В получившемся графе все четыре вершины имеют нечётную степень: вершины А, В и Г имеют степень 3, а вершина Б — степень 5. Значит, обойти такой граф эйлеровым путём невозможно.

Вопросы

1 Что такое эйлеров путь и какие графы называют эйлеровыми?

2 Может ли эйлеров граф быть несвязным?

3 Может ли в эйлеровом графе не быть вершин нечётной степени? Может ли быть только одна вершина нечётной степени; две вершины нечётной степени; три или больше?

Задачи

142 Какими цифрами на рисунке 36 обозначены эйлеровы графы?

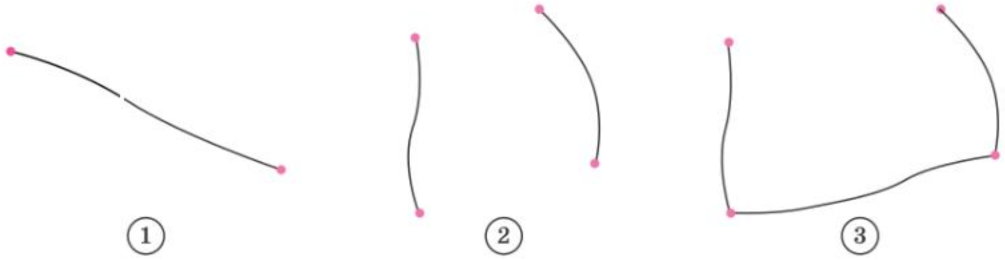


Рисунок 36

143 Какими цифрами на рисунке 37 обозначены эйлеровы графы?

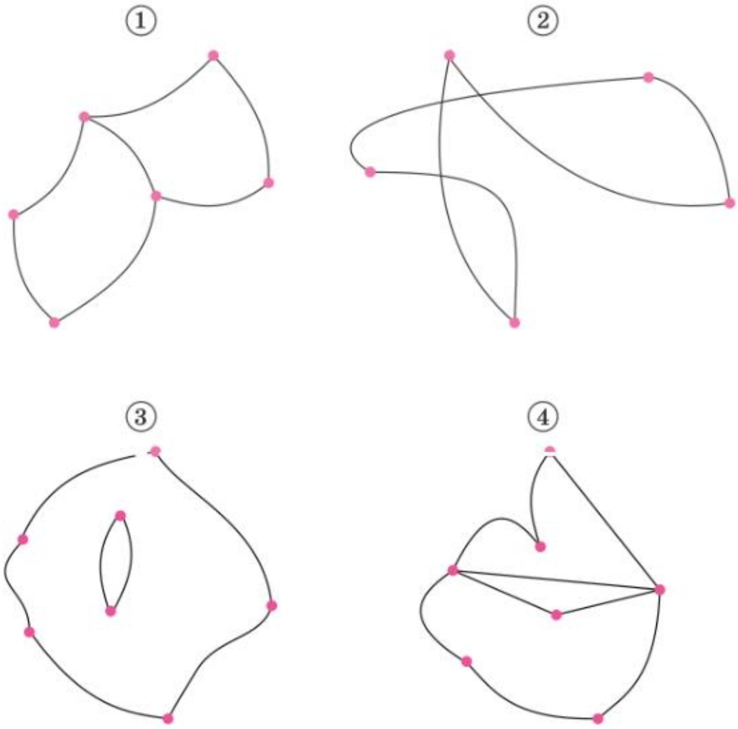


Рисунок 37

144 Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды, нарисуйте фигуры, изображённые на рисунке 38.

а) Открытый конверт б) Квадраты Льюиса Кэрролла

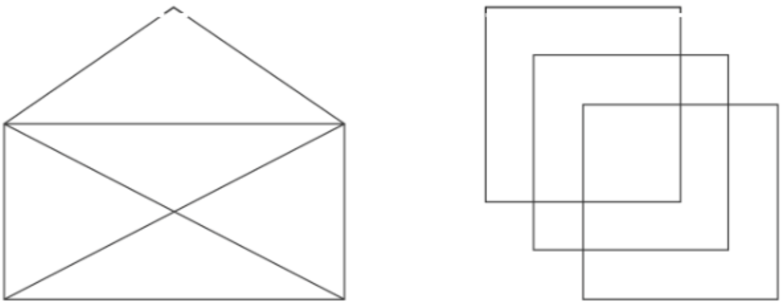


Рисунок 38

145 Придумайте способ обвести фигуру, изображённую на рисунке 39, одним росчерком (не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды).

а) б)

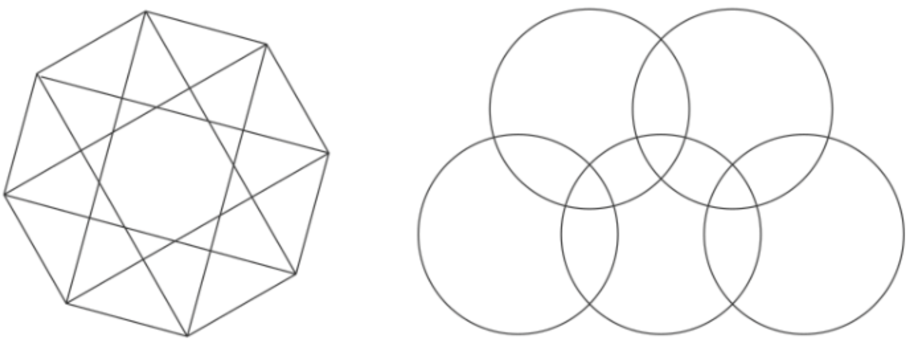


Рисунок 39

146 Пять участков отделены друг от друга заборами (см. план на рис. 40). Можно ли побывать на каждом участке, но при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

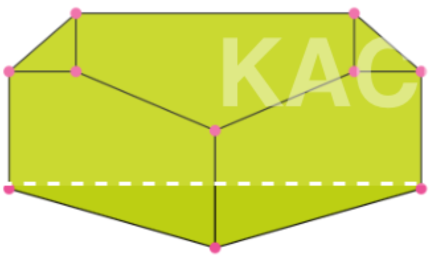


Рисунок 40. **Участки и заборы**

147 В Изумрудном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются.

а) Начертите возможный план Изумрудного города.

б) Можно ли устроить экскурсию по всем улицам и площадям Изумрудного города, не проходя ни по одной улице дважды?

V Логические утверждения и высказывания

Мы всё время имеем дело с утверждениями. Про некоторые можно сказать, что они истинные, про другие — что они ложные. Встречаются утверждения, в которых мы сомневаемся или воспринимаем их как шутку. Любое рассуждение, которое проводит человек, является последовательностью или комбинацией утверждений, которые следуют друг из друга или из других утверждений. Разобраться в том, как должно быть устроено верное рассуждение, например доказательство теоремы, помогает логика. Логика — раздел математики, изучающий утверждения и то, как они связаны между собой.

22 Утверждения и высказывания

С детских лет мы учимся отличать правду от лжи. Мы хотим иметь разумные представления об окружающем мире, а для этого надо пользоваться правдивой информацией. Однако иногда одного здравого смысла может не хватить для того, чтобы понять или объяснить, почему то или иное утверждение истинно или ложно. Нужны правила рассуждений, которые позволяют из верных утверждений получать другие верные утверждения.

Всегда ли мы можем сказать, истинно утверждение или нет?

ПРИМЕР 1. О каких из этих утверждений можно сказать, истинны они или нет?

а) «$5 \cdot 5 = 25$».

б) «Через точку на плоскости можно провести прямую, перпендикулярную другой прямой».

в) «Существует такое число b, что $b + 1 = b - 1$».

г) «Мы — молодцы!»

д) «28 мая 2017 года состоялся первый полёт российского самолёта МС-21».

е) «Утверждение, которое вы сейчас читаете, ложно».

Первые два утверждения истинны, а третье — ложно, и это не вызывает сомнений. Трудно что-то сказать про утверждение г). Если уточнить, кто такие «мы» и кого следует считать молодцами, то можно будет решить, истинно это утверждение или нет.

Утверждение д) легко проверить. Оно истинно. Утверждение е) внутренне противоречиво. Оно не может быть ни истинным, ни ложным: если оно истинно, то оно ложно. А если мы предположим, что оно ложно, то должны признать, что оно ложным не является.

Особую важную роль в математике играют утверждения, о которых можно определённо судить, истинны они или ложны. Такие утверждения называют **высказываниями**.

Высказывание — это утверждение, которое либо истинно, либо ложно.

ПРИМЕР 2. Какие из следующих утверждений являются истинными высказываниями, а какие — ложными?

а) «У **всех** кошек чёрная шерсть».

б) «**Любая** река впадает в море».

в) «**Существуют** медведи, живущие за Полярным кругом».

г) «**Некоторые** птицы живут в городе».

д) «**Ни одна** птица не живёт в городе».

Все эти утверждения содержат вспомогательные слова **«любой»**, **«все»**, **«некоторые»**, **«существует»**, **«ни одно»**, которые влияют на смысл сказанного.

Слова **«любой»**, **«все»**, **«каждый»** и т. п. подразумевают, что нет исключений. Существует ли река, впадающая не в море? Да. Например, Ангара, которая впадает не в море, а в реку Енисей. С помощью примера мы показали, что утверждение б) «**Любая** река впадает в море» ложно. Такие опровергающие примеры называют **контрпримерами**.

Контрпример — пример, противоречащий утверждению.

Контрпримером к утверждению а) «**У всех** кошек чёрная шерсть» служит кошка любого другого цвета, например рыжая (рис. 41).

Чтобы опровергнуть утверждение, содержащее вспомогательные слова **«ни один»**, **«никакой»** или **«не существует»**, тоже достаточно контрпримера. Утверждение д) «**Ни одна** птица не живёт в городе» является ложным высказыванием. Чтобы это показать, достаточно вспомнить, что на улицах городов есть голуби и воробьи.

Рисунок 41. **Контрпример к утверждению «У всех кошек чёрная шерсть»**

Если утверждение содержит слова **«существует»**, **«какой-то»**, **«некоторые»**, **«хотя бы один»**, **«найдётся»** и т. п., то показать истинность этого утверждения можно с помощью примера. Например, утверждение в) «**Существуют** медведи, живущие за Полярным кругом» истинно, потому что белые медведи действительно живут за Полярным кругом. Утверждение г) «**Некоторые** птицы живут в городе» тоже истинно.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим неравенство $25 + x < 38$.

Истинны или ложны утверждения?

а) «**Любое** значение x удовлетворяет этому неравенству».

