отличие от среднего или медианы, которые показывают, где именно расположены данные, как они велики или малы, меры **рассеивания** показывают, насколько далеко значения массива отклоняются от его центра.

Мы уже обсуждали размах: разность между наибольшим и наименьшим значениями. Размах легко найти, но у него есть серьёзный недостаток: он опирается только на наименьшее и наибольшее значения, которые могут быть нетипичными или даже ошибочными. Для того чтобы лучше описать рассеивание данных, обычно используются другие меры — **дисперсия** и **стандартное отклонение**.

42 Рассеивание числовых данных и отклонения

На рисунке 70 схематично показаны два числовых набора. У них примерно одинаковое среднее значение. Однако сгруппированы значения по-разному. У первого набора значения «тяготеют» к краям промежутка значений. Только две точки находятся где-то посередине.

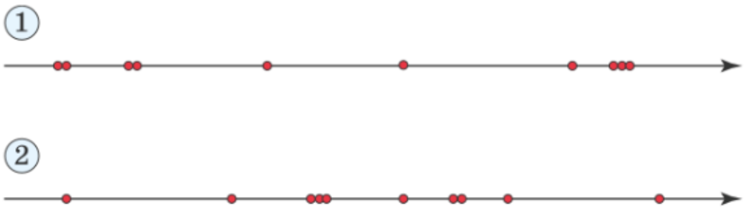


Рисунок 70. **Два числовых набора на координатной прямой**

Напротив, во втором наборе почти все точки группируются вблизи середины промежутка и только две расположены по краям. Эти два набора отличаются рассеиванием. Если данные сильно рассеяны, то многие значения удалены от среднего. Напротив, при малом рассеивании большинство значений расположено близко друг к другу и к среднему. В этом случае изменчивость небольшая. Рассеивание — это свойство числовых массивов, и оно нуждается в математическом описании.

ПРИМЕР 1. Сергей и Иван живут в одном доме и учатся в одной школе. Занятия в школе начинаются в 8:30 утра. Каждое утро Сергей выходит из дома ровно в 7:55 и идёт в школу пешком. Иван каждое утро выходит ровно в 8:00 и идёт к остановке автобуса. На автобусе до школы всего одна остановка. В таблице 52 показано время, когда Иван и Сергей входили в школу. Выборка сделана в разные случайные дни.

Сергей тратит на дорогу до школы всегда примерно одно и то же время — около 20 мин. Если посчитать по имеющимся данным, сколько времени в среднем на до-

Таблица 52. **Время прихода в школу**

Сергей	8:15	8:14	8:14	8:15	8:16	8:15	8:25	8:15	8:14	8:16
Иван	8:11	8:19	8:27	8:12	8:35	8:17	8:22	8:13	8:18	8:23