б) «**Ни одно** значение x не удовлетворяет этому неравенству».

в) «**Существует** число, которое является решением этого неравенства».

г) «**Некоторые** числа являются решением этого неравенства».

Утверждения а) и б) ложны. Достаточно привести контрпримеры. Для утверждения а) контрпримером является, например, значение $x = 13$. В качестве контрпримера к утверждению б) можно взять значение $x = 0$.

Утверждения в) и г) истинны. Чтобы это обосновать, достаточно привести примеры решений неравенства. Обратите внимание: в утверждении г) спрашивается про некоторые числа. Говоря слово «некоторые», мы имеем в виду, что достаточно одного.

Вопросы

1 Что такое высказывание? Всякое ли утверждение является высказыванием?

2 Верно ли, что:

а) чтобы опровергнуть утверждение, достаточно привести контрпример, показывающий, что утверждение может быть ложным;

б) чтобы доказать утверждение, достаточно привести пример, когда оно истинно?

Задачи

148 Известно, что $x < 14$. Дано высказывание «Число x больше числа 9».

а) Можно ли утверждать, что это высказывание истинно? Если нет, приведите пример числа x, при котором высказывание ложно.

б) Может ли это высказывание быть истинным? Если да, приведите пример числа x, при котором это высказывание истинно.

149 Дано высказывание «Число x меньше числа 7».

а) Может ли данное высказывание быть истинным при $x > 6$? Если да, приведите пример числа x.

б) Может ли данное высказывание быть истинным, если $x \geqslant 7$? Если да, приведите пример.

150 Выпишите все целые значения n, при которых истинно высказывание:

а) «Число n не меньше 7, но меньше 10»;

б) «Число n положительно, но не больше, чем 3,9».

151 Выпишите все целые значения m, при которых ложно высказывание:

а) «Число m меньше, чем 8, или больше, чем 11»;

б) «Модуль числа m не меньше, чем 2».

152 Приведите пример, показывающий, что следующее высказывание ложно:

а) «В любом равнобедренном треугольнике любая высота является биссектрисой треугольника»;

б) «Два угла, сумма которых равна 180°, являются смежными».

153 Приведите контрпример (пример, показывающий, что высказывание не является истинным) к высказыванию:

а) «Если медиана треугольника не является его высотой, то такой треугольник не является равнобедренным»;

б) «Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны».

154 В пенале 5 синих карандашей и 4 жёлтых. Какие из следующих высказываний истинны:

а) «Среди любых 5 карандашей из пенала обязательно будет синий»;

б) «Любые 3 карандаша из этого пенала одного цвета»;

в) «Среди любых 6 карандашей из пенала обязательно будет 2 жёлтых»?

155 В пенале 6 синих карандашей и 3 жёлтых. Какие из следующих высказываний истинны:

а) «Среди любых четырёх карандашей из пенала обязательно будет синий»;

б) «7 карандашей, выбранных из пенала, могут оказаться одного цвета»;

в) «Любые 3 карандаша из пенала одного цвета»;

г) «Среди любых восьми карандашей из пенала обязательно 2 жёлтых»?

156 Известно, что натуральное число x делится на 12. Какие из утверждений являются истинными высказываниями:

а) «x делится на 6»;

б) «Последняя цифра числа x чётная»;

в) «144 делится на x»;

г) «x делится на 9»?

157 Площадь прямоугольника равна 36. Известно, что длины его сторон — натуральные числа. Про какие из следующих утверждений можно сказать, что они являются истинными высказываниями?

а) «Длина хотя бы одной из сторон — чётное число».

б) «Этот прямоугольник является квадратом».

в) «Периметр этого прямоугольника больше, чем 72».

г) «Периметр этого прямоугольника меньше, чем 75».

23 Отрицание

Одно из умений, которыми нужно овладеть, — это умение строить отрицание к утверждению. Для простоты мы можем обозначать утверждения буквами.

Отрицание утверждения A — это такое утверждение B, что если A истинно, то B ложно, и наоборот, если A ложно, то B истинно.

Про отрицание утверждения A можно кратко сказать «**не** A» или «**неверно, что** A». Из двух утверждений A и «**не** A» одно и только одно может быть истинно. Если утверждение A истинно, то утверждение «**не** A» ложно, и наоборот.

Если в результате рассуждений получается, что одновременно верны и какое-то утверждение, и его отрицание, то в рассуждениях имеется логическая ошибка или сделано ошибочное предположение.

ПРИМЕР 1. Будет ли утверждение «Это яблоко красное» отрицанием к утверждению «Это яблоко зелёное»? Нет, ведь яблоко может быть жёлтым или полосатым, и тогда оба утверждения будут ложны. Правильное отрицание к утверждению «Это яблоко зелёное» — утверждение «Это яблоко **не** зелёное» или «**Неверно**, что это яблоко зелёное».

Очень интересно строятся отрицания к утверждениям со вспомогательными словами. Слово «**любой**» нужно заменить словом «**существует**», и наоборот[1].

ПРИМЕР 2. Утверждение «У любого треугольника сумма внутренних углов равна 180°» является истинным высказыванием. Отрицанием будет высказывание «Существует треугольник, у которого сумма внутренних углов не равна 180°». Как мы понимаем, это утверждение ложно, поскольку такого треугольника не существует.

ПРИМЕР 3. Построим отрицание к утверждению:

«Для **любого** натурального числа $n \geqslant 2$ **существует** простое число, которое заключено между числами n и $2n$».

Сначала это утверждение было сформулировано в виде предположения (гипотезы), но в 1852 г. П. Л. Чебышёв[2] доказал его, и теперь мы знаем, что это истинное высказывание. Отрицание будет звучать следующим образом:

«**Существует** натуральное число $n \geqslant 2$ такое, что **любое** число, заключённое между числами n и $2n$, **не** является простым».

Это утверждение является ложным высказыванием.

При построении отрицания к утверждению вспомогательное слово «**любой**» нужно заменить словом «**существует**» и, наоборот, слово «**существует**» нужно заменить словом «**любой**».

[1] Разумеется, при этом нужно согласовать слова по правилам грамматики, используя подходящий падеж, род и число. Может быть, придётся добавить предлог. Например, «для любого», «существуют» и т. д.

[2] Пафнутий Львович Чебышёв — великий русский математик XIX в.

Вопросы

1 Для некоторого утверждения A высказывание «**не** A» ложно. Истинно или ложно A?

2 Для некоторого утверждения A высказывание «**неверно**, что **не** A» ложно. Истинно или ложно A?

3 Постройте отрицание к высказыванию «Сейчас на улице солнечно».

Задачи

158 Постройте отрицание утверждения:
а) «Число 5 делится на 2»;
б) «Прямые a и b имеют общую точку»;
в) «Юпитер — планета Солнечной системы».

159 Дано уравнение $(x - 1)(x - 2) = 0$. Истинны или ложны высказывания:
а) «Любое значение x удовлетворяет данному уравнению»;
б) «Ни одно значение x не удовлетворяет данному уравнению»;
в) «Существует число, которое является решением данного уравнения»;
г) «Некоторые числа являются решениями данного уравнения»?
Постройте отрицания для ложных утверждений.

160 Рассмотрим утверждение «Число 72 делится на число x». Истинны или ложны высказывания:
а) «Это утверждение истинно для всех натуральных x»;
б) «Это утверждение не является истинным ни при одном натуральном x»;
в) «Это утверждение истинно для всех натуральных x, которые меньше 5»;
г) «Это утверждение ложно при некоторых натуральных x»;
д) «Это утверждение истинно для некоторых трёхзначных чисел x»?
Постройте отрицания к ложным высказываниям.

161 Определите, истинны или ложны следующие высказывания, и постройте отрицания:
а) «Любое число является решением неравенства $x > 0$»;
б) «Все положительные числа являются решениями неравенства $x > 0$»;
в) «Существует положительное решение неравенства $x > 0$».

162 Сформулируйте отрицание для утверждения:
а) «При бросании игрального кубика выпало менее 3 очков»;
б) «При бросании игрального кубика выпало простое число очков».

163 Игральную кость бросили 2 раза. Сформулируйте отрицание для следующих утверждений:
а) «Четыре очка не выпало ни разу»;
б) «Оба раза выпало 5 очков».

164 Симметричную монету бросили трижды. Сформулируйте отрицание для следующих утверждений:
а) «Орёл не выпал ни разу»;
б) «Все три раза выпал орёл».

24 Условные утверждения

ПРИМЕР 1. Согласно СНиП[1] в зданиях, где больше пяти этажей, должен быть лифт. Это правило можно сформулировать в виде утверждения: «**Если** в здании больше, чем 5 этажей, **то** в этом здании должен быть лифт».

Это сложное утверждение, составленное из двух с помощью слов **если** и **то**. Первое утверждение «В здании больше, чем 5 этажей», второе — «В этом здании должен быть лифт».

Утверждения, составленные с помощью логической конструкции **если ..., то ...**, называют **условными утверждениями**.
Первое утверждение называется условием или **посылкой**, а второе — **следствием**.

ПРИМЕР 2. Из курса геометрии вы знаете аксиому[2] параллельных: «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной». Эту аксиому принимают за истинное высказывание, и можно её сформулировать в виде условного утверждения:

«**Если** точка не лежит на данной прямой, **то** через эту точку можно провести единственную прямую, параллельную данной».

Посылкой является утверждение «Точка не лежит на данной прямой», а следствием — утверждение «Через эту точку можно провести единственную прямую, параллельную данной».

Многие математические утверждения — условные. Если такое утверждение удаётся доказать, то получается истинное высказывание. Наиболее важные и общие истинные условные высказывания называются теоремами.

Слова **«если»** и **«то»** можно заменить стрелкой. Например, условное утверждение «Из утверждения A следует утверждение B», то есть «**Если** A, **то** B», можно кратко записать с помощью стрелки: $A \to B$.

Утверждение $A \to B$ ложно, только если посылка A истинна, а следствие B ложно. Во всех остальных случаях утверждение $A \to B$ истинно. Можно сформулировать правило.

Правило. Условное утверждение истинно, если следствие истинно или если посылка ложна.

Иными словами, условное утверждение $A \to B$ будет ложным, только при попытке получить ложь из истины. Во всех прочих случаях утверждение $A \to B$ истинно.

Истинно даже утверждение вида **«ложь → истина»**. Это может показаться странным, но это так: из ложного утверждения можно вывести любое следствие — и истинное, и ложное. Иногда коротко говорят: «Из лжи следует что угодно». Точно так же: «Истина следует откуда угодно».

[1] СНиП — строительные нормы и правила.

[2] Аксиома — высказывание, которое принимается как истинное. Аксиомы — это фундамент математических рассуждений, начальные истинные высказывания.

Чтобы понять, истинно или ложно условное утверждение, надо узнать, истинны или ложны его составные части — посылка и следствие.

ПРИМЕР 3. Является истинным или ложным утверждение:

а) «**Если** $2 \cdot 2 = 4$, **то** число 7 — составное»;
б) «**Если** $2 \cdot 2 = 5$, **то** число 7 — составное»;
в) «**Если** $2 \cdot 2 = 4$, **то** число 7 — простое»?

Эти утверждения могут показаться странными, но это не мешает определить их истинность.

Утверждение а) ложно, так как в нём из истины следует ложь.

Утверждение б) бессмысленно, но истинно, поскольку в нём ложная посылка, и из неё можно вывести любое утверждение и даже заведомую чепуху (рис. 42).

Утверждение в) истинно, хотя бы потому, что число 7 действительно простое. Посылка здесь тоже истинна, это приятно, но уже не играет роли. Достаточно того, что следствие — истинное высказывание.

$2 \cdot 2 = 5$

$\downarrow$

$7 = 2 \cdot 2 + 2 = 2(2 + 1)$

$\downarrow$

7 делится на 2

$\downarrow$

число 7 составное

Рисунок 42. **Так можно «доказать», что если $2 \cdot 2 = 5$, то число 7 составное**

Вопросы

1 Рассмотрите утверждение «Если на двух игральных костях в сумме выпало 3 очка, то на одной из них выпало одно очко». Что здесь посылка? Что следствие? Является ли это утверждение истинным высказыванием?

2 Утверждение $A \to B$ ложно, а утверждение A — истинно. Истинно или ложно утверждение B?

Задачи

165 Является истинным или ложным высказывание:

а) «**Если** $3 < 5$, **то** сумма внутренних углов треугольника равна 190°»;
б) «**Если** $5 < 3$, **то** сумма внутренних углов треугольника равна 190°»;
в) «**Если** $3 < 5$, **то** в равнобедренном треугольнике два угла равны»;
г) «**Если** $5 < 3$, **то** в равнобедренном треугольнике два угла равны»?

166 К утверждению «**Если ..., то** на этих двух игральных кубиках в сумме выпало больше 11 очков» подберите посылку, чтобы утверждение стало истинным высказыванием.

167 К утверждению «**Если ..., то** на этих двух игральных кубиках в сумме выпало 7 очков» подберите такую посылку, чтобы оно было ложным.

168 К утверждению «**Если ..., то** на этих двух игральных кубиках в сумме выпало 13 очков» подберите такую посылку, чтобы оно было истинным.

169 В жилых домах, в которых больше 5 этажей, должен быть установлен лифт. Считая, что это условие соблюдается, укажите, какие из утверждений являются истинными высказываниями:

а) «Если в доме нет лифта, то в этом доме больше 5 этажей»;
б) «Если в доме больше 6 этажей, то в нём есть лифт»;
в) «Если в доме лифта нет, то в этом доме меньше 5 этажей»;
г) «Если в доме нет лифта, то он не выше 6 этажей»;
д) «Если в доме 4 этажа, то в нём лифта нет»;
е) «Если в доме не больше 5 этажей, то в нём нет лифта»;
ж) «Если в доме есть лифт, то в этом доме есть пятый этаж».

170 Выходя на улицу, Анна Дмитриевна обязательно надевает перчатки. Какие из следующих высказываний истинны:

а) «Если Анна Дмитриевна без перчаток, значит, она дома»;
б) «Если Анна Дмитриевна без перчаток, значит, она не на улице»;
в) «Если Анна Дмитриевна в перчатках, значит, она на улице»;
г) «Если Анна Дмитриевна на улице, значит, она в перчатках»;
д) «Если Анна Дмитриевна дома, значит, она без перчаток»?

171 Даны три высказывания:

A «Число x делится на 3»,
B «Число x делится на 6»,
C «Число x чётно».

Какие из следующих высказываний истинны при любом значении x:

а) $A \to B$; б) $B \to A$; в) $B \to C$?

25 Обратные и равносильные утверждения. Признаки и свойства. Необходимые и достаточные условия

Обратные и равносильные утверждения

ПРИМЕР 1. Вспомним признак делимости на 3: «**Если** сумма цифр натурального числа делится на 3, **то** и само число делится на 3». Это истинное высказывание.

Построим **обратное** утверждение: «**Если** натуральное число делится на 3, **то** сумма его цифр также делится на 3». Это утверждение выражает свойство чисел, делящихся на 3. И оно тоже истинно.

Если исходное утверждение записать в виде $A \to B$, то обратное ему утверждение имеет вид $B \to A$. Такие утверждения называют **взаимно обратными**.

В этом примере оба взаимно обратных утверждения оказались истинными. Так бывает не всегда.

ПРИМЕР 2. Утверждение «**Если** натуральное число делится на 9, **то** оно делится на 3» является истинным высказыванием. Однако обратное утверждение «**Если** натуральное число делится на 3, то оно делится на 9» – ложно (приведите контрпример, показывающий, что это утверждение ложно).

Если утверждение $A \to B$ истинно, то обратное утверждение $B \to A$ не обязательно истинно.

Если всё же два взаимно обратных утверждения истинны или ложны одновременно, то они **равносильны**. Примеры равносильных утверждений вам встречались в геометрии.

ПРИМЕР 3. Два утверждения:

«**Если** треугольник равнобедренный, **то** два угла этого треугольника равны»

и

«**Если** в треугольнике два угла равны, **то** такой треугольник равнобедренный» —

два взаимно обратных равносильных утверждения (рис. 43). Первое выражает свойство, а второе — признак равнобедренного треугольника.

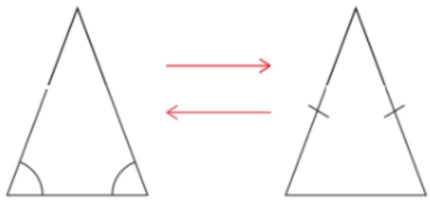


Рисунок 43

Равносильными могут быть не только взаимно обратные утверждения. Нужно лишь, чтобы они были истинными или ложными одновременно.

Равносильные утверждения — это утверждения, которые являются одновременно истинными или одновременно ложными.

Необходимые и достаточные условия, признаки и свойства

Посмотрим на условное утверждение «**Если** A, **то** B». Оно говорит, что если посылка A истинна, то этого достаточно, чтобы следствие B также оказалось истинным.

Поэтому утверждение A часто называют **достаточным условием** для B.

Значит, если B ложно, то A не может быть истинным. Можно сказать, что «без B не будет A».

Поэтому B называют **необходимым условием** для A.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим знакомое нам утверждение:

«**Если** накрест лежащие углы при двух данных прямых и секущей равны, **то** данные прямые параллельны».

Здесь первая часть «накрест лежащие углы равны» является достаточным условием для второй части «прямые параллельны».

Напротив, вторая часть «прямые параллельны» является необходимым условием того, чтобы накрест лежащие углы оказались равны: если не будет параллельности, то и равенства накрест лежащих углов не будет.

Очень часто математические теоремы формулируют как **признаки** или **свойства**. Утверждение в этом примере — признак параллельности прямых, известный вам из геометрии.

ПРИМЕР 5. Сформулируем утверждение: «**Если** идёт дождь, **то** асфальт на улице мокрый». Это утверждение можно рассматривать по-разному.

1. Как признак мокрого асфальта. 2. Как свойство идущего дождя.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Мокрый асфальт — не признак дождя. Асфальт могла намочить поливальная машина, а вовсе не дождь.

ПРИМЕР 6. «**Если** человек прошёл пешком 20 км, **то** он сильно устал». Это свойство долгой ходьбы и одновременно признак усталости.

И здесь тоже обратное утверждение «**Если** человек сильно устал, **то** значит, он прошёл пешком 20 км» не является истинным. Этот человек мог устать совсем по другой причине.

Любой признак при желании можно рассмотреть как свойство или наоборот. Легко запутаться. Поэтому некоторые утверждения мы по традиции привыкли называть только признаками, а другие — свойствами.

ПРИМЕР 7. Сформулируем утверждение: «**Если** три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, **то** эти треугольники равны». Это признак равенства треугольников.

ПРИМЕР 8. Ещё утверждение: «**Если** пропорция $a : b = c : d$ верна, **то** $ad = cb$». Это основное свойство пропорции.

Рассуждения и умозаключения часто встречаются в жизни. Обычно мы не стараемся формулировать утверждения точно и не следим, где признак, а где свойство, какие наши мысли и слова являются достаточными условиями, а какие необходимыми. Мы это делаем интуитивно. Иногда ошибаемся, а иногда шутим, намеренно нарушая правила логики.

Занимаясь математикой, важно следить за тем, чтобы рассуждения были безупречны. Приходится тщательно формулировать истинные высказывания в виде аксиом и теорем, признаков и свойств. При этом нужно понимать, как правильно сформулировать признак, как устроено свойство, где достаточные и где необходимые условия.

Вопросы

1 Как называются два утверждения, которые одновременно истинны или одновременно ложны?

2 Приведите пример истинного высказывания, обратное к которому не является истинным.

3 Приведите пример теоремы-признака, известной вам из геометрии.

Задачи

172 Постройте утверждение, обратное данному:

а) «Если предмет сделан из дерева, то он не тонет в воде».

б) «Если число оканчивается двумя нулями, то оно делится на 100».

в) «Если у человека отчество Дмитриевич, то его отца зовут Дмитрий».

г) «Если животное — кошка, то у него четыре лапы».

173 Рассмотрим утверждения:

A: «Натуральное число N делится на 3»,

B: «Натуральное число N делится на 9»,

C: «Сумма цифр натурального числа N делится на 3»,

D: «Сумма цифр натурального числа N делится на 9».

Запишите символически с помощью букв и стрелок следующее утверждение и обратное к нему:

а) «**Если** сумма цифр натурального числа N делится на 9, **то** это число делится на 3».

б) «**Если** натуральное число N делится на 9, **то** сумма цифр этого числа делится на 3».

Какие из этих утверждений являются истинными высказываниями?

174 Пусть N — натуральное число. Даны утверждения:

A: «N делится на 3»,

B: «N делится на 9»,

C: «Сумма цифр числа N делится на 3»,

D: «Сумма цифр числа N делится на 9»,

E: «Число N является натуральной степенью числа 2».

Составьте из этих утверждений два взаимно обратных условных утверждения:

а) так, чтобы оба были истинными высказываниями;

б) так, чтобы одно из них было истинным, а обратное могло оказаться ложным;

в) так, чтобы оба утверждения оказались ложными высказываниями.

175 Предположим, что N — некоторое натуральное число. Найдите равносильные утверждения.

A: «Число N чётное».

B: «Число N равно $2k$ для некоторого натурального числа k».

C: «Число N даёт остаток 2 при делении на 4».

D: «Число N заканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8».

E: «Число N делится на 2, но не делится на 4».

26* Противоположные утверждения. Доказательство от противного

Взаимно противоположные утверждения

У некоторых людей логика немного хромает: они иногда путаются в посылках и следствиях. Рассмотрим два примера — бытовой и математический.

ПРИМЕР 1. Вспомним правило из примера про лифты (п. 24 с. 99). Предположим, что в городе построены два новых здания. В одном 12 этажей, а в другом 3 этажа. В обоих установлены лифты. Нарушено ли правило?

Правило не нарушено. Ведь не сказано, что в зданиях, где не больше 5 этажей, не должно быть лифтов.

Чтобы разобраться, воспользуемся схемой со стрелками. Пусть утверждение A «В здании больше, чем 5 этажей», а утверждение B «В этом здании должен быть лифт». Тогда правило можно записать схематически $A \to B$.

Утверждение

«Если в здании не больше, чем 5 этажей,
то в этом здании не должно быть лифтов»

имеет схему **не** $A \to$ **не** B. И если первое утверждение является истинным высказыванием, то про второе этого сказать нельзя. Не запрещено устанавливать лифты в малоэтажных зданиях.

Утверждения $A \to B$ и **не** $A \to$ **не** B называют **противоположными** друг другу.

Рассмотрим другой пример.

ПРИМЕР 2. Мы знаем, что если натуральное число оканчивается цифрой 2, то это число чётное. Сформулируем это в виде условного утверждения:

«**Если** натуральное число оканчивается цифрой 2,
то это число чётное».

Будет ли истинным утверждение, которое получится, если обе части заменить их отрицаниями:

«**Если** натуральное число не оканчивается цифрой 2,
то это число нечётное».

Чтобы это опровергнуть, достаточно примера. Число 4 не оканчивается цифрой 2, но оно всё равно чётное. Посылка «Число не оканчивается цифрой 2» истинна, а следствие «Число нечётное» ложно. Налицо попытка вывести из истины ложь. Утверждение ложно.

Если из утверждения A следует утверждение B, то это не означает, что из утверждения **не** A следует утверждение **не** B.

Доказательство от противного

Предположим, что мы знаем, что утверждение A истинно, и, кроме этого, пусть истинно высказывание $A \to B$.

Предположим, что утверждение B ложно. Тогда A тоже обязано быть ложным. Но ведь мы знаем, что A истинно!

Получается противоречие: утверждение A оказывается одновременно истинным и ложным высказыванием. Следовательно, где-то в наших рассуждениях ошибка. Единственное место, где она может быть, — это предположение, будто утверждение B ложно. Сформулируем полученную мысль с помощью схем со стрелками.

Утверждения $A \to B$ и **не** $B \to$ **не** A равносильны, то есть одновременно оба истинны или оба ложны. Поэтому вместо одного можно доказывать другое.

На таком рассуждении построено **доказательство от противного**. Иногда трудно доказать некоторое утверждение. Но если предположить, что оно ложно, и прийти к противоречию, то придётся признать, что всё же утверждение истинно.

С доказательствами от противного вы встречались в геометрии. Обычно такое доказательство начинается словами «предположим противное». Пусть нужно доказать некоторое утверждение B. Доказательство состоит из трёх шагов.

1. Сначала делают предположение, что истинно утверждение **не** B.
2. Затем приходят к противоречию с каким-нибудь истинным высказыванием.
3. Делают вывод о том, что сделанное предположение ложно, а значит, утверждение B истинно.

ПРИМЕР 3. Используя метод доказательства от противного, докажем утверждение

«**В любом** треугольнике не более одного прямого угла».

Доказательство.

1. Предположим противное, то есть будем считать, что истинно отрицание: «**Существует** треугольник KLM, в котором два прямых угла L и M».

2. Обе прямые KL и KM перпендикулярны прямой LM. Значит, через точку K проведены две различные прямые, перпендикулярные одной и той же прямой LM (рис. 44). Это противоречит теореме о том, что через любую точку к данной прямой можно провести только один перпендикуляр.

3. Следовательно, сделанное предположение неверно, а потому утверждение

«**В любом** треугольнике не более одного прямого угла» —

истинно. Конец доказательства.

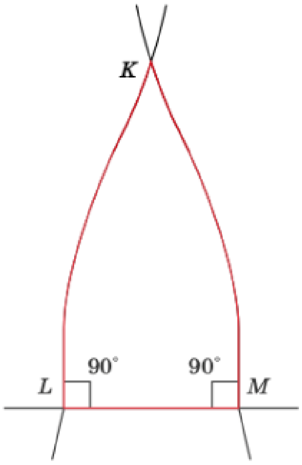


Рисунок 44

ПРИМЕР 4. В классе 26 учеников. Докажите, что среди них найдутся трое, у которых день рождения в одном и том же месяце.

Доказательство. Предположим, что троих с днём рождения в одном месяце нет. Тогда в каждом из 12 месяцев день рождения случается не более чем у двоих. Но тогда в классе не больше, чем $12 \cdot 2 = 24$ человека. А это противоречит истинному высказыванию «В классе 26 человек».

Противоречие показывает, что предположение неверно. Значит, найдутся трое, у кого день рождения в одном месяце.

Вопросы

1 Приведите пример двух противоположных утверждений.

2 Верно ли, что если исходное утверждение истинно, то противоположное ему ложно?

3 Верно ли, что если исходное утверждение истинно, то противоположное ему тоже истинно?

Задачи

176 В магазине продаются булочки с яблочным джемом и с абрикосовым вареньем. Все булочки с яблочным джемом посыпаны корицей. Паша купил булочку без корицы. Докажите, что в ней абрикосовое варенье.

177 В ящике лежат 20 синих и 20 зелёных носков. Докажите, что если наугад вынуть из ящика три носка, хотя бы два из них окажутся одного цвета.

178 Антип Петрович разорвал газетный лист пополам. Потом взял один из кусков и разорвал его пополам. Опять взял один из кусков и разорвал пополам. Антип Петрович может рвать газету таким образом сколь угодно много раз. Сможет ли он получить в результате 100 кусков?

179 Пётр Антипович разорвал газетный лист на три части. Потом взял один из кусков и разорвал его на три части. Опять взял один из кусков и разорвал на три части. Пётр Антипович может рвать газету таким образом сколь угодно много раз. Докажите, что Пётр Антипович не сможет получить в результате 100 кусков.

180 Докажите, что существует только одно простое чётное число.

181 Сколько существует простых чисел, которые делятся: а) на 5; б) на 100?

182 Матвей зашифровал пример на сложение с помощью числового ребуса. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры: АВ + БГ = ВЖГ. Докажите, что Матвей в чём-то ошибся.

VI Случайные опыты и случайные события

Попытка изучать изменчивость и случайность с помощью математики привела к появлению теории вероятностей. В этой главе мы познакомимся с основными понятиями теории вероятностей: случайными опытами и случайными событиями, которые происходят в этих опытах.

Вероятность случайного события — это числовая мера его правдоподобия. Чем больше шансов на осуществление события, тем больше его вероятность.

В нашей жизни играют большую роль маловероятные события. Мы расскажем о таких событиях и о том, как правильно к ним относиться.

27 Примеры случайных опытов и случайных событий

О некоторых событиях мы можем твёрдо сказать, что они произойдут. В наступлении других событий мы не уверены. Например, в самый жаркий и солнечный летний день мы точно знаем, что лето кончится, наступит осень, а затем зима. Но невозможно сказать заранее, будет эта зима тёплой или холодной. Мы не можем предвидеть, будет ли следующий год влажным или засушливым, урожайным или нет. В неурожайный год дорожает хлеб, предприятия сельского хозяйства несут убытки, а некоторые из них могут разориться. Урожайные годы тоже хорошо было бы прогнозировать заранее.

Нельзя предвидеть многие события даже недалёкого будущего.

ПРИМЕР 1. Сейчас прогнозы стали намного точнее, чем они были 10—15 лет назад. Но всё равно, даже имея грозовой прогноз, нельзя быть уверенным в том, что гроза случится именно в нашем районе в предсказанное время. Можно лишь говорить о шансах этого события. Поэтому в прогнозах погоды можно встретить выражения «дождь маловероятен», «вероятность грозы 10%», «к вечеру возможно усиление ветра» и т. п.

ПРИМЕР 2. Для России и других нефтедобывающих стран важны мировые цены на нефть. Безошибочно прогнозировать эти цены не удаётся, хотя многие стараются это сделать. При составлении бюджета государства на следующий год важно знать, превысит цена на нефть некоторый уровень (**цена отсечения**) или нет. Если превысит, то в бюджете можно предусмотреть определённые накопления. Бюджет России на 2021 г. был составлен исходя из цены отсечения 42,4 долл. за баррель.

ПРИМЕР 3. Перед началом футбольного чемпионата мы не можем назвать ни победителя, ни итоговый счёт. Мы можем обсуждать шансы команд, но лишь по окончании чемпионата станет ясно, кто какое место занял.

Все упомянутые выше примеры — **случайные события**. Всякое случайное событие связано с некоторыми условиями. Если мы создаём или описываем такие условия, мы тем самым производим некоторый **случайный опыт (случайный эксперимент)**. Если случайный опыт не описан или описан плохо, то трудно говорить о вероятностях случайных событий. Например, о шансах спортивных команд на победу можно говорить, только если эти команды могут встретиться и сыграть. О вероятности выпадения шести очков на игральном кубике можно говорить, только если кубик бросают.

Случайный опыт (случайный эксперимент) — это условия и обстоятельства, в которых мы рассматриваем случайные события.

ПРИМЕР 4. Случайный эксперимент — телефонный разговор. Можно, например, рассмотреть событие «длительность разговора составит от 5 до 10 минут» или событие «разговор прервётся из-за плохой связи».

ПРИМЕР 5. Школьник пишет контрольную работу по математике. Это в нашем понимании случайный эксперимент, и в нём возникают случайные события. Например, «школьник сделает не больше трёх ошибок» или «школьник получит отметку «отлично».

ПРИМЕР 6. У игрального кубика шесть одинаковых граней с числами от 1 до 6. Невозможно предсказать, какая грань выпадет, если кубик случайным образом бросить на стол. Выпадение шестёрки — случайное событие. Другое случайное событие — «выпадет больше двух очков».

ПРИМЕР 7. Подсчёт автомобильных аварий (ДТП[1]), которые произойдут завтра в определённом городе или на определённой дороге, — случайный опыт, поскольку условия определены, а результат неизвестен. Примеры случайных событий в этом опыте — «ДТП не будет» или «случится больше шести ДТП» и т. п.

ПРИМЕР 8. При проведении денежной лотереи возникают события: «выпадение выигрыша на определённый номер» или «сумма выигрыша на данный билет лотереи превысит 1000 р.».

Примеры случайных экспериментов и связанных с ними случайных событий можно приводить бесконечно.

Если случайное событие не относится к рассматриваемому эксперименту, то оно не является событием этого эксперимента. Например, в опыте, где школьник пишет контрольную работу по математике, событие «в этот день отменён урок физкультуры» не является случайным событием.

Поскольку теория вероятностей изучает случайные события в случайных экспериментах, слово «случайное» мы часто будем опускать.

Вопросы

1 Вообразите, что вы ловите рыбу на озере, где водится только окунь и плотва. Какие случайные события могут произойти в этом случайном опыте?

2 Случайный эксперимент — определение времени работы некоторого мобильного телефона от батареи. Какие случайные события возможны в этом эксперименте?

3 Игральный кубик бросают один раз. Приведите примеры двух-трёх случайных событий в этом эксперименте.

4 Автомобиль подъезжает к перекрёстку двух дорог и намерен продолжить движение. Какие случайные события возможны в этом случайном опыте? Приведите несколько примеров.

28 Вероятности и частоты событий

Часто мы не можем сказать заранее, произойдёт в некотором случайном опыте определённое событие или нет. Но мы можем говорить о шансах этого события.

Например, обсуждая будущую встречу футбольных команд А и Б, кто-то скажет, что их шансы на победу относятся как 1 к 3. Этот человек считает победу команды Б втрое более вероятной, чем победу команды А. В подтверждение своего мнения он скажет, что команды А и Б встречались много раз и при этом команда Б побеждала примерно в три раза чаще, чем команда А. Поэтому он и говорит, что вероятность события «победит команда А» равна 0,25, а вероятность события «победит команда Б» равна 0,75.

[1] ДТП — дорожно-транспортное происшествие.

При бросании игрального кубика шансы выпадения единицы такие же, как шансы выпадения двойки. А шансы событий «выпадет шестёрка» и «шестёрка не выпадет» относятся как 1 к 5.

Шансы случайных событий измеряют числами от 0 до 1 и называют **вероятностями.** Если мы бросаем на стол симметричную монету, то шансы событий «орёл» и «решка» разумно считать одинаковыми, поскольку монета симметрична.

Вероятность случайного события — это числовая мера правдоподобия этого события.
Невозможное случайное событие — это случайное событие, которое в случайном эксперименте не наступает. Вероятность невозможного события равна 0.
Достоверное случайное событие — это случайное событие, которое в случайном эксперименте обязательно наступает. Вероятность достоверного события равна 1.

Некоторые случайные события не являются достоверными, но происходят практически наверняка. Таким, например, является событие «31 января следующего года в Новосибирске будет лежать снег». Можно смело рассчитывать на это.

Другие события происходят очень редко. Маловероятно, например, что 31 января следующего года в Новосибирске снега не будет вовсе.

Иногда вероятности событий можно рассчитать математически, но часто приходится их оценивать, то есть приближённо находить с помощью частот, повторяя один и тот же случайный опыт много раз.

Пусть, например, мы провели один и тот же опыт 100 раз, и некоторое событие C произошло 45 раз. Отношение числа тех опытов, в которых событие C произошло, к общему числу проведённых опытов равно $\frac{45}{100} = 0{,}45$.

Число 0,45 в этом случае является **частотой случайного события** C. Мы уже говорили о частотах значений в числовых наборах, поэтому частота события не является для нас совсем новым понятием.

Отношение числа опытов, в которых случайное событие произошло, к общему числу проведённых одинаковых опытов называется **частотой случайного события** в этой серии опытов.

Если событие не наступило ни разу, то его частота равна 0. Но это не значит, что оно невозможное. Может быть, в следующей серии таких же опытов это событие всё же случится. Если событие наступило во всех опытах, то частота этого события равна 1.

Вероятности и частоты связаны. Если опыт повторять достаточно много раз, то почти наверняка окажется, что *частота события близка к его вероятности*. Значит, если мы знаем вероятность события, то можем сказать, насколько часто это событие будет происходить в жизни.

Например, если какое-то событие имеет вероятность 0,99, то в среднем его следует ожидать в 99 случаях из 100, то есть почти всякий раз. Напротив, если событие имеет вероятность 0,01, то происходит оно редко, примерно в 1 случае из 100.

ПРИМЕР. Предположим, что при определённых погодных условиях в некоторой местности вероятность урагана равна 0,25, то есть при многократных повторениях упомянутых условий примерно в 25% случаев будет ураган. Вероятность 0,25 достаточно высока, чтобы объявить штормовое предупреждение. И неважно, что ураган может не случиться. В таком случае лучше перестраховаться.

Говоря, что событие произойдёт примерно в 25 случаях из 100, мы не утверждаем, что оно непременно случится 25 раз из 100 возможных. Оно может произойти 22, 23, 24, 25, 26, 27 или 28 раз. Оно даже может произойти всего 18 раз или 32 раза в какой-нибудь серии из 100 опытов. Но такие серии опытов будут встречаться довольно редко.

Если вероятность события равна 0,25, то не следует ожидать его появления, скажем, 1 или 99 раз из 100. Напротив, прогноз «от 22 до 28» раз можно считать весьма разумным. Как и в каких случаях устанавливаются разумные границы прогноза — сложный вопрос, ответ на который часто удаётся найти с помощью теории вероятностей.

Частота события близка к его вероятности.

Этот факт связывает теорию вероятностей с практикой. Он позволяет оценивать вероятности с помощью статистических опытов и прогнозировать частоты наступления событий, зная их вероятности. Так проявляется статистическая устойчивость в повторяющихся сериях случайных экспериментов.

Вопросы

1 Что такое частота случайного события? Как частоты и вероятности событий связаны друг с другом?
2 Какие значения может принимать вероятность случайного события?
3 Может ли частота случайного события быть больше единицы?
4 Какие события называют достоверными, а какие — невозможными?
5 Чему равна вероятность достоверного случайного события; невозможного случайного события?
6 Приведите примеры невозможных и достоверных случайных событий в эксперименте, где бросают игральную кость с очками от 1 до 6.
7 Приведите примеры маловероятных событий в эксперименте «прогноз погоды на завтра».
8 Приведите примеры нежелательных маловероятных событий в жизненных ситуациях. Обсудите с учителем и одноклассниками, какими из них и в каких случаях можно пренебречь.

Задачи

183 Бросают игральный кубик, на гранях которого числа от 1 до 6. Укажите, какие из перечисленных событий являются достоверными, а какие — невозможными:

а) «выпадет 7 очков»;
б) «выпадет больше 2, но меньше 5 очков»;
в) «выпадет от 1 до 6 очков»;
г) «выпадет больше 3, но меньше 4 очков».

184 Книгу, в которой 256 страниц, открывают на случайно выбранной странице. Укажите, какие события являются достоверными, а какие — невозможными:

а) «номер открытой страницы — дробное число»;

б) «номер открытой страницы равен 342»;

в) «номер открытой страницы в книге не меньше 1».

185 Какова, по вашему мнению, вероятность события:

а) «завтра на улице вам встретится живой динозавр»;

б) «число дней в следующем месяце не превысит 31»;

в) «на морозе вода в стакане через некоторое время замёрзнет»;

г) «сборная вашего класса выиграет в футбол у команды «Спартак»?

29 Монета и игральная кость в теории вероятностей

Многие важные факты теории вероятностей были получены в опытах с обычными монетами и игральными кубиками. Долгое время теория вероятностей развивалась как исчисление шансов в играх, но давно уже «вышла из детского возраста». Гораздо важнее и интереснее описывать случайные явления, возникающие в природе, в технике, в общественной жизни, чем вычислять шансы выигрышей или редких игровых комбинаций. Однако монета и игральный кубик не ушли из теории вероятностей. Они продолжают играть важную роль, подобно тому как важную роль играют линейка и циркуль в геометрии.

С помощью монеты, игральных кубиков и других простых игровых моделей можно изучать очень сложные и запутанные случайные явления.

Математическая монета, используемая в теории вероятностей, лишена многих качеств настоящей монеты. У математической монеты нет цвета, размера, веса и достоинства. Она не сделана ни из какого материала и не служит платёжным средством.

Бросание монеты — случайный опыт, который может окончиться либо орлом (О), либо решкой (Р). Всего два события, и одно из них обязательно произойдёт.

Если мы бросим монету 2 раза, то это другой случайный эксперимент, который может окончиться одним из четырёх вариантов (исходов) ОО, ОР, РО и РР: два исхода первого броска комбинируются с двумя возможными исходами второго. Получается всего $2 \cdot 2 = 4$ возможности.

Пробная монета-рубль 1771 г.

Аверс монеты образца 1992 г.

Если бросить монету 3 раза, то может быть $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ исходов, которые можно обозначить ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО и РРР.

Название «орёл» для лицевой стороны (аверса) монеты происходит оттого, что на ней изображён герб Российского государства — двуглавый орёл. Впервые орёл на монетах появился при великом князе Иване III.

Название «решка» для обратной стороны монеты (реверса) возникло потому, что в древности монету при чеканке клали на решётчатую наковальню, чтобы она не скользила при ударе. Решётка отпечатывалась на реверсе монеты. Сейчас на реверсе чеканят номинал монеты, но название «решка» сохранилось.

Настоящая монета не столь идеальна, как математическая; она может быть немного вогнутой, может иметь другие дефекты, которые влияют на результаты броска. Тем не менее, чтобы проверить на практике опыты с бросанием математической монеты, мы бросали и будем бросать обычную монету.

Монета часто помогала и до сих пор помогает людям в сложной ситуации сделать честный выбор без предпочтений, положившись только на случай. Например, в начале футбольного матча арбитр бросает монету, чтобы решить, какая из команд получит право начать игру.

Игральный кубик (шестигранная **игральная кость**) также служит прекрасным средством для получения случайных событий. Игральная кость имеет удивительную историю. Игры с костями были известны в глубокой древности в Индии, Китае, Лидии, Египте, Греции и Риме. Игральные кубики находили в Египте (XX в. до н. э.) и в Китае (VI в. до н. э.) при раскопках древних захоронений. Очки на гранях древнеегипетских костей часто изображались в виде птичьего глаза.

Игральный кубик

В Древней Руси игральные кубики (лодыжки, костыги, козули) часто изготавливали из костей животных. Отсюда и пошло название игрального кубика — «кость».

Упоминания о костях в древнеиндийской поэзии отражают популярность игры в кости в Древней Индии. «Гимн игрока» — первый литературный текст, упоминающий кости, — изображает их как враждебную человеку магическую стихию:

Ведь кости усеяны колючками и крючками,
Они порабощают, они мучают, испепеляют,
Одаряют, как ребёнок, победителя они вновь лишают победы.
Неудачливый игрок пытается заклясть кости, заключает с ними мир:
Заключите с нами дружбу! Помилуйте нас!

В Древней Греции считалось, что игральные кости придумал мифический герой Паламед во время Троянской войны. Но по версии философа Геродота, кости изобрели населявшие Малую Азию лидийцы, чтобы отвлечься от голода, болезней или других напастей.

В Древнем Риме в кости играли все сословия, от рабов до императоров. Император Клавдий даже написал книгу об игре в кости.

В Древнем Китае за игру в кости можно было попасть на каторгу.

Во Франции в XIII—XIV вв. многочисленные королевские указы запрещали игру в кости. Видимо, запреты эти оказались безрезультатными, поскольку королевским указом от 1396 г. запрещались уже не сами кости, а применение и изготовление поддельных костей[1].

Правильные (симметричные) кости обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. Для этого все грани должны иметь одинаковую площадь, быть плоскими и одинаково гладкими. Вершины и рёбра кубиков должны иметь правильную форму. Сумма очков на противоположных гранях правильной кости равна 7, чтобы затруднить жульничество при игре.

[1] Поддельная кость имеет нарушенную разметку, смещённый центр тяжести или изменённую форму для того, чтобы обеспечить преимущество тому игроку, кто знает об этом.

Математическая игральная кость, которая обсуждается и используется в теории вероятностей, — это математический образ правильной кости. Выпадения всех граней равновозможны.

Если игральный кубик бросают один раз, то возникает случайный опыт, в котором возможно 6 простейших равновозможных случайных событий: 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

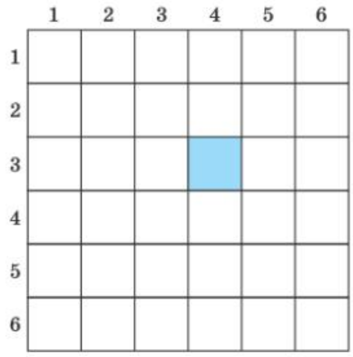


Рисунок 45

Если игральный кубик бросить дважды, то получится более сложный эксперимент, который может окончиться одним из $6 \cdot 6 = 36$ исходов. Их удобно изображать с помощью таблицы 6×6, где номер строки — результат первого броска, а номер столбца — результат второго (рис. 45). Если при первом броске выпало, скажем, 3 очка, а при втором 4 очка, то в таблице это можно изобразить, закрасив соответствующую клетку.

30 Как узнать вероятность события

! В некоторых случаях вероятность события можно установить, исходя из симметрии в случайном опыте.

Например, при бросании симметричной монеты разумно считать, что шансы орла и решки одинаковы, и поэтому вероятность выпадения каждой стороны равна $\frac{1}{2}$.

То же относится и к правильной игральной кости. Она имеет 6 граней. Кость симметрична, и поэтому вероятности выпадения всех граней мы полагаем одинаковыми и равными $\frac{1}{6}$.

! Иногда вероятности событий удаётся вычислить, зная вероятности более простых событий.

Но даже если вероятность события удалось рассчитать, остаются сомнения. Дело в том, что расчёты непременно основаны на каких-либо исходных предположениях. А предположения могут оказаться неточными или даже ошибочными.

! Ещё один метод определения вероятности — экспериментальный или статистический. Этот метод основан на наблюдениях.

При многократных повторениях опыта частоты случайных событий оказываются близки к их вероятностям. Поэтому если опыт можно повторять много раз, то вероятность случайного события можно оценить его частотой.

Рассмотрим связь частот и вероятностей на примере страхования. С 2004 г. в России действует закон об ОСАГО — обязательном страховании автогражданской ответственности. Владелец автомобиля должен заключить договор со страховой компанией. По этому договору владелец машины платит компании определённую сумму (**страховую премию** или **страховой взнос**), а компания взамен обязуется оплатить (до определённого предела) ущерб, который может быть нанесён этим автовладельцем другому автовладельцу, городской собственности или пешеходам в случае ДТП. Чтобы определить размер страхового взноса, нужно учесть две величины:

1) с какой вероятностью автомобиль в течение срока страхования может попасть в ДТП;

2) какой в среднем ущерб окружающим приносит одно ДТП.

Вероятность случайного события «в течение года автомобиль попадёт в ДТП» оценивается по статистическим данным, которыми располагают страховые компании. В разных регионах России эта вероятность разная — от 0,04 до 0,1.

> Вероятности некоторых событий не удаётся ни оценить, ни вычислить, ни назначить из соображений симметрии. Такими событиями теория вероятностей не занимается.

Что нам дают вероятности, кроме оценки шансов попасть в ДТП или выиграть в лотерее? Это далеко не единственная польза, которую может принести знание вероятностей.

С помощью теории вероятностей проводятся испытания лекарств, инженеры проектируют здания и сооружения, рассчитывают надёжность систем в автомобилях, самолётах, судах, на электростанциях и в космических кораблях. Вероятности опасных побочных явлений, отказов, аварий и катастроф нужно сделать как можно меньше. Чем менее вероятными являются неблагоприятные случайные события, тем лучше.

Роль маловероятных событий в жизни человека

Если вероятность события мала (например, 0,001), то оно наступает редко. Такие события называют **маловероятными**. Например, можно выиграть в лотерее большую сумму денег и жить безбедно, не учась и не работая. Но вероятность этого события настолько мала, что разумные люди на это не рассчитывают. Сформулирован даже принцип.

> **Принцип практической невозможности:** к маловероятным событиям при однократном проведении опыта относятся как к невозможным.

Это не теорема, а лишь принцип, определяющий наше отношение к маловероятным событиям в разных ситуациях. Важно уметь взвешивать риски. На принцип практической невозможности нельзя полагаться, если от этого зависит чья-то жизнь или здоровье. Например, вероятность попасть под машину, перебегая улицу, мала, но последствия этого события таковы, что пренебрегать ими нельзя. Поэтому не нужно перебегать улицу[1].

Нужно помнить, что даже очень маловероятные события иногда случаются. Например, организаторы зимней олимпиады в 2010 г. не могли допустить мысли, что зимой в Ванкувере (Канада) не будет снега. Но его почти не было. Пришлось пользоваться специальными снеговыми пушками. В результате такого маловероятного события никто не пострадал, только немного расстроились спортсмены и болельщики.

Но иногда случаются маловероятные события с тяжёлыми последствиями. И если такое событие произойдёт — обрушится здание, внезапно выйдут из строя тормоза в автомобиле, — потом будет поздно вспоминать, как мала была вероятность этого события. Поэтому, чтобы предотвратить несчастье, нужно регулярно проверять тормоза, вовремя ремонтировать или сносить ветхие здания и принимать другие необходимые меры. Таким образом можно значительно понизить и без того малую вероятность несчастья.

Есть меткая пословица: «Незаряженное ружьё раз в год стреляет». Это как раз о маловероятных событиях, которые всё же происходят.

! Добиться того, чтобы несчастья и катастрофы не случались совсем, невозможно. Но можно и нужно делать всё, чтобы вероятности этих событий стали как можно меньше.

К сожалению, часто люди из-за своего легкомыслия недооценивают опасность. Например, вероятность столкновения «Титаника» с айсбергом была крайне мала[2]. Капитан Эдвард Смит мог её ещё уменьшить, снизив скорость судна, но не сделал этого, считая, что столкновение невозможно.

Как следует относиться к маловероятным событиям, попробуем объяснить на примере с «упрямой» монетой.

Вообразим, что ваш приятель у вас на глазах бросает на стол монету 10 раз и все 10 раз выпадает орёл. Это может случиться, хотя это и маловероятно (такое случается в среднем реже одного раза на 1000 таких опытов). Теперь приятель предлагает вам угадать, что выпадет при следующем, одиннадцатом броске. Попросите его показать вам монету и стол поближе.

Предположим, что ваш приятель хитро улыбается и уклоняется под разными предлогами. Тогда следует заподозрить, что вам показывают фокус. Например, у монеты на обеих сторонах орёл. Или в столе скрыто хитрое магнитное устройство, а монета сильно намагничена. Или просто ловкость рук.

Другое дело, если приятель соглашается, и вы совершенно ясно видите, что перед вами обычный стол и обычная монета. В этом случае придётся признать, что вы стали свидетелем редкого, а потому удивительного события: 10 орлов из 10 попыток. Тогда шансы орла и решки при следующем броске одинаковы. Монете «не надоело» падать орлом вверх, и она «не испытывает неприязни к решке». Этот случай самый трудный для угадывания.

---

[1] Тот, кто бежит, имеет больше шансов споткнуться и упасть. Улицу нужно переходить спокойным шагом, убедившись в безопасности. И водителю проще предсказать действия и движения спокойно идущего пешехода, чем того, кто выбегает на проезжую часть.

[2] Британский трансатлантический пароход «Титаник», выполняя свой первый рейс, 15 апреля 1912 г. столкнулся с айсбергом и затонул.

31 Вероятностная защита информации от ошибок

Двойной ввод

Можно без преувеличения сказать, что мы живём в мире цифр. Цифры сопровождают нас повсюду и играют важную роль в нашей жизни. У любого человека множество документов, каждый из которых имеет номер. Нам часто приходится вводить массу данных на разных сайтах. Но человеку свойственно ошибаться. Как обезопасить себя от случайных ошибок?

Самый простой способ — двойной ввод. Многие сайты, включая сайты государственных услуг, запрашивают важную информацию дважды. Например, приходится два раза вводить новый пароль при создании личного кабинета, два раза подряд вводить адрес электронной почты. Зачем? Для защиты от ошибок.

Если пользователь придумает один пароль, а введёт по ошибке немного другой, то никто никогда не узнает, какой пароль по ошибке оказался в системе (рис. 46). Пользователь не сможет войти на сайт, он будет недоумевать и даже может начать возмущаться, считая, что сайт плохо работает.

Чтобы подтвердить безошибочность ввода, программа регистрации просит ввести пароль ещё раз: вероятность двух одинаковых ошибок пренебрежимо мала[1].

То же и с электронной почтой: если при вводе — ошибка, то пользователь не получит информацию, которую ему добросовестно посылает система. Безошибочность ввода электронной почты очень важна. Поэтому используется двойной ввод.

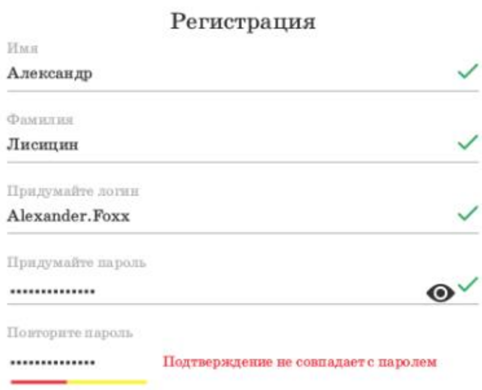


Рисунок 46. **Двойной ввод пароля**

Контрольные цифры и суммы

Другой способ вероятностной защиты информации — **контрольная сумма** или **контрольная цифра**.

Почти у каждого взрослого есть банковская карта. Чтобы сделать денежный перевод, нужно указать номер карты получателя. Кратко расскажем о том, как теория вероятностей помогает защититься от ошибки.

У большинства платёжных карт номер состоит из 16 цифр. Первая цифра номера — код платёжной системы[2]. По следующим пяти цифрам можно узнать, какой банк выпустил карту. Затем идёт девятизначный номер карты. Эти девять цифр можно считать случайными. И наконец — последняя, шестнадцатая цифра. Эта цифра контрольная. Чтобы определить контрольную цифру, применяется специальный алгоритм.

---

[1] Некоторых людей такие простые меры защиты раздражают. Они стараются схитрить — ввести пароль один раз и скопировать его во второе окно. На многих сайтах попытка копирования паролей блокируется. Но не на всех. Если в первое окно пароль введён с ошибкой, то ошибка скопируется во второе окно. Человек сам себя накажет.

[2] Номер банковской карты «Мир» начинается цифрой 2, у карт JCB первая цифра номера 3, у карт VISA — 4, у MasterCard — 5, у Maestro — 6.

1. Все цифры, стоящие на нечётных местах, умножаются на 2, при этом из двузначных произведений вычитается 9.

2. Полученные в результате первого шага цифры и цифры, стоящие на чётных местах, складываются.

3. Контрольная цифра — это цифра, которой в полученной сумме не хватает до ближайшего сверху числа, кратного 10.

ПРИМЕР. Предположим, банк выпустил карту, и первые 15 цифр такие:

2200 2476 0343 593_

Нужно определить последнюю контрольную цифру. Умножаем на 2 цифры, стоящие на нечётных местах, и при необходимости вычитаем 9. Получаются цифры 4, 0, 4, 5, 0, 8, 1, 6. Теперь найдём сумму полученных цифр и цифр, стоящих на чётных местах:

$$(4 + 0 + 4 + 5 + 0 + 8 + 1 + 6) + (2 + 0 + 4 + 6 + 3 + 3 + 9) = 28 + 27 = 55.$$

Чтобы получить 60 (ближайшее сверху число, кратное 10), нужно добавить 5. Это и есть контрольная цифра. Таким образом, карта получает свой номер окончательно (рис. 47).

Рисунок 47. **Правильный номер карты «Мир»**

Если человек при вводе номера (или сканер при считывании) ошибётся, возникнет сообщение об ошибке. Можно ли случайно ввести неверный номер с правильной контрольной цифрой? Да, такое возможно, но маловероятно. Защита с помощью одной контрольной цифры считается достаточной.

Примерно так же защищены от ошибки ввода номера банковских счетов, номер налогоплательщика, номер пенсионного свидетельства, лицевые счета на квартплату и многие другие персональные данные.

Похожим образом защищается от ошибок информация при передаче по мобильным сетям или Интернету. Каждый символ в сообщении кодируется числом, и их сумма (**контрольная сумма**) передаётся вместе с сообщением. Если из-за помех информация случайным образом исказилась, то практически наверняка контрольная сумма окажется неверной. Вероятность случайного совпадения настолько мала, что ею можно пренебречь.

Вместе с основной информацией передаётся **избыточная информация**, позволяющая проверить корректность передачи основной информации.

Избыточность языка — вероятностная защита

Защита с помощью избыточной информации появилась вместе с человеческой речью. Когда мы видим опечатку в тексте, обычно понимаем, что это опечатка, и можем легко догадаться, какое слово должно быть в этом месте. Дело в том, что русский язык избыточен, как и любой другой естественный язык. Если случайно пропала нужная буква, появилась лишняя или буквы поменялись местами, то на помощь приходят соседние буквы и слова, иногда даже согласование слов по падежам, родам и числам помогает нам восстановить смысл написанного — языки обладают высокой избыточностью.

Ни у кого не возникнет сомнений в том, что такое «стаитстика», «минная каша» или «причастный обормот». Смысл пропал, но не совсем. Его можно восстановить.

Чем курьёзнее опечатка, тем легче её исправить. И только в редких случаях избыточности языка не хватает, чтобы понять, что имелось в виду. Например, человек написал, что он «помял машину», а на самом деле он её всего лишь помыл. Смысл не пропал, он стал другим. Такие незаметные ошибки приводят к недоразумениям, но они маловероятны, поэтому случаются нечасто.

Избыточность языка позволяет создавать алгоритмы проверки орфографии и исправления опечаток при вводе текста в компьютер или смартфон.

Иное дело — математический язык. В нём нет избыточности. Почти любая описка или опечатка в записи числа или в математическом выражении меняет смысл, и часто не остаётся следов. Например, хотел школьник написать 72, но почему-то написал 12 (может быть, в черновике написал семёрку, похожую на единицу, а потом переписал эту единицу в чистовик). Не очень страшно, если это случилось в домашнем задании. Если же такое произойдёт на экзамене, никто потом не сумеет доказать, что имелось в виду не то, что написано: восстановить задуманное по соседним цифрам или знакам невозможно.

Поэтому математические расчёты и записи, особенно ответы на экзамене, нужно обязательно проверять два, а то и три раза. Проверка, которую всегда советуют делать учителя математики, — это вероятностная защита от досадных ошибок.

Вопросы

1 Падение сосульки с крыши на голову пешехода — событие маловероятное. Что нужно делать для того, чтобы эту вероятность ещё уменьшить?

2 В каких случаях не следует доверяться правилу: «В однократном опыте маловероятное событие не происходит»?

3 Приведите несколько примеров маловероятных событий из жизни.

4 В фантастической повести Аркадия и Бориса Стругацких «Понедельник начинается в субботу» есть эпизод, когда герои сначала находят умершего попугая, на лапке которого кольцо с номером 190 573. На следующий день они видят такого же больного попугая с этим же номером, который умирает на их глазах. Ещё через день к ним в лабораторию влетает весёлый и здоровый попугай с таким же номером на лапке. Герой повести Александр Привалов рассуждает следующим образом.

Всё происходящее, рассуждал я, по-настоящему удивительно, только если считать, что эти три или четыре попугая — один и тот же попугай. Они действительно так похожи друг на друга, что вначале я был введён в заблуждение. Это естественно. Я математик, я уважаю числа, и совпадение номеров — в особенности шестизначных — для меня автоматически ассоциируется с совпадением пронумерованных предметов.

Объясните своими словами, что имеют в виду авторы в последнем предложении, говоря от имени Привалова о совпадении номеров и предметов.

5 Подумайте, зачем в алгоритме защиты банковской карты умножать цифры на нечётных местах на 2 перед тем, как складывать цифры. Почему берут остаток от деления на 9, а не на 10?

Задачи

186 Обычную симметричную монету, у которой на одной стороне изображён орёл, а другая сторона — решка, бросили шесть раз. Все шесть раз эта монета выпадала орлом. Какое утверждение или какие из утверждений верны?

а) В следующий раз более вероятно, что выпадет орёл, чем решка.

б) В следующий раз более вероятно, что выпадет решка.

в) В следующий раз орёл и решка могут выпасть с равными шансами.

г) Седьмой раз подряд орёл выпасть не может.

д) При седьмом броске тоже выпадет орёл.

187 Для правильной монеты мы полагаем, что вероятность выпадения орла равна 0,5. Разумно ли ожидать, что при 100 бросаниях монеты орёл выпадет:

а) 5 раз; б) 49 раз; в) 90 раз?

188 Подбросьте монету 10 раз. Удалось ли вам с первой попытки выбросить десять орлов? Как вы думаете, можно ли считать такое событие маловероятным?

189 Бросьте игральную кость 6 раз. Выпало ли шесть шестёрок? Можно ли считать такое событие маловероятным?

190 Вероятность выпадения шестёрки на правильной кости равна $\frac{1}{6}$. Сколько раз, по вашему мнению, следует ожидать выпадение шестёрки при 600 бросаниях кости?

191 Игральную кость бросают 6 раз. Является ли, по вашему мнению, маловероятным случайное событие:

а) шестёрка не выпадет ни разу;

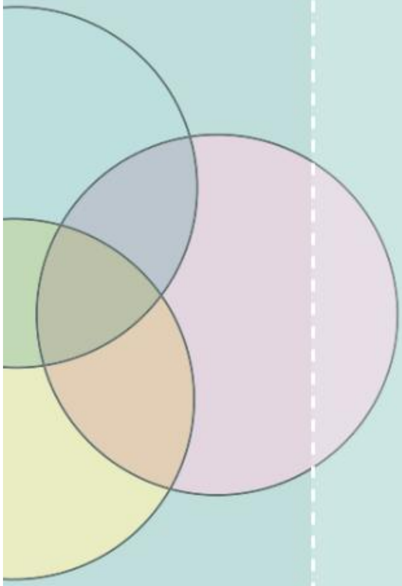
б) какая-то грань выпала более одного раза?

192 Правильную игральную кость бросили 6 раз. Оказалось, что единица выпала дважды. Означает ли это, что какое-то число очков не выпало ни разу?

193 В тесте по биологии 16 задач с выбором ответа из четырёх предложенных вариантов. Верный вариант только один. Тройку ставят за 4 правильных ответа, четвёрку — за 12, а пятёрку — за 15 правильных ответов. Вася не готов к тесту и выбирает ответы наудачу. Разумно ли ожидать, что Вася получит:

а) отметку «3»; б) отметку «4»; в) отметку «5»?

VII Множества



Множество — важнейшее математическое понятие, один из начальных «кирпичиков», из которых строится математика. Поскольку множество — понятие начальное, его нельзя определить, то есть точно сказать, что это такое. Множество нужно понимать как набор, массив или коллекцию каких-то элементов. Говоря в статистике о числовых массивах, мы имеем дело с множествами чисел. Геометрическая фигура — это множество точек на плоскости. Школьный класс — множество школьников, которые в нём учатся.

32 Множество, подмножество, примеры множеств

Множества, примеры и обозначения

Нельзя точно сказать, что такое **множество**. Ведь чтобы дать определение новому понятию, нужно уже что-то иметь. Треугольник определяется с помощью отрезков, отрезки — с помощью прямых и точек. Точка и прямая — понятия начальные, поэтому их не определяют. Точно так же невозможно определить множество — это начальное понятие. Мы получаем представление о множествах на примерах.

Мы собираем во множество некоторые объекты и называем их **элементами множества**. Например, можно говорить о множестве автомобилей на парковке возле дома. Автомобили на парковке — элементы этого множества. Другие автомобили (не на этой парковке) в это множество не входят. Геометрическая фигура — это некоторое множество точек.

Иногда мы используем синонимы к слову «множество»: массив, набор, коллекция.

Множество можно собрать из разнородных предметов. Можно, например, рассмотреть множество, состоящее из карандаша, облака и ботинка. Но такие множества обычно бесполезны. Полезны множества, у которых элементы обладают общим признаком. Например, множество деревьев в каком-то парке, множество дождливых дней в ноябре в нашем городе или множество букв греческого алфавита. По таким описаниям мы можем точно сказать, принадлежит элемент множеству или нет.

Множество можно задать одним из двух способов.

1. Можно явно перечислить все элементы множества.
2. Можно описать множество, то есть указать признак, которым обладают все элементы этого множества.

ПРИМЕР 1. Множество состоит из слов «понедельник», «вторник», «среда», «четверг», «пятница», «суббота», «воскресенье». Сейчас это множество задано перечислением элементов. Но можно его описать: множество названий дней недели.

Обозначать множества принято латинскими буквами или с помощью фигурных скобок, в которых перечислены все элементы.

ПРИМЕР 2. При бросании игрального кубика может выпасть грань с числами от 1 до 6. Множество результатов бросания игрального кубика можно записать перечислением в фигурных скобках: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Можно обозначить это множество, например, буквой A. Тогда

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Чтобы указать, что некоторый элемент **принадлежит** множеству, используют значок $\in$ (читается «принадлежит»).

Например, запись $6 \in A$ читается «число шесть принадлежит множеству A», а запись $7 \notin A$ означает, что число 7 множеству A не принадлежит.

Слово «множество» намекает на то, что элементов может быть много. Но это необязательно. Элемент может быть один. Например, множество решений уравнения $2x = 6$ состоит из одного-единственного числа 3.

Более того, множество может быть **пустым**, то есть не иметь элементов вовсе. Скажем, множество чётных делителей числа 3 пустое, таких чисел не существует. Обозначают пустое множество символом $\varnothing$.

Пустое множество — это множество, которое не содержит элементов.

Подмножества

ПРИМЕР 3. Пусть A — множество всех треугольников, а B — множество всех равнобедренных треугольников. Каждый равнобедренный треугольник является треугольником. Поэтому можно сказать, что множество B **включается** в множество A, и наоборот, множество A **включает** в себя множество B. Ещё в таких случаях говорят, что множество B является **подмножеством** множества A и пишут $B \subset A$.

Это означает, что все элементы множества B в то же время являются элементами множества A.

Множество B называется **подмножеством** множества A, если любой элемент множества B принадлежит множеству A.

ПРИМЕР 4. Пусть множество K — это множество всех студентов в каком-то вузе. Тогда множество девушек, которые учатся в этом вузе (множество G), является подмножеством: $G \subset K$.

ПРИМЕР 5. Пусть A — множество натуральных чисел от 1 до 3:

$$A = \{1,\ 2,\ 3\}.$$

У этого множества восемь подмножеств. Например, подмножествами являются множества $\{1\}$, $\{2,\ 3\}$, само множество A и пустое множество $\varnothing$. На рисунке 48 показан граф, где изображены все восемь подмножеств множества A. Рёбра соединяют каждую вершину-множество со всеми его подмножествами на следующем уровне. Двигаясь вниз по рёбрам, можно пройти от каждого множества ко всем его подмножествам. Граф напоминает кубик.

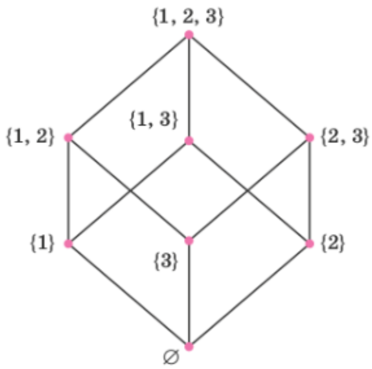


Рисунок 48

Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя. Поэтому, каково бы ни было множество A, можно записать: $\varnothing \subset A$ и $A \subset A$.

Комментарий. Может показаться, что утверждение $\varnothing \subset A$ противоречит определению. Определение гласит, что любой элемент подмножества является элементом самого множества. Но ведь пустое множество не содержит элементов! Надо разобраться. Перепишем утверждение $\varnothing \subset A$ в виде:

«**Если** элемент принадлежит пустому множеству $\varnothing$,
то он принадлежит множеству A».

Посылка «элемент принадлежит пустому множеству» — ложная! А из лжи, как мы знаем, следует что угодно. Поэтому утверждение $\varnothing \subset A$ является истинным высказыванием. Мы доказали это утверждение, пользуясь законами логики.

Числовые множества

Мы часто имеем дело с множествами, состоящими из чисел. Они так важны, что в математике за ними закрепились постоянные обозначения — имена, понятные любому математику.

1. Множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ обозначается $\mathbb{N}$. Истинны утверждения

$$2 \in \mathbb{N};\ 1{,}5 \notin \mathbb{N};\ -4 \notin \mathbb{N}$$

(знак $\notin$ читается **«не принадлежит»**).

2. Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$. Например,

$$2 \in \mathbb{Z};\ 1{,}5 \notin \mathbb{Z};\ -4 \in \mathbb{Z};\ 0 \in \mathbb{Z}.$$

3. Множество рациональных чисел, то есть чисел, которые можно выразить отношением двух целых чисел, обозначают $\mathbb{Q}$. Можно записать:

$$2 \in \mathbb{Q};\ 1{,}5 \in \mathbb{Q};\ 0 \in \mathbb{Q};\ \frac{2}{5} \in \mathbb{Q};\ \pi \notin \mathbb{Q}.$$

Последнее утверждение истинно, поскольку число π (длина полуокружности единичного радиуса) не является рациональным числом. Его невозможно представить в виде отношения двух целых чисел.

4. Множество всех чисел на координатной прямой обозначают $\mathbb{R}$.

Перечисленные множества включаются одно в другое:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Рисунок 49. **Числовой отрезок [0; 1]**

Числовые промежутки — отрезки, интервалы, полуинтервалы — также являются числовыми множествами. Например, числовой отрезок $[0; 1]$ — это множество, которое состоит из чисел 0, 1 и всех чисел, заключённых между ними (рис. 49).

Можно сказать, что математические записи $a \leqslant x \leqslant b$ и $x \in [a; b]$ выражают одно и то же. Первая на языке арифметики, а вторая на языке теории множеств.

Вопросы

1 Какие способы задания множеств вам известны? Приведите примеры.

2 Пусть O — множество нечётных, а E — множество чётных натуральных чисел. Известно, что $X \subset O$ и $X \subset E$. Что можно сказать о множестве X?

3 Известно, что $B \subset A$. Верно ли, что в множестве B меньше элементов, чем в множестве A?

Задачи

194 Перечислите все элементы множества:

а) различных остатков при делении на 5;

б) простых чисел, которые больше 10 и меньше 20;

в) названий месяцев, заканчивающихся на «ябрь».

195 Какие из следующих множеств пустые?

а) Множество $\{0\}$.

б) Множество простых чисел, которые делятся на 10.

в) Множество квадратов, имеющих острый угол.

196 Пусть множество C состоит из результатов броска монеты. Его элементы — орёл и решка: $C = \{\text{О, Р}\}$. Выпишите все подмножества множества C.

197 Обозначим буквой A множество делителей числа 15, а буквой B — множество делителей числа 5. Является ли одно из них подмножеством другого?

198 Множество $M = \{A, B, C, D\}$ состоит из четырёх точек на плоскости. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Можно составить множество $N = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$, элементами которого являются всевозможные отрезки с концами в этих точках.

а) Запишите множество T всех треугольников с вершинами в точках A, B, C и D.

б) Выпишите подмножество множества N, состоящее из всех отрезков с концом в точке B.

199 Дано множество $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Какие из следующих утверждений истинны?

а) $2 \in M$;
б) $\{3, 5\} \subset M$;
в) $3 \in M$;
г) $M \subset \varnothing$;
д) $\{2, 4\} \subset M$;
е) $\varnothing \subset M$.

200 Докажите, что если $B \subset A$ и $C \subset B$, то $C \subset A$.

201 Игральную кость бросают 2 раза. Пусть A — множество всех пар $(a; b)$, где a — число очков, выпавших при первом броске, b — число очков, выпавших при втором броске. Запишите все элементы множества A, удовлетворяющие условию:

а) сумма выпавших очков равна 4;

б) наибольшее из выпавших очков равно 3.

202 Даны множества:

A — множество чётных целых чисел;

B — множество нечётных целых чисел;

C — множество всех натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток 2;

D — множество всех натуральных чисел, которые при делении на 6 дают остаток 2.

Для каких из этих множеств множество P является подмножеством, если:

а) $P = \{14, 26, 122\}$;
б) $P = \{27, 37, 107\}$?

33 Операции над множествами. Диаграммы Эйлера

Пересечение множеств

Разные множества могут иметь общие элементы. Эти элементы тоже образуют новое множество, которое называют **пересечением** данных множеств. Для обозначения пересечения множеств используют значок $\cap$